

УДК 656

## КИНЕМАТИКА КОЛЕСНЫХ ПАР ВАГОННОЙ ТЕЛЕЖКИ

© 2013 г.

**Ю.Л. Панов, А.Ю. Панов**

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

fam@nntu.nnov.ru

Поступила в редакцию 16.04.2013

На основе изучения сложного движения механической системы исследуется кинематика колесных пар вагонной тележки в кривых железнодорожного пути. Определены векторы угловых скоростей вращения точек и положение мгновенно-винтовых осей колесных пар. Показано появление процесса скольжения как отрицательного явления в движении колес вагонной тележки.

**Ключевые слова:** колесная пара, вагонная тележка, кривая железнодорожного пути, мгновенная винтовая ось.

В соответствии с конструкцией железнодорожного пути колесные пары вагонной тележки совершают три различных вида движений. На прямолинейном участке колесные пары совершают плоское движение, при котором оси колесной пары не изменяют своего направления движения в пространстве. Это движение состоит из поступательного движения осей колесных пар и вращательного движения вокруг этих осей. Составным, или абсолютным, движением относительно Земли будет вращательное движение вокруг мгновенных осей колесных пар. Мгновенная ось каждой пары проходит через точки контактов кругов катания колес с рельсами. Плоское движение хорошо изучено в соответствующих разделах теоретической механики. Другим видом движения колесных пар является движение по переходной кривой, которая представляет собой участок пути, соединяющий прямолинейный участок и круговую кривую постоянного радиуса. Переходная кривая имеет переменный радиус и изменение положения центра кривизны железнодорожного пути в каждой его точке. В каждый момент времени колесные пары как твердые тела вращаются вокруг собственных осей и вокруг вертикальной оси, проходящей через центр кривизны пути, причем последний непрерывно изменяет свое положение в пространстве. Третий вид движения колесных пар представляет движение по железнодорожному пути, проходящему по дуге окружности, то есть по круговой кривой. В этом случае центр кривизны не изменяет своего положения.

В каждом виде движения вагонная тележка может перемещаться равномерно, ускоренно или с замедлением. В данной работе исследуется кинематика колесных пар при равномерном движении тележки. Сначала исследуем движе-

ние тележки по круговой кривой железнодорожного пути. В существующей литературе по железнодорожному транспорту исследование кинематики и динамики вагонной тележки основывается на модели, представляющей тележку отрезком прямой, движущейся в зазоре между гребнями колесных пар и рельсовой колеи (рис. 1, 2) [1].

На рисунках 1, 2 обозначено:  $2a$  – база экипажа,  $R$  – радиус кривой,  $\alpha$  – угол набегания экипажа на наружный рельс,  $2\Delta$  – ширина колеи, составленной из двух концентрических окружностей,  $v$  – скорость экипажа,  $O_1$  – центр кривой,  $\delta\varphi$  – угол поворота экипажа,  $x$  – расстояние от передней оси колесной пары до полюса поворота  $O$  на оси экипажа  $AB$ .

Используемые соотношения угловых и линейных скоростей включают скорость экипажа, значение которой неопределено при движении по криволинейному железнодорожному пути. Представление вагонной тележки отрезком прямой не учитывает пространственных размеров вагонной тележки и колесных пар и истинного их движения, что приводит к большим ошибкам в расчетах. На неточность этого метода указывает работа [2] ввиду существенной трудности определения мгновенных осей колесных пар.

В данной статье дается точное решение задачи движения колесных пар, приводится метод определения мгновенно-винтовых осей колесных пар и получены формулы скоростей скольжения пар в разных точках контактов колесных пар и рельсов.

Движение колесной пары на криволинейных участках представляет собой сумму двух вращательных движений – вращений вокруг собственной оси колесной пары и вокруг вертикаль-

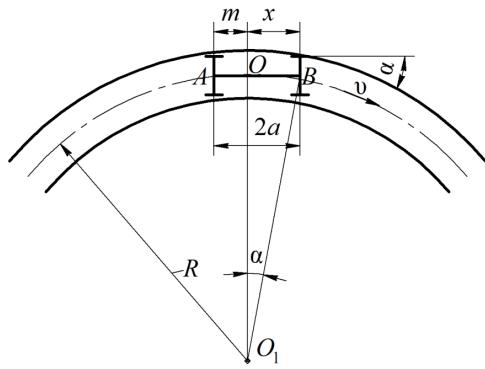


Рис. 1. Кинематическая схема вращения экипажа вокруг центра кривой и вокруг полюса поворота при его вписывании в круговую кривую

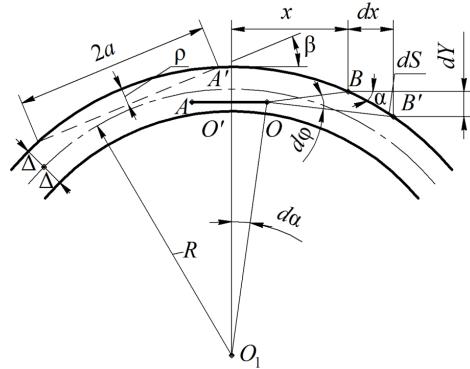


Рис. 2. Кинематическая схема изменения положения экипажа в колее, представленного в виде отрезка, движущегося между двумя концентрическими окружностями (способ Руа), при вписывании его в кривую

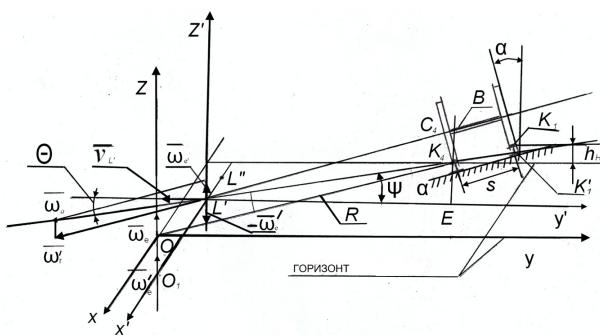


Рис. 3. Мгновенная винтовая ось

ной оси, проходящей через центр кривой железнодорожного пути. Эти оси представляют собой скрещивающиеся прямые, вращение вокруг которых является общим случаем движения тела [3]. Суммарным, или абсолютным, движением колесных пар относительно Земли (рельсов) будет мгновенно-винтовое движение колесных пар. Решаем задачу в системе отсчета  $Oxyz$ , связанной с Землей (рис. 3).

Вращение колесных пар относительно оси  $z$  представляет переносное движение, вращение пар вокруг собственных осей – относительное движение. При движении вагонной тележки в кривых колеса каждой колесной пары проходят разные расстояния, так как колеса жестко посажены на ось. Такая конструкция пар неизбежно приводит к продольному скольжению одного из колес пары. В монографии [4] установлено наличие силы трения на гребне переднего внешнего колеса пары. Эта сила направлена вертикально вверх и уменьшает давление колеса на рельс. Там же установлено наличие силы трения на гребне внутреннего колеса хвостовой пары, направленной вертикально вниз и увеличивающей давление на рельс. В соответствии с законами трения внутренние колеса оказывают большее нормальное давление на рельс.

Введем следующие обозначения. Радиус линии катания внутреннего рельса обозначим  $R = OK_4$ . Радиус колес по кругу катания обозначим  $r$ . Относительная угловая скорость колесных пар будет  $\bar{\omega}_r$ , переносная угловая скорость пар –  $\bar{\omega}_e$ , а абсолютная угловая скорость –  $\bar{\omega}_a$ . Скорость центра круга катания внутреннего колеса обозначим  $\vec{V}$ , а расстояние между осями колесных пар –  $2a$ .

Найдем абсолютное движение или, что то же, движение относительно рельсов передней колесной пары вагонной тележки и распределение абсолютных линейных скоростей. Для этого продлим геометрическую ось передней колесной пары и построим общий перпендикуляр к оси  $Oz$  и геометрической оси колесной пары. Это будет прямая, проходящая через точки  $O_1$  и  $L'$ . Отрезок  $O_1L' = a$ , равный половине расстояния между колесными парами вагонной тележки, является кратчайшим расстоянием между осью  $Oz$  и геометрической осью колесной пары; точка  $L'$  принимается за полюс. Выполним построение векторов угловой скорости переносного вращения  $\bar{\omega}_e$  и угловой скорости относительного вращения  $\bar{\omega}_r$ . Абсолютная уг-

ловая скорость вычисляется по теореме сложения угловых скоростей:

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r. \quad (1)$$

Модули угловых скоростей  $\vec{\omega}_e$  и  $\vec{\omega}_r$  определяются следующим образом. Машинист локомотива контролирует скорость движения  $V$  по тахометру, датчик которого установлен на оси колесной пары. Следовательно, скорость  $V$  – это скорость центра круга катания колеса при условии отсутствия продольного скольжения. Из соотношения  $V = \omega_r r$  находится величина угловой скорости относительного вращения

$$\omega_r = \frac{V}{r}. \quad (2)$$

Центр круга катания колеса  $C_4$  движется по дуге окружности радиуса  $R - rs\sin\alpha$  с центром  $O$ . Тогда из формулы  $V_e = \omega_e(R - rs\sin\alpha)$  определяется величина угловой скорости переносного вращения

$$\omega_e = \frac{V_e}{R - rs\sin\alpha}.$$

Величина  $rs\sin\alpha \ll R$ , следовательно,

$$\omega_e = \frac{V_e}{r}. \quad (3)$$

Из рисунка 4 можно получить следующее кинематическое соотношение:

$$V = V_e \cos\beta, \quad (4)$$

где  $\beta$  – угол между проекцией на горизонтальную плоскость геометрической оси колесной пары и радиусом внутреннего рельса (рис. 4).

Переносная скорость вычисляется по формуле

$$V_e = \frac{V}{\cos\beta} = \frac{VR}{\sqrt{R^2 - a^2}}. \quad (5)$$

Тогда выражение (3) приобретает вид

$$\omega_e = \frac{V}{\sqrt{R^2 - a^2}}. \quad (6)$$

Формула (1) справедлива в случае, если векторы угловых скоростей  $\vec{\omega}_e$  и  $\vec{\omega}_r$  пересекаются в общей точке. В случае вагонной тележки в кривой железнодорожного пути такой точки не существует. Применяя аналог теоремы Пуансо к кинематике сложного движения, перенесем вектор  $\vec{\omega}_e$  в точку  $L'$ , одновременно прикладывая в этой же точке два равных противоположно направленных вектора  $\vec{\omega}'_e$  и  $-\vec{\omega}'_e$ , соблюдая условие  $\vec{\omega}'_e = \vec{\omega}_e$ . Движение с векторами  $\vec{\omega}'_e$  и  $-\vec{\omega}'_e$ , образующими пару вращения, эквивалентно поступательному движению со скоростью

$$\vec{V}_{L'} = \vec{\omega}_e \times O_1 \vec{L}', \quad (7)$$

величина которой

$$V_{L'} = \omega_e a = \frac{V}{\sqrt{R^2 - a^2}} a. \quad (8)$$

В результате приведения вектора  $\vec{\omega}_e$  к полюсу  $L'$  получаем возможность сложения векторов  $\vec{\omega}'_e$  и  $\vec{\omega}_r$  и определения величины абсолютной угловой скорости  $\vec{\omega}_a$

$$\omega_a = \sqrt{\omega_e^2 + \omega_r^2 + 2\omega_e \omega_r \cos(\vec{\omega}_e \wedge \vec{\omega}_r)}. \quad (9)$$

Из рисунка 1 очевидно, что  $(\vec{\omega}_e \wedge \vec{\omega}_r) = \frac{\pi}{2} + \alpha$ ,

где  $\alpha$  – угол возвышения наружного рельса над внутренним в кривой железнодорожного пути.

Тогда выражение (9) принимает вид

$$\omega_a = \sqrt{\omega_e^2 + \omega_r^2 - 2\omega_e \omega_r \sin\alpha}, \quad (10)$$

где величины угловых скоростей  $\omega_e$  и  $\omega_r$  вычисляются по формулам (2) и (6).

Из выражений (2), (6) и (10) следует, что величина абсолютной угловой скорости вагонной тележки определяется скоростью поезда и геометрией железнодорожного пути.

Найдем направление вектора абсолютной угловой скорости  $\vec{\omega}_a$ . Он расположен в вертикальной плоскости, проходящей через геометрическую ось колесной пары, и образует с плоскостью горизонта угол  $\theta$ . Проецируем векторное равенство (1) на горизонтальную плоскость и, применяя теорему о проекции результирующего вектора, получаем

$$\omega_a \cos\theta = \omega_r \cos\alpha, \quad (11)$$

откуда

$$\cos\theta = \frac{\omega_r}{\omega_a} \cos\alpha. \quad (12)$$

Покажем, что вектор  $\vec{\omega}_a$  направлен по прямой, проходящей через точку контакта внутреннего колеса с рельсом  $K_4$  и полюс  $L'$ . Используя рисунок 4, составим уравнения проекций на горизонтальное и вертикальное направления для векторного равенства (1):

$$\begin{aligned} \omega_a \cos\theta &= \omega_r \cos\alpha, \\ \omega_a \sin\theta &= \omega_r \sin\alpha - \omega_e. \end{aligned} \quad (13)$$

Разделив второе равенство на первое, получаем

$$\tan\theta = \tan\alpha - \frac{\omega_e}{\omega_r \cos\alpha} = \tan\alpha - \frac{r}{\cos\alpha \sqrt{R^2 - a^2}}. \quad (14)$$

Из рисунка (4) также получаем

$$\tan\psi = \frac{K_4 E}{L'E} = \frac{BE - BK_4}{L'E} = \frac{L'E \tan\alpha}{L'E} - \frac{r}{L'E \cos\alpha}, \quad (15)$$

или

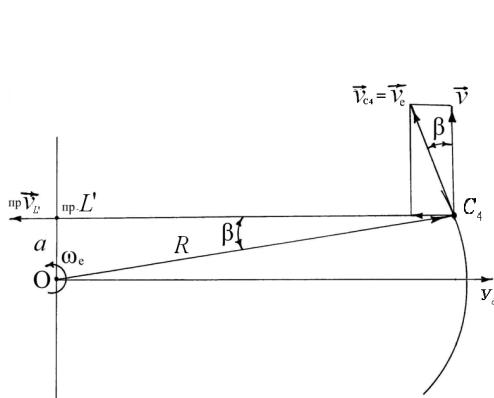


Рис. 4. Векторная схема линейных скоростей в центре круга катания внешнего заднего колеса

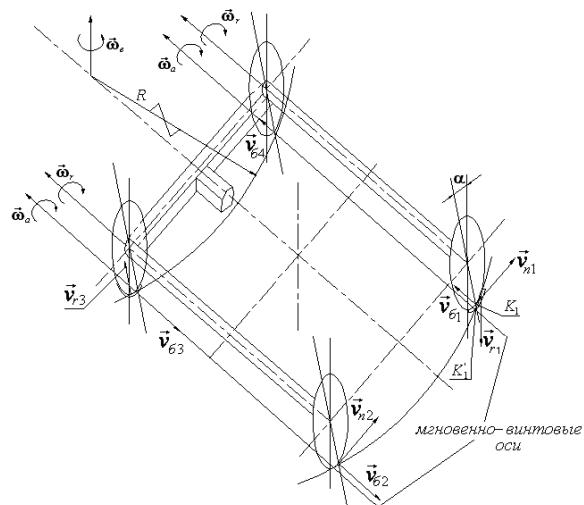


Рис. 5. Скорости скольжения колес вагонной тележки

$$\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\alpha - \frac{r}{\cos\alpha\sqrt{R^2 - a^2}}. \quad (16)$$

Сравнение (14) и (16) показывает, что вектор абсолютной угловой скорости направлен по линии  $K_4 L'$ . Из выражения (8) и рисунка 4 следует, что вектор скорости  $\vec{V}_L$  образует с прямой  $K_4 L'$  угол  $\theta$ . Это означает, что линия  $K_4 L'$  не является осью мгновенно-винтового движения.

Определим положение мгновенно-винтовой оси колесной пары. Для этого выполним разложение вектора  $\vec{V}_{L'}$  на составляющие  $\vec{V}_{L'} \cos\theta$ , направленной по линии  $K_4 L'$ , и  $\vec{V}_{L'} \sin\theta$ , направленной перпендикулярно этой прямой. Чтобы погасить скорость  $V_{L'} \sin\theta$ , перенесем полюс в точку  $L''$ , лежащую на общем перпендикуляре к оси  $Oz$  и геометрической оси колесной пары. Приложим в новом полюсе векторы  $\vec{\omega}'_a$  и  $-\vec{\omega}'_a$ . Образовавшаяся пара вращения погасит скорость  $\vec{V}_{L'} \sin\theta$ . Переход к полюсу  $L''$  является стандартной операцией и на рисунке 4 не демонстрируется. В результате получим мгновенно-винтовое движение колесной пары с угловой скоростью  $\vec{\omega}_a$ , скользящей вдоль мгновенной оси со скоростью поперечного скольжения

$$V_s = V_L \cos \theta = \omega_e a \cos \theta . \quad (17)$$

Ось мгновенно-винтового движения проходит через точку  $L''$  параллельно  $K_4 L'$ . Положение точки  $L''$  определяется по формуле

$$L'L'' = \frac{\omega_e a}{\Omega} \sin \theta . \quad (18)$$

Из соотношений (3), (9) и (18) следует

$$L'L'' \ll a.$$

Это означает, что мгновенно-винтовая ось колесной пары расположена вблизи отрезка  $K_4L'$  и в инженерных расчетах отрезком  $L'L''$  можно пренебречь, считая  $\sin\theta \approx 0, \cos\theta \approx 1$ . В этом случае отрезок  $K_4L'$  принимается за мгновенно-винтовую ось колесной пары. Если на внешнем колесе будет отсутствовать продольное скольжение, что возможно при большой скорости экипажа, то мгновенно-винтовая ось колесной пары будет совпадать с линией  $K_1L'$ .

Полученные результаты будут справедливы также и для задней колесной пары, изменяется только направление скорости поперечного скольжения  $\vec{V}_s$  – она будет направлена от центра круговой кривой железнодорожного пути.

Из анализа кинематики колесных пар можно заключить, что каждая колесная пара вагонной тележки имеет три точки контакта с рельсами. В двух из них движение происходит со скольжением, причем в точках контакта кругов катания с рельсами существует два вида скольжения — продольное и боковое, или поперечное (рис. 5).

Найдем скорости скольжения в различных точках контактов колес с рельсами для режима отсутствия продольного скольжения внутренних колес вагонной тележки.

Скорости продольного скольжения внешних колес направлены по касательным к линиям катания по ходу движения вагонной тележки и определяются по формуле (рис. 3, 4)

$$V_{n_1} = V_{n_2} = \omega_a k_1 k_1' = \omega_a s \sin(\alpha - \theta) = \omega_a s \frac{r}{\sqrt{R^2 - a^2}}. \quad (19)$$

Таблица

Исходные данные			
1	Скорость поезда	$V$	80 км/час, или 22.2 м/с
2	Радиус круговой кривой железнодорожного пути	$R$	600 м
3	Диаметр колес вагонной тележки	$D = 2r$	0.950 м
4	Ширина колеи железнодорожного пути	$S$	1.524 м
5	Возвышение наружного рельса	$h_h$	0.11 м
6	Расстояние между осями колесных пар вагонной тележки	$2a$	1.80 м
7	Хорда сегмента гребня колеса, «отсекаемого» головкой рельса	$2l$	0.340 м
Вычисление			
№№	Наименование величин	Формула	Численное значение
1	Угловая скорость относительного вращения колес	$\omega_r = \frac{V}{r}$	46.74 рад/с
2	Угловая скорость переносного вращения колес	$\omega_e = \frac{V}{\sqrt{R^2 - a^2}}$	0.0369 рад/с
3	Абсолютная угловая скорость колес	$\omega_a = \sqrt{\omega_e^2 + \omega_r^2 - 2\omega_e\omega_r \sin\alpha}$	46.73 рад/с
4	Скорости бокового скольжения колес вагонной тележки	$V_{\delta_{1-4}} = \omega_a \cos\theta$	0.0333 м/с
5	Время одного оборота колеса	$t = \frac{2\pi r}{V}$	0.1344 с
6	Боковое скольжение за один оборот колеса	$s_\delta = V_{\delta_{1-4}} t$	4.45 мм
7	Скорости продольного скольжения внешних колес	$V_{n_{1,2}} = \omega_a s \frac{r}{\sqrt{R^2 - a^2}}$	0.0566 м/с
8	Продольное скольжение за один оборот колеса	$s_{n_{1,2}} = V_{n_{1,2}} t$	7.61 мм
9	Скорость скольжения гребней внешних колес по боковой поверхности рельса	$V_{e_{1,3}} = \omega_a l$	7.95 м/с
10	Скольжение гребней колес за один оборот колеса	$s_{e_{1,3}} = V_{e_{1,3}} t$	1.07 м

Скорости бокового, или поперечного, скольжения направлены по мгновенно-винтовой оси вагонной тележки,

$$V_{\delta_{1-4}} = \omega_e \cos\theta, \quad (20)$$

причем скорости  $\vec{V}_{\delta_1}$  и  $\vec{V}_{\delta_4}$  направлены перпендикулярно касательной к рельсу в точках контакта к центру круговой кривой, а скорости  $\vec{V}_{\delta_2}$  и  $\vec{V}_{\delta_3}$  – от центра круговой кривой.

Скорость скольжения гребня переднего внешнего колеса по боковой поверхности рельса направлена вертикально вниз и вычисляется по формуле

$$V_{e_1} = \omega_a l = V_{r_3}, \quad (21)$$

где  $l$  – половина хорды сегмента гребня колеса, «отсекаемого» головкой рельса, она определяется по формуле [5]

$$l = \sqrt{2h_1 r - h_1^2}, \quad (22)$$

где  $h_1$  – высота гребня колеса,  $r$  – радиус круга катания.

Вертикальное направление скорости  $\vec{V}_{e_1}$  подтверждается экспериментально в работе [2], в которой указывается на появление вертикальных полос на боковых поверхностях рельсов, возникающих в результате действия сил трения гребней колес о рельсы. При контакте гребня заднего внутреннего колеса с боковой поверхностью рельсов возникает скорость скольжения  $\vec{V}_{e_3}$ , направленная вертикально вверх, величина которой определяется по формуле (21). При контакте внутренних колес с рельсами продольное скольжение отсутствует. Векторная схема угловых скоростей и скоростей скольжения изображена на рисунке 5. Найдем численные величины скоростей скольжения, а также положение мгновенно-винтовых осей колесных пар (табл.).

Рассмотрим движение колесных пар в переходной кривой. Геометрическое уравнение переходной кривой представляет клоноиду с радиусом кривизны  $\rho$ :

$$\rho = \frac{A^2}{S_n},$$

где  $S_n$  – дуговая координата,  $A$  – параметр клоноиды, зависящий от радиуса круговой кривой  $R$  и длины переходной кривой  $l$ ,

$$A = \sqrt{Rl}.$$

Тогда при постоянной скорости экипажа имеем

$$\rho = \frac{Rl}{S_n}$$

или

$$\rho = \frac{Rl}{Vt}. \quad (23)$$

В выражении (23) началом измерения  $S_n$  является начало переходной кривой, причем изменение  $S_n$  происходит по внутреннему рельсу.

При движении по переходной кривой возвышение наружного рельса над внутренним  $h_n$  также изменяется по величине. Если возвышение  $h_n$  нарастает равномерно, то

$$h_n = \frac{S_n}{l} h_n = \frac{h_n}{l} Vt. \quad (24)$$

В выражениях угловых скоростей и скоростей скольжения вместо  $R$  принимается  $\rho$ , а

$$\sin\alpha = \frac{h_n}{S} = \frac{h_n}{lS} Vt. \quad (25)$$

Из анализа кинематики колесных пар вагонной тележки следует, что колеса пар при движении в кривых неизбежно переходят в режим скольжения, что приводит к энергетическим и материальным потерям. В монографии [4] показано, что расход энергии при движении в кри-

вой со скольжением в 4–5 раз больше, чем при движении без скольжения. Вертикальная сила трения на гребне переднего внешнего колеса является причиной схода колеса с рельса. Именно этим объясняется сход порожних вагонов, когда весовая нагрузка на колесо меньше силы трения на его гребне. Силы трения скольжения увеличивают износ как рельсов, так и колес. Особенно сильно изнашивается боковая сторона внешнего рельса вследствие появления вертикальной скорости скольжения внешнего колеса. В работе [4] также установлено возникновение боковой силы, действующей со стороны гребня переднего внешнего колеса на рельс. Величина этой силы соизмерима с величиной тяги на колесе локомотива, и эта сила может вызвать боковой выброс рельса. Все указанные негативные явления можно устраниć конструктивными мерами. Одни из возможных конструктивных решений получены и защищены патентами [6, 7].

#### Список литературы

1. Вериго М.Ф., Коган А.Я. Взаимодействие пути и подвижного состава. М.: Транспорт, 1986. 559 с.
2. Жаров И.А., Комаровский И.А., Захаров С.М. Моделирование изнашивания пары гребень колеса – боковая поверхность рельса в кривых малого радиуса // Вестник ВНИИЖТ. 1998. № 2. С. 15–18.
3. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. Л.: Наука, ГРФМЛ. Т. 1. 1982. 352 с.
4. Панов Ю.Л., Панов А.Ю. Относительное движение в механике. Инженерные задачи. Н. Новгород: Изд-во НГТУ им. Р.Е. Алексеева, 2008. 143 с.
5. Бронштейн И.Н., Семеняев К.А. Справочник по математике. М.: Наука, ГРФМЛ, 1986. 544 с.
6. Панов А.Ю., Панов Р.А. Патент на полезную модель № 66279 «Колесная пара железнодорожного вагона». Опубликовано 10.09.2007. Бюл. № 25.
7. Панов А.Ю., Панов Р.А. Патент на полезную модель № 73296 «Тележка железнодорожного вагона». Опубликовано 20.05.2008. Бюл. № 14.

#### KINEMATICS OF BOGIE WHEELSETS

**Yu.L. Panov, A.Yu. Panov**

The kinematics of bogie wheelsets in railway curves is studied by analyzing a complex motion of the mechanical system. Angular velocity vectors of the rotation points and the positions of the instantaneous screw axes of the wheelsets are determined. The occurrence of the sliding process as a negative phenomenon in the bogie wheelset motion is shown.

*Keywords:* wheelset, bogie, railway curve, instantaneous screw axis.