

УДК 519.217

(B,S)-РЫНКИ НА ДЕФОРМИРОВАННЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ БАЗИСАХ

© 2008 г. О.В. Назарько

This work is devoted to the deformation of stochastic bases. Such a deformation presents itself a sequence of probability measures regulated “aggressive” buying up stocks. On so obtained deformed stochastic bases we consider financing types of the portfolio of securities, deformed and weakly deformed martingales.

Данная статья посвящена изложению новой методологии, связанной с моделированием финансовых рынков, подверженных «агрессивной» скупке акций, под которой мы понимаем следующую ситуацию: юридическое или физическое лицо скупает акции определенного типа для достижения каких-либо политических целей, как-то: завладение контрольным пакетом акций с целью смены руководства акционерного предприятия; завладение блокирующим пакетом акций; поглощение компании.

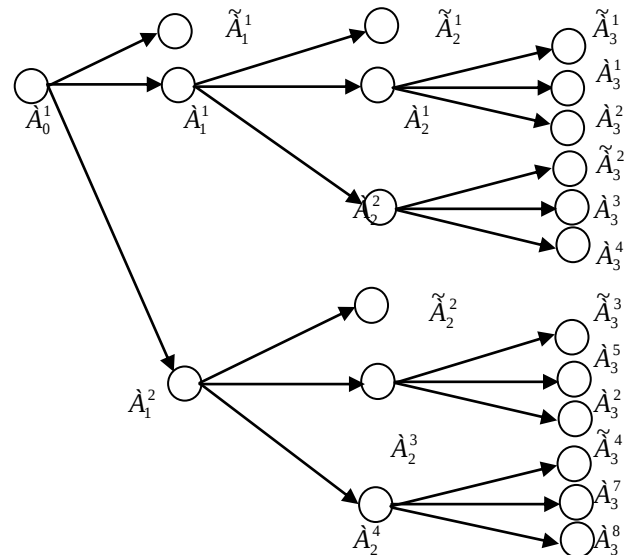
Основная черта «агрессивной» скупки – невозвращение скупленных акций на рынок в течение длительного срока. Этим существенным моментом «агрессивная» скупка отличается от обычной спекулятивной купли-продажи акций.

Идею предлагаемой методологии поясним на следующем примере.

Пример 1. Рассмотрим фильтрацию, порожденную следующим деревом (рисунок):

Пусть $\mathbb{Q}, \mathbb{F}_n, P_n$ – стохастический базис, где $N < \infty$, $F_n = \sigma\{\tilde{A}_1^1, \tilde{A}_2^1, \tilde{A}_2^2, \dots, \tilde{A}_{n-1}^1, \tilde{A}_{n-1}^2, \dots, \tilde{A}_{n-1}^{2^{n-2}}; \tilde{A}_n^1, \tilde{A}_n^2, \dots, \tilde{A}_n^{2^{n-1}}; A_n^1, A_n^2, \dots, A_n^{2^n}\}$, $F = F_N$, а мера P

нагружает все атомы σ -алгебры F . Будем считать, что событие $\tilde{A}_n^j$ заключается в том, что акция, эволюция дисконтированной цены $\mathbb{Q}_n, F_n, P_n$ которой определена на заданном базисе, скуплена на момент времени n «агрессивным» скупщиком. Пусть $B_n := \bigcup_{i=1}^{2^n} A_n^i$, $P(B_n) > 0$, $Q_n^{\tilde{A}_n^j} = P(B_n)$ – условная вероятность. Ясно, что $Q_n^{\tilde{A}_n^j} \geq 0$. Это равенство означает, что $Q_n^{\tilde{A}_n^j}$ -вероятность событий, заключающихся в том, что акция скуплена до момента n включительно, равна нулю. Таким образом, в каждый момент времени n мы рассматриваем исходный финансовый рынок на редуцированном вероятностном пространстве $(\mathbb{Q}_n, F_n, Q_n^{\tilde{A}_n^j})$. Интуитивно последовательность вероятностных мер $\{Q_n^{\tilde{A}_n^j}\}_{n=0}^N$ регулирует процесс скупки акций одним «агрессивным» скупщиком (или усредненным скупщиком). Обобщим пример 1 следующим образом.



Пример 2. Пусть $\mathbb{Q}, \mathbb{F}_n, P_n$ – произвольный стохастический базис, $A_n \in F_n$, $\mathbb{Q}_n = 1, \dots, N$,

$A_i \cap A_j = \emptyset$ ($i \neq j$), $B_n := \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right)^c$, $P(B_n) > 0$

$\mathbb{Q}_n = 1, \dots, N$, $Q_n^{\tilde{A}_n^j} = P(B_n)$ – условная вероятность. Таким образом, как в примере 1, так и в данном примере финансовый рынок, подверженный «агрессивной» скупке акций, должен рассматриваться не на исходном стохастическом базисе $\mathbb{Q}, \mathbb{F}_n, P_n$, а на некоторой более общей структуре $(\mathbb{Q}_n, \mathbb{F}_n, P_n, \{Q_n^{\tilde{A}_n^j}\}_{n=0}^N)$, которую мы назвали деформированным стохастическим базисом (DSB).

Введем следующее общее определение DSB.

Определение 1. Пусть $\mathbb{Q}, \mathbb{F}_n, P_n$ – стохастический базис, где $N < \infty$, $F_0 = \mathbb{Q}, \emptyset$, $F_N = F$. Под его деформацией будем понимать последовательность $Q = \{Q_n^{\tilde{A}_n^j}\}_{n=0}^N$ вероятностных мер $Q_n^{\tilde{A}_n^j}$, заданных на F_n и удовлетворяющих условиям:

$$Q_n^{\tilde{A}_n^j} = Q_n^{\tilde{A}_n^j} \ll Q_n^{\tilde{A}_n^j} \ll P_n := P|_{F_n}, \quad n = 0, 1, \dots, N \quad (1)$$

(полагаем $Q_N^{\tilde{A}_N^j} = Q_N^{\tilde{A}_N^j}$).

Деформированным стохастическим базисом будем называть стохастический базис, снабженный деформацией. DSB будем называть слабо деформируемым стохастическим базисом (WDSB), если

$$Q_n^{\mathbb{C}^{+1}} := Q^{\mathbb{C}^{+1}} \Big|_{F_n} \sim Q^{\mathbb{C}^{+1}} \ll P_n := P \Big|_{F_n},$$

$$n = 0, 1, \dots, N. \quad (2)$$

Пример 2 (продолжение). Структура

$(\Omega, \mathbb{C}_n^N, F, P, \mathbb{C}_n^N)$ из примера 2 является DSB. Таким образом, условия (1) имеют свою первооснову в примере 2.

Справедливы следующие простые свойства DSB.

1. Если $A \in F_n$ и $Q^{\mathbb{C}^{+1}}(A) = 0$, то $Q^{\mathbb{C}^{+1}}(A) = 0$, $\forall k = n, n+1, \dots, N$.

Это означает, что если какая-то мера $Q^{\mathbb{C}^{+1}}$ «проиндикативала» тот факт, что совершилось событие A , означающее скупку акций, то этот же факт должны «проиндикативать» и все последующие меры $Q^{\mathbb{C}^{+1}}$. Экономически это означает, что акции, купленные «агрессивным» скупщиком, не возвращаются на рынок до терминального момента N .

2. Если на DSB при всех $n = 0, 1, \dots, N$ выполняется $Q^{\mathbb{C}^{+1}} \ll P_n$, то $Q^{\mathbb{C}^{+1}} \Big|_{F_n} \sim P_n \Big|_{F_n} = P_n$, т.е. тогда $\forall n$: $Q_n^{\mathbb{C}^{+1}} \sim Q^{\mathbb{C}^{+1}} \ll P_n$. Это выполняется, в частности, если $Q^{\mathbb{C}^{+1}} = P_n$, $\forall n$ (отсутствие деформации).

Это свойство описывает некоторую другую ситуацию, отличную от разобранных нами в примерах 1 и 2. В данном случае последовательность мер $Q = (\mathbb{C}_n^N)_{n=0}^N$ не может являться индикатором скупки. Действительно, если $Q^{\mathbb{C}^{+1}}(A) = 0$, то обязательно и $P_n(A) = 0$, т.е. событие A было невозможным в изначальной модели стохастического базиса.

Пример 1 (продолжение). Структура

$(\Omega, \mathbb{C}_n^N, F, P, \mathbb{C}_n^N)$ из примера 1 является WDSB. Таким образом, условия (2) имеют свою первооснову в примере 1.

Если в примере 1 деформацию задать по-другому, то легко получить пример DSB, не являющегося WDSB. Например, если положить $Q^{\mathbb{C}^{+1}} = P^{B_1}$, а $Q^{(2)}$ задать таким образом, что $Q^{(2)}(\mathbb{C}_2^1) = Q^{(2)}(\mathbb{C}_2^2) = 0$, то $Q^{(2)}(\mathbb{C}_1^1) = 0$, в то время как $Q^{(1)}(\mathbb{C}_1^1) > 0$. То есть меры $Q_1^{(2)}$ и $Q^{(1)}$ неэквивалентны.

На стохастическом базисе $(\mathbb{C}, \mathbb{C}_n^N, F, P)$ рассмотрим $(\mathbb{C}, S)$ -рынок, состоящий из предсказуемого банковского счета B_n и акции с ценой S_n . Как обычно, портфель указанных ценных бумаг обозначим через $\pi = (\mathbb{C}_n, \gamma_n)_{n=0}^N$, а полный капитал портфеля π – через

$$X_n = \beta_n B_n + \gamma_n S_n + g_n \quad (P \text{ – п.н.}). \quad (3)$$

Теорема 1. Пусть задан произвольный WDSB.

Рассмотрим портфель $\pi = (\mathbb{C}_n, \gamma_n)_{n=0}^N$ ценных бумаг с капиталом (3), где g_n – $\mathbb{C}_n^N$ -адаптированная последовательность случайных величин (с.в.). Пусть f_n – произвольная $\mathbb{C}_n^N$ -предсказуемая последовательность с.в. Тогда следующие условия равносильны:

а) $X_{n-1} + f_n = \beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1}$, $Q^{\mathbb{C}^{+1}}$ – п.н., $\forall n = 1, 2, \dots, N$ (вид финансирования портфеля);

б) $B_{n-1} \Delta \beta_n + S_{n-1} \Delta \gamma_n = f_n + g_{n-1}$, $Q^{\mathbb{C}^{+1}}$ – п.н., $\forall n = 1, 2, \dots, N$ (балансовое соотношение);

в) $\Delta X_n = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n + f_n + g_n$, $Q^{\mathbb{C}^{+1}}$ – п.н., $\forall n = 1, 2, \dots, N$ (формула приращения капитала);

г) $\Delta \left(\frac{X_n}{B_n} \right) = \gamma_n \Delta \left(\frac{S_n}{B_n} \right) + \frac{f_n}{B_{n-1}} + \frac{g_n}{B_n}$, $Q^{\mathbb{C}^{+1}}$ – п.н., $\forall n = 1, 2, \dots, N$ (формула приращения дисконтированного капитала).

Доказательство. а) $\Rightarrow$ б). Из равенства а) вычтем соотношение (3), записанное для момента времени $n-1$ (ясно, что оба эти равенства выполняются $Q^{\mathbb{C}^{+1}}$ почти наверное (п.н.)):

$$\begin{cases} X_{n-1} + f_n = \beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1} \\ X_{n-1} = \beta_{n-1} B_{n-1} + \gamma_{n-1} S_{n-1} + g_{n-1} \\ f_n = B_{n-1} \Delta \beta_n + S_{n-1} \Delta \gamma_n - g_{n-1} \end{cases}$$

(последнее равенство справедливо $Q^{\mathbb{C}^{+1}}$ – п.н.). Получили балансовое соотношение б). б) $\Rightarrow$ в). Применяя соотношение (3), имеем ($Q^{\mathbb{C}^{+1}}$ – п.н.):

$$\begin{aligned} \Delta X_n &= X_n - X_{n-1} = \beta_n B_n + \gamma_n S_n + g_n - \beta_{n-1} \times \\ &\times B_{n-1} - \gamma_{n-1} S_{n-1} - g_{n-1} = \beta_n B_n - \beta_{n-1} B_{n-1} + \beta_n \times \\ &\times B_{n-1} - \beta_{n-1} B_{n-1} + \gamma_n S_n - \gamma_{n-1} S_{n-1} + \gamma_n S_{n-1} - \\ &- \gamma_{n-1} S_{n-1} + g_n - g_{n-1} = (\beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n) + \\ &+ (\mathbb{C}_{n-1} \Delta \beta_n + S_{n-1} \Delta \gamma_n) - g_n + g_{n-1}. \end{aligned}$$

Применяя ко второй скобке балансовое соотношение б) (которое верно $Q^{\mathbb{C}^{+1}}$ – п.н., и следовательно, по определению 1, $Q^{\mathbb{C}^{+1}}$ – п.н.), получаем нужный вид в) приращения капитала.

в) $\Rightarrow$ г). Преобразуем приращение дисконтированного капитала:

$$\Delta \left(\frac{X_n}{B_n} \right) = \frac{X_n}{B_n} - \frac{X_{n-1}}{B_{n-1}} = \frac{X_n}{B_n} - \frac{X_n}{B_{n-1}} + \frac{X_n}{B_{n-1}} - \frac{X_{n-1}}{B_{n-1}} =$$

$$= -\frac{X_n \Delta B_n}{B_{n-1} B_n} + \frac{\Delta X_n}{B_{n-1}} = \frac{1}{B_{n-1}} \left(-\frac{X_n}{B_n} \Delta B_n + \Delta X_n \right).$$

Заменяя в скобке X_n выражением (3), а ΔX_n – в соответствии с формулой в), получаем

$$\Delta \left(\frac{X_n}{B_n} \right) = \frac{1}{B_{n-1}} \left(-\frac{\beta_n B_n + \gamma_n S_n + g_n}{B_n} \Delta B_n + \beta_n \Delta B_n + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +\gamma_n \Delta S_n + f_n + g_n \succ \frac{1}{B_{n-1}} \prec \beta_n \Delta B_n - \\
& - \frac{\gamma_n S_n \Delta B_n}{B_n} - \frac{g_n \Delta B_n}{B_n} + \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n + f_n + g_n \Big) = \\
& = \gamma_n \left(\frac{S_n (B_{n-1} - B_n)}{B_{n-1} B_n} + \frac{S_n - S_{n-1}}{B_{n-1}} \right) + \frac{f_n}{B_{n-1}} - \frac{g_n}{B_{n-1}} + \\
& + \frac{g_n}{B_n} + \frac{g_n}{B_{n-1}} = \gamma_n \left(\frac{S_n}{B_n} - \frac{S_n}{B_{n-1}} + \frac{S_n}{B_{n-1}} - \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}} \right) + \\
& + \frac{f_n}{B_{n-1}} + \frac{g_n}{B_n} = \gamma_n \Delta \left(\frac{S_n}{B_n} \right) + \frac{f_n}{B_{n-1}} + \frac{g_n}{B_n},
\end{aligned}$$

что и требовалось. Ясно, что это равенство выполняется $Q^{(n)} \prec$ – п.н. $\gamma \Rightarrow a$). Расписывая формулу γ) и затем применяя (3), имеем

$$\begin{aligned}
& \frac{X_n}{B_n} - \frac{X_{n-1}}{B_{n-1}} = \gamma_n \left(\frac{S_n}{B_n} - \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}} \right) + \frac{f_n}{B_{n-1}} + \frac{g_n}{B_n} \Rightarrow \\
& \Rightarrow \frac{\beta_n B_n + \gamma_n S_n + g_n}{B_n} - \frac{X_{n-1}}{B_{n-1}} = \gamma_n \left(\frac{S_n}{B_n} - \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{f_n}{B_{n-1}} + \frac{g_n}{B_n} \Rightarrow \beta_n + \gamma_n \frac{S_n}{B_n} + \frac{g_n}{B_n} - \frac{X_{n-1}}{B_{n-1}} = \gamma_n \frac{S_n}{B_n} - \\
& - \gamma_n \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}} + \frac{f_n}{B_{n-1}} + \frac{g_n}{B_n} \Rightarrow \beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1} = X_{n-1} + f_n.
\end{aligned}$$

Ясно, что последнее равенство выполняется $Q_{n-1}^{(n)} \prec$ – п.н. В силу условия (2) последнее равенство выполняется $Q^{(n-1)}$ – п.н. Доказательство завершено.

Замечание. Из доказательства теоремы видно, что импликации $a) \Rightarrow b)$, $b) \Rightarrow v)$ и $v) \Rightarrow \gamma)$ выполняются для произвольного DSB, и лишь импликация $\gamma) \Rightarrow a)$ требует, чтобы деформируемый стохастический базис был слабым.

Результаты данной работы кратко изложены в [1].

Литература

1. Назарько О.В. // ОПМ. 2006. Т. 13. Вып. 6. С. 1038–1039.