УДК 539.3/4

СТАТИСТИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ ТЕКУЧЕСТИ ТВЕРДЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Л. Б. Потапова[1], В.П. Ярцев[2]

Кафедра «Механика деформируемого твердого тела», Хабаровский государственный технический университет (1); Кафедра «Конструкции зданий и сооружений», ТГТУ (2)

Представлена членом редколлегии профессором В.И. Коноваловым

Ключевые слова и фразы: кинетическое уравнение; критерий текучести; сложное напряженное состояние; термоактивационный процесс.

Аннотация: Предложен критерий текучести твердых материалов при сложном напряженном состоянии. Критерий похож на известные критерии сопротивления материалов, так как в осях главных напряжений является уравнением поверхности второго порядка. Отличие предложенного критерия состоит в том, что константы выражены не через предельные напряжения, а через деформационные характеристики и учтена физическая нелинейность материала. Кроме того, использование критерия совместно с кинетическим уравнением термоактивационного процесса, на основе которого он получен, позволяет учесть фактор времени и температуры при оценке предельного состояния текучести.

Математическая модель предельного состояния

В настоящее время сложилась такая ситуация, когда, с одной стороны, в механике деформируемого твердого тела существует большое количество критериев, которые позволяют оценить текучесть материала при сложном напряженном состоянии, но не обосновывают характер влияния шарового тензора [1] и не учитывают фактор температуры и времени. С другой стороны, существует физически обоснованная сило-температурно-временная зависимость для состояния материала под нагрузкой [2], но нет ясности, как учесть в ней влияние вида напряженного состояния. Целью данной работы является разработка такого критерия предельного состояния, который бы соответствовал физическим представлениям о деформировании и разрушении твердых тел и позволял получить простое и удобное для инженерных расчетов уравнение предельной поверхности, но с физически обоснованным влиянием шарового тензора.

С физической точки зрения хрупкое и квазихрупкое разрушение представляет собой термодеструкцию металлов или термохимическую деструкцию полимеров [2 – 4], а критическое деформирование – текучесть и объемное вязкое разрушение – направленное перемещение дефектов структуры в результате разрывов физических (межкристаллических, межмолекулярных, водородных, ...) связей [5 – 7]. Основой вышеперечисленных термоактивационных процессов является собственное тепловое движение структурных элементов, составляющих твердое тело, а точнее – флуктуация тепловой энергии. Если в результате флуктуации внутренняя энергия структурного элемента окажется больше энергии его связи с другими

элементами, то такая связь порвется. Роль напряжения заключается не в разрыве связи, а в снижении энергетического барьера, преодолеваемого тепловой флуктуацией.

Таким образом, и хрупкое, и вязкое разрушение – это процесс накопления во времени разрывов различных связей, кинетика которого подчиняется закону Аррениуса. Универсальность закона Аррениуса состоит в том, что влияние температуры на основную характеристику процесса имеет экспоненциальный характер вида $e^{-U/RT}$ для многих термоактивационных процессов: для скоростей реакции полимеризации, поликонденсации, плавления, испарения, механических превращений и диффузии [8]; деформации металлов [9]; деформации полимеров [10]; течения жидкостей [5] и любых конденсированных тел [2, 11, 12]. В научной литературе кинетическая теория течения конденсированных тел называется кинетической теорией Френкеля-Эйринга.

Температурно-временная зависимость состояния текучести и хрупкого разрушения, проверенная для металлов, жестких полимеров и ряда строительных материалов [2, 4, 13, 14] имеет вид:

$$\tau = \tau_m \exp\left[\frac{U_m - \gamma\sigma}{RT}\left(1 - \frac{T}{T_m}\right)\right], \qquad (1)$$

где U_m, τ_m, T_m и γ – константы, разные для двух предельных процессов; τ – время; T – температура; σ – номинальное напряжение. Всего одна константа γ зависит от вида напряженного состояния [15]. Основной константой является начальная энергия активации U_m, которая и определяет характер предельного состояния под нагрузкой. Формула (1) справедлива для статического нагружения постоянной во времени нагрузкой, для нагружения с постоянной скоростью деформирования, усталости и даже для износа трением. Но в случае переменного во времени напряжения математическую модель (1) применяют для прогноза работоспособности совместно с законом суммирования времен (повреждений) Бейли.

Вероятность как критерий предельного состояния

Любое предельное состояние твердого материала под нагрузкой имеет явный статистический характер. Можно показать, что существует тесная связь формулы термодинамической вероятности Дж.В. Гиббса [16] с математической моделью критического деформирования и разрушения (1).

Формула плотности вероятности физического состояния Дж.В. Гиббса основана на предположении об эргодическом распределении ансамбля с бесконечно большим количеством структурных элементов, составляющих любое тело – твердое, жидкое и газообразное:

$$w = \exp\left[\frac{F - E}{RT}\right],$$

где E – внутренняя энергия элемента ансамбля; F – константа. Если принять следующее преобразование: $w = A\exp\left[-E/RT\right]$, то из условия нормировки $\int_0^\infty A e^{-E/RT} = 1$ получим константу $A = 1/RT$. Тогда выражение для плотности вероятности Гиббса, более удобное для расчетов, примет вид

$$w = \frac{1}{RT}\exp\left[-E/RT\right].$$

Если известна энергия активации разрушения статистического ансамбля связей, составляющего твердое тело ($U = U_m - \gamma\sigma$), то тогда вероятность разрушения твердого тела равна отношению количества структурных элементов N_a с внутренней энергией E, превышающей энергию активации U, к общему числу элементов N. Эта вероятность может быть определена и как результат вычисления определенного интеграла от плотности распределения Гиббса с предельными значениями внутренней энергии от U до ∞:

$$W = \frac{N_a}{N} = \frac{1}{RT}\int_U^\infty \mathrm{e}^{-E/RT}\,dE,$$

или

$$W = \mathrm{e}^{-U/RT}. \qquad (2)$$

Таким образом, связь формулы вероятности (2) с формулой долговечности (1) заключается в следующем: в этих уравнениях одинаковые экспоненциальные функции; в этих функциях – одинаковые энергии активации. Поэтому термодинамическую вероятность (2) можно предложить в качестве критерия предельного состояния материала под нагрузкой.

Критерий «абсолютного» и «условного» предела текучести

Микропроцессы, контролирующие хрупкое и вязкое разрушение под нагрузкой, происходят параллельно, но с разной энергией активации. Схема такого состояния материала при одной температуре T показана на рис. 1.

В общем случае в твердом материале под нагрузкой могут происходить несколько процессов ($i = 1, \ldots, 4$): разрыв основных химических связей; разрыв межкристаллических связей; различные диффузионные процессы. Каждый процесс характеризуется своим начальным значением энергии активации U_{mi}, которая меняется с изменением внешнего воздействия $U_i = U_{mi} - \gamma_i\sigma_H$ (γ_i – структурно-силовой параметр; σ_H – номинальное напряжение, как правило, наибольшее по модулю главное напряжение, через которое можно выразить все остальные компоненты напряженного состояния).

Тогда, в соответствии со статистической механикой Дж.В. Гиббса, при одинаковой температуре из всех процессов процесс с наименьшей энергией активации под нагрузкой $U_i^{\min}$ будет определять макроскопическое состояние материала, так как при условии справедливости эргодического распределения структурных элементов в материале вероятность W_i именно этого процесса будет наибольшей $W_i^{\max}$ □ □ $\mathrm{e}^{-U_i^{\min}/RT}$.

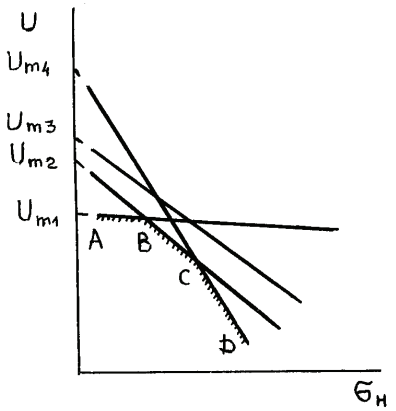


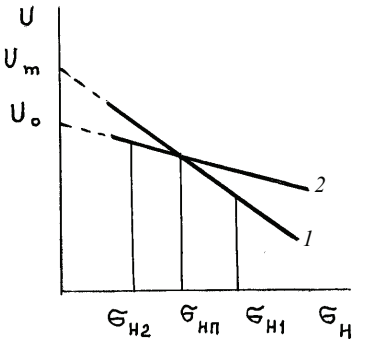
Рис. 1

На диаграмме $U - \sigma_H$ (рис. 1) наиболее вероятное состояние материала при изменении напряжения σ_H отражается ломаной линией ABCD. Схема объясняет явление, когда разным интервалам значений внеш-

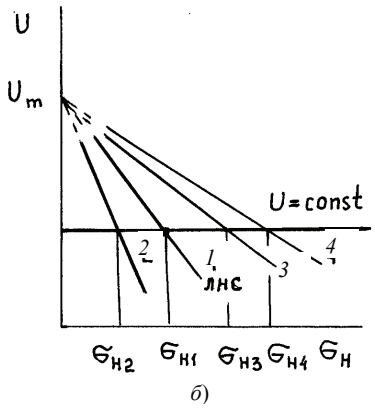
ней нагрузки соответствуют разные контролирующие процессы, и в итоге макроскопически наблюдаются разные по характеру разрушения.

С позиции статистического критерия (2) можно рассмотреть и введенные Н.Н. Давиденковым в 1933 г. понятия «абсолютного» и «условного» предела текучести [17]. Рассмотрим диаграмму физико-механического состояния, аналогичную диаграмме Н.Н. Давиденкова – Я.Б. Фридмана, но построенную в осях «энергия активации – номинальное напряжение» (рис. 2).

При одинаковой температуре и при одном и том же виде напряженного состояния хрупкое и вязкое разрушение твердого тела будут характеризоваться различными начальными энергиями активации и различными коэффициентами снижения этой энергии внешней нагрузкой. На рис. 2, *а* показана схема перехода от хрупкого разрушения к вязкому на примере закономерностей жестких полимеров. Минимизация энергии активации возможных в материале элементарных процессов под нагрузкой дает сходную со схемой А.Ф. Иоффе математическую модель достижения предельного состояния. Линия *1* – энергия активации вязкого разрушения посредством разрыва физических связей. Линия *2* – энергия активации хрупкого разрушения посредством разрыва химических связей. Напряжению σ_{H1} соответствуют два значения энергии активации процессов, но наименьшая энергия требуется для разрыва тепловыми флуктуациями межмолекулярных связей и необратимого деформирования. Поэтому при напряжении σ_{H1} разрушение материала будет вязким. Номинальному напряжению σ_{H2} тоже соответствуют два значения энергии активации, при этом процесс разрушения межатомных связей происходит при меньшем значении энергии активации, и в целом – разрушение будет иметь хрупкий характер. Точка пересечения двух графиков имеет особенность: при напряжении $\sigma_{HП}$ в соответствии с функцией Дж.В. Гиббса вероятность разрыва межатомных связей равна вероятности разрыва физических связей.



а)



б)

Рис. 2

Это напряжение $\sigma_{HП}$ в соответствии с предложенной Н.Н. Давиденковым терминологией, очевидно, можно считать «абсолютным» пределом текучести $\sigma_T^{абс}$ – фактом, существующим независимо от возможности его обнаружения. С одной стороны, эта точка пересечения двух линий энергии активации соответствует равенству вероятностей развития упругих и пластических деформаций и поэтому отвечает установленному С.И. Ратнер [18] факту соизмеримости упругих и пластических деформаций при напряжении условного предела текучести для большой группы металлов. С другой стороны, точка пересечения двух графиков рис. 2, *а* соответствует смене характера развития процесса деформирования при увеличении напряжения и в соответствии с предложениями И. Баушингера [19] и А. Филлипса [20] имеет признак предела.

В настоящее время в практике инженерных расчетов наибольшее применение нашел «условный» предел текучести. По терминологии Н.Н. Давиденкова – это значение, которое получается при произвольно выбранном условии. Подход к оценке состояния материала под нагрузкой с позиции статистической физики позволяет предложить для ряда напряженных состояний (одноосных, плоских и объемных) в качестве критерия их эквивалентности равенство вероятности Дж.В. Гиббса, вычисленной для этих напряженных состояний:

$$\mathrm{e}^{-U/RT} = \mathrm{const}. \qquad (3)$$

На рис. 2, *б* показана схема определения условных пределов текучести для сложных напряженных состояний $j = 2, \ldots, 4$ при одинаковой температуре T, если известен условный предел текучести линейного напряженного состояния *1*: $\sigma_T^{\text{лнс}} = \sigma_{H1}$. На графике σ_H – номинальное напряжение, например, наибольшее по модулю главное напряжение. В этом случае начальная энергия активации U_m является независимой константой, а структурно-силовой параметр γ_j зависит от вида напряженного состояния. При одинаковой температуре критерий эквивалентности напряженных состояний примет вид

$$U_m - \gamma_j \sigma_H = \mathrm{const}. \qquad (4)$$

Если известны для одноосного напряженного состояния структурно-силовой коэффициент $\gamma_{\text{лнс}}$ и условный предел текучести $\sigma_T^{\text{лнс}}$, то критерий (4) преобразуется к виду, принятому в сопротивлении материалов

$$\gamma_j \sigma_H = \gamma_{\text{лнс}} \sigma_T^{\text{лнс}}. \qquad (5)$$

Предельная поверхность текучести

Вывод формулы статистического критерия текучести выполнен в работе [21] для простого нагружения при постоянной температуре в условиях однородного напряженного состояния и только для материалов, диаграмма деформирования которых может быть аппроксимирована степенной зависимостью.

Как в сопротивлении материалов, представив напряженное состояние совокупностью шарового тензора и девиатора

$$\gamma_j \sigma_H = \alpha_0 \sigma_0 + \alpha_i \sigma_i \ ,$$

$$\gamma_{\text{лнс}} \sigma_T^{\text{лнс}} = (\alpha_0 / 3 + \alpha_i) \sigma_T^{\text{лнс}} \ ,$$

и введя ряд допущений о характере деформирования, критерий (5) представили в виде:

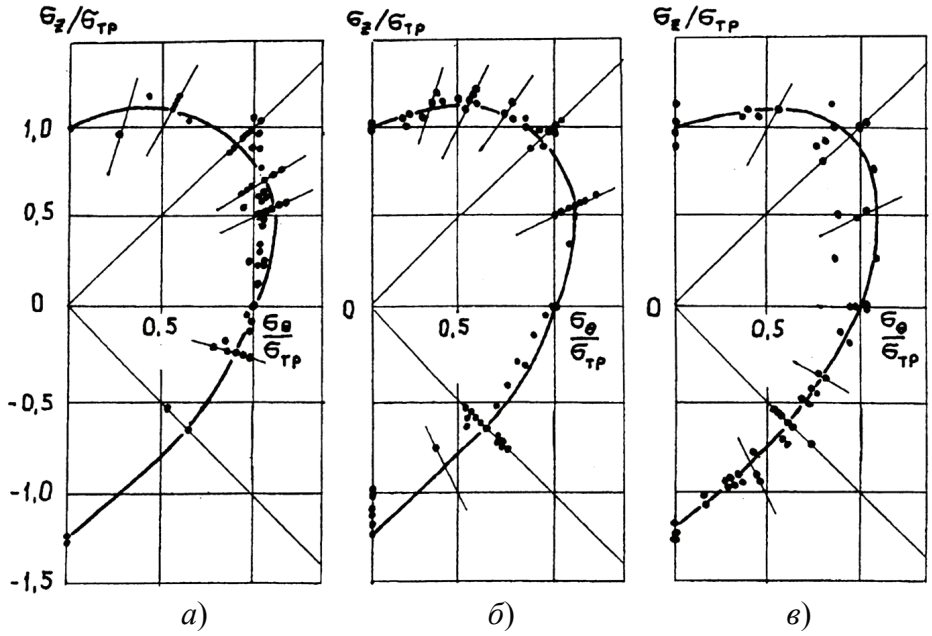
$$\sigma_0 \geq 0 \ , \ \frac{3(1-2\mu)(m+1)}{6m-(1-2\mu)(m+1)} \sigma_0 + \sigma_i = \left[\frac{(1-2\mu)(m+1)}{6m-(1-2\mu)(1+m)} + 1 \right] \sigma_{T\text{р}} \ ;$$

$$\sigma_0 \leq 0 \ , \ \frac{3(1-2\mu)(n+1)}{6n-(1-2\mu)(n+1)} \sigma_0 + \sigma_i = \left[\frac{(1-2\mu)(m+1)}{6m-(1-2\mu)(1+m)} + 1 \right] \sigma_{T\text{р}} . \qquad (6)$$

В критериальных уравнениях (6): m – показатель физической нелинейности при степенной аппроксимации диаграммы одноосного растяжения $\sigma = \sigma_{T\text{р}} \left(\varepsilon / \varepsilon_{Tp} \right)^{1/m}$; n – показатель физической нелинейности при степенной ап-

проксимации диаграммы одноосного сжатия $\sigma = \sigma_{Tc}\left(\varepsilon/\varepsilon_{Tc}\right)^{1/n}$; σ_{Tp} и σ_{Tc} – пределы текучести при одноосном растяжении и сжатии, а ε_{Tp} и ε_{Tc} – соответствующие им деформации; σ_0 – среднее напряжение; σ_i – интенсивность напряжения; μ – коэффициент Пуассона. Физические константы α_0 и α_i аналогичны γ, но отражают влияние шарового тензора и девиатора, соответственно.

Если критерию (6), как и критерию (4), в осях $U - \sigma_H$ соответствует сово-



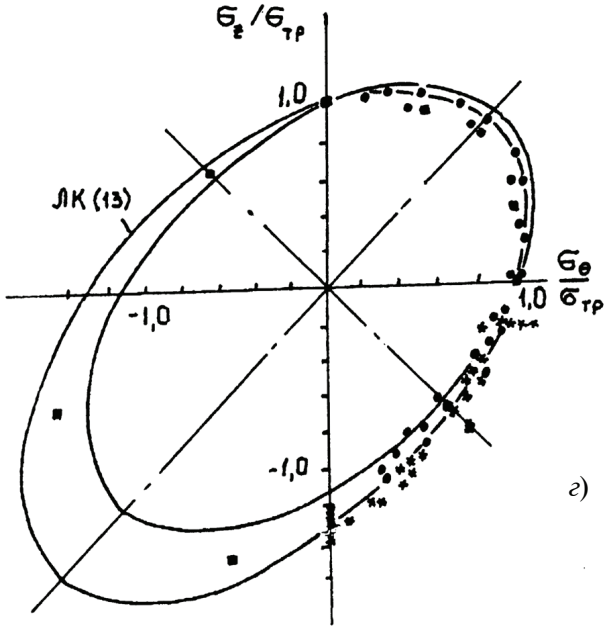


Рис. 3

купность точек, лежащих на одной прямой (рис. 2, *б*), то критерию (6) в осях главных напряжений соответствует поверхность в виде двух круговых конусов, сопряженных по девиаторной плоскости и имеющих единую ось симметрии, равнонаклоненную к главным осям, совпадающую с гидростатической осью. Для плоского напряженного состояния критерий (6) вырождается в кривую линию. На рис. 3 такие кривые линии критерия (6) построены для различных конструкционных материалов.

На рис. 3, *а* точками показаны опытные значения условных пределов текучести малоуглеродистых сталей 20, 25, Ст3 и стали с 0,05 % С [22]. На рис. 3, *б* – условные пределы текучести углеродистых сталей 40, 45, 50А, Ст4 и стали (0,37 % С) [22]. На рис. 3, *в* показаны условные пределы текучести инструментальных высокоуглеродистых сталей У7 и У8 [23, 24]. Для построения предельных кривых сталей показатели нелинейности и коэффициенты Пуассона приняты согласно рекомендациям справочников [25, 26] и с учетом авторских данных [24]: для малоуглеродистых сталей $1/m = 0,28$, $1/n = 0,373$, $\mu = 0,29$; для среднеуглеродистых $1/m = 0,2$, $1/n = 0,267$, $\mu = 0,28$; для высокоуглеродистых инструментальных $1/m = 0,16$, $1/n = 0,213$, $\mu = 0,29$.

На рис. 3, *г* совмещены результаты кратковременных испытаний поликарбоната из монографии И. Нарисавы [27] и данные для полистирола и других термопластов, взятые из монографии А.Я. Гольдмана [28]. Критериальные кривые построены для двух предельных значений коэффициента Пуассона $\mu = 0,3$ и $\mu = 0,4$ [4]; показатели нелинейности $m = 1,5$ и $n = 1,125$ приняты на основе аппроксимации диаграмм деформирования, представленных в справочнике [22].

Таким образом, каждое изображение, представленное на рис. 3, является обобщенным результатом труда нескольких исследователей. При таком соответствии независимых опытных данных можно считать, что предлагаемый критерий равной вероятности (6) с достаточной степенью точности применим для прогноза условного предела текучести при сложном напряженном состоянии по результатам опытных данных, полученных при одноосном напряженном состоянии.

Список литературы

1. Маньковский В.А. Влияние инвариантов напряженного состояния на геометрию теорий прочности конструкционных материалов. Сообщение 2 // Пробл. прочности. – 1982. – № 7. – С. 51-56.

2. Регель В.Р., Слуцкер А.И., Томашевский Э.Р. Кинетическая природа прочности твердых тел. – Л.: Наука, 1974. – 246 с.

3. Степанов В.А., Песчанская Н.Н., Шпейзман В.В. Прочность и релаксационные явления в твердых телах. – Л.: Наука, 1984. – 246 с.

4. Ратнер С.Б., Ярцев В.П. Физическая механика пластмасс. Как прогнозируют работоспособность? – М.: Химия, 1992. – 320 с.

5. Френкель С.Я. Статистическая физика. – М.-Л.: Изд. АН СССР, 1948. – 760 с.

6. Бартенев Г.М., Френкель С.Я. Физика полимеров. – Л.: Химия, 1990. – 432 с.

7. Павлов П.В., Хохлов А.Ф. Физика твердого тела. – М.: Высш. школа, 2000. – 494 с.

8. Кулезнев В.Н., Шершнев В.А. Химия и физика полимеров. – М.: Высшая школа, 1988. – 312 с.

9. Kauzmann W. Flow of solid metals from the standpoint of the chemical-rate theory // Trans. AIME. – 1941. – V. 143. – Pp. 57-83.

10. Александров А.П. Морозостойкость высокомолекулярных соединений // Труды I и II конф. по высокомолекулярным соединениям. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1945. – С. 49-59.

11. Инденбом В.Л., Орлов А.Н. Физическая теория пластичности и прочности // УФН. – 1962. – Т. 16. – № 3. – С. 537-591.

12. Krausz A.S, Eyring H. Deformation kinetic. – N. Y.: Wiley and Sons, 1975. – 398 p.

13. Потапов Ю.Б., Ярцев В.П., Макарова Т.В. Определение силовых, временных и температурных границ работоспособности каутона // Известия вузов. Строительство. – 2001. – № 9-10. – С. 131-134.

14. Ярцев В.П., Киселева О.А. Прогнозирование прочности, долговечности и термостойкости нагруженных в постоянном режиме древесных плит // Известия вузов. Строительство. – 2002. – № 1-2. – С. 141-144.

15. Ратнер С.Б., Ярцев В.П. Выявление физической константы твердых тел при разных видах нагрузки // ДАН СССР. – 1979. – 249. – № 2. – С. 409-414.

16. Гиббс Дж.В. Основные принципы статистической механики. – М.-Л.: Гостехиздат, 1946. – 203 с.

17. Давиденков Н.Н. Механические свойства и испытание металлов: Вып. 1. – Л.: Кубуч, 1933. – 140 с.

18. Ратнер С.И. Прочность и пластичность металлов. – М.: Оборонгиз, 1949. – 152 с.

19. Bauschinger J. Über die Veranderung der Elasticitatsgrenze und des Festigkeit des Eisens und Stahls durch Strecken und Quetschen, durch oftmal wiederholte Beanspruchung: Heft 13. – München: Polytechnischen Schule, 1886. – 115 s.

20. Phillips A., Tang J.L. The effect of loading path on the yield surface at elevated temperatures // Intern. J. Solids and Stractures. – 1972. – V. 8. – No 4. – Pp. 463-474.

21. Потапова Л.Б. Критерий равной вероятности процесса разрушения твердых материалов при сложном напряженном состоянии // Строительная механика и механика материалов. Выпуск 2. – Хабаровск: ХГТУ, 2002. – С. 129-150. – Деп. 30.09.2002 в ВИНИТИ, № 1650-В2002.

22. Механические свойства конструкционных материалов при сложном напряженном состоянии: Справочник / А.А. Лебедев, Б.И. Гигиняк, В.П. Ламашевский. – Киев: Наук. думка, 1983. – 366 с.

23. Савицкий Ф.С., Бурмакина О.П. О пластичности и разрушении закаленной стали при двухосном сжатии // Физика металлов и металловедение. – 1959. – Т. VII. – Вып. 3. – С. 421-425.

24. Бурмакина О.П., Савицкий Ф.С. О разрушении закаленной стали при двухосном сжатии // Физика металлов и металловедение. – 1960. – Т 10. – Вып. 4. – С. 609-616.

25. Справочник по сопротивлению материалов / Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. – Киев: Наук. думка, 1988. – 736 с.

26. Кроха В.А. Упрочнение металлов при холодной пластической деформации: Справочник. – М.: Машиностроение, 1980. – 157 с.

27. Нарисава И. Прочность полимерных материалов. – М.: Химия, 1987. – 400 с.

28. Гольдман А.Я. Прочность конструкционных пластмасс. – Л.: Машиностроение, 1979. – 370 с.

Statistic Criterion of Solid Materials Fluidity under Compex Tense Condition

L.B. Potapova[1], V.P. Yartsev[2]

Department "Mechanics of Deforming Solid Body", KhSTU (1);
Department "Construction of Buildings and Structures", TSTU (2)

Key words and phrases: complex tense condition; fluidity flow criterion; kinetic equation; thermoactive process.

Abstract: Flow criterion of solid materials under complex tense condition is offered. The criterion is similar to known criteria of strength of materials, since in axes of main tensions it is the equation of second order of surface. The difference of suggested criterion is that constants are expressed not through the limited tensions but deformation characteristics and physical non-linearity of material is taken into account. Besides, application of the criterion together with the kinetic equation of thermoactive process, on the basis of which it is obtained, enables to take into account time and temperature factor when evaluating limited flow condition.

Statistisches Kriterium der Fließbarkeit der Feststoffe bei dem komplizierten gespannten Zustand

Zusammenfassung: Es ist das Kriterium der Fließbarkeit der Feststoffe bei dem komplizierten gespannten Zustand vorgeschlagen. Das Kriterium ist den bekannten Kriterien des Widerstands der Stoffe ähnlich, da es in den Achsen der Hauptspannungen eine Gleichung der Oberfläche der zweiten Ordnung ist. Der Unterschied des angebotenen Kriteriums besteht darin, daß die Konstanten nicht durch die Höchstspannungen sondern durch die Deformationscharakteristiken geäußert sind, und es ist die physische Nichtlinearität des Stoffes berücksichtigt. Außerdem erlaubt die Nutzung des Kriteriums zusammen mit der kinetischen Gleichung des Thermoaktivationsprozesses, auf dessen Grundlage es bekommen ist, den Faktor der Zeit und der Temperatur bei der Einschätzung des Höchstzustandes der Fließbarkeit zu berücksichtigen.

Critère statistique de la fluidité des matériaux solides de l'état tendu complexe

Résumé: Est proposé le critère de la fluidité des matériaux solides de l'état tendu complexe. Ce critère ressemble à ceux de la résistance des matériaux parce dans les axes des tensions essentielles il présente l'équation de la surface du second ordre. La distinction du critère proposé consiste dans le fait que les constants sont exprimés à partir des caractéristiques de déformation et non de tensions de limites. On a aussi tenu compte de la non-linéarité physique du matériau. L'utilisation du critère avec l'équation cinétique permet de prendre en considération le facteur du temps dans l'évaluation de l'état limite de la fluidité.