Модель кредитов с фиксированной и корректируемой процентной ставкой

Наталуха Игорь Анатольевич,
доктор физико-математических наук, профессор
Кисловодского института экономики и права;
in63@mail.ru

Аннотация: Построена модель равновесия на кредитном рынке с учетом влияния самостоятельного выбора заемщиками кредитов с фиксированной и корректируемой процентной ставкой.

Ключевые слова: моделирование, кредитный рынок, равновесие, процентная ставка

Abstract. The model of equilibrium at the credit market taking account of the influence of self-choices by borrowers of credits with fixed and flexible interest rate is suggested.

Keywords. modeling, credit market, equilibrium, interest rate

Экономико-математическая модель

В условиях современной России кредитование становится основным источником дохода для большинства банков. Однако увеличение объемов кредитования сопровождается, как правило, ростом дебиторской задолженности. Это выдвигает в ряд фундаментальных задач кредитного учреждения эффективное управление кредитным портфелем, определение оптимальной процентной ставки кредитования, а также управление процентным и кредитным риском [1-3]. В предлагаемой модели заемщики различаются вероятностью досрочной предоплаты в конце первого периода двухпериодического контракта с фиксированной процентной ставкой. Модель кредитного контракта с фиксированной процентной ставкой базируется на следующих предположениях. Контракт состоит из двух периодов. Кредитор, предлагая контракты с фиксированной процентной ставкой (КФС), занимает средства на рынке по среднерыночной процентной ставке. Среднерыночные процентные ставки в периоды 0 и 1 обозначим r_0 и r_1. Первоначальная ставка r_0 известна кредитору в период 0, тогда как ставка во втором периоде r_1 является случайной величиной, плотность распределения которой известна. А именно,

$$r_1 = r_0 + \varepsilon , \tag{1}$$

где ε - случайная величина с плотностью распределения $f(\varepsilon)$ и математическим ожиданием $\mu > 0$. Кредитную процентную ставку для КФС в период 0 обозначим *i*. Предполагаем, что кредитор характеризуется нейтральным отношением к риску и дисконтирует прибыль периода 1 дисконтным фактором $\theta < 1$. Кроме того, кредитор предполагает, что некоторая часть его заемщиков расторгнет контракты с ним в конце периода 0 путем предоплаты. Обозначим ожидаемую долю этих заемщиков $\alpha < 1$. Тогда ожидаемая дисконтированная величина прибыли по контрактам, заключенным в период 0, в расчете на рубль займа может быть записана следующим образом:

$$(1-\alpha)\left[(i-r_0)+\theta \int_{-\infty}^{\infty}(i-[r_0+\varepsilon])f(\varepsilon)d\varepsilon\right]+\alpha(i-r_0). \tag{2}$$

Заметим, что прибыль в расчете на рубль займа от заемщиков, предоплативших контракт в период 0, составляет $i - r_0$, а прибыль от заемщиков, не расторгнувших контракт, содержит случайную компоненту (реализуемую в период 1), зависящую от разности между i и r_1. Полагая выражение (2) равным нулю и разрешая его относительно i, получаем процентную ставку по КФС (при условии, что прибыль кредитора равна нулю) в следующем виде:

$$i = r_0 + \frac{(1-\alpha)\theta}{1+(1-\alpha)\theta}\mu \equiv r_0 + b(\alpha)\mu , \tag{3}$$

где $\mu = \int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon f(\varepsilon)d\varepsilon$ и $b(\alpha) \equiv \frac{(1-\alpha)\theta}{1+(1-\alpha)\theta} < 1$. Фиксированная процентная ставка, таким образом, равна среднерыночной процентной ставке нулевого периода плюс часть $b(\alpha)$ ожидаемого значения тенденции μ (напомним, что $\mu > 0$).

Важно отметить, что $b(\alpha)$ является убывающей функцией доли заемщиков, предоплативших контракт, α. Это условие приводит к неравенству

$$\frac{\partial i}{\partial \alpha} = b'(\alpha)\mu < 0, \tag{4}$$

которое показывает, что процентная кредитная ставка уменьшается при увеличении доли заемщиков, расторгнувших контракт. Для объяснения этого факта заметим, что из уравнения (3) следует $r_0 < i < r_0 + \mu$, так что кредитная процентная ставка превосходит r_0 и меньше ожидаемого значения r_1 (напомним, что $b(\alpha) < 1$). Доход по кредиту, поэтому положителен в период 0 и отрицателен (по ожидаемой величине) в период 1. В результате, когда α уменьшается и доход по кредиту в период 1 увеличивается, кредитная ставка должна увеличиваться для сохранения нулевой ожидаемой прибыли кредитора.

Из уравнения следует, что отрицательные μ не имеют экономического смысла: в этом случае имеет место неравенство $i < r_0$, означающее, что кредитная процентная ставка меньше среднерыночной.

Для постановки задачи выбора типа кредита заемщиком предположим, что каждый заемщик имеет доступ, кроме КФС, к кредитным контрактам с корректируемой процентной ставкой (ККС). Заемщики предполагаются идентичными во всех отношениях, кроме вероятности досрочной предоплаты. Обозначим через ρ вероятность того, что заемщик расторгнет КФС в конце периода 0; будем предполагать, что разные заемщики характеризуется различными ρ. Обозначим через y общий уровень дохода заемщиков, который предполагаем одинаковым в обоих периодах. Доход заемщика за вычетом платежей по кредиту равен $y - i$ в обоих периодах при КФС и равен $y - r_0$ и $y - r_1$ в нулевом и первом периодах при контракте с корректируемой процентной ставкой. Обозначим $V(\cdot)$ общую функцию полезности Ньюмена - Моргенштерна заемщиков. Ожидаемая полезность заемщиков, соответствующая КФС, записывается в виде

$$(1-\rho)[V(y-i)+\delta V(y-i)]+\rho V(y-i), \tag{5}$$

где δ - общий дисконтный фактор заемщиков. Аналогично, ожидаемая полезность, связанная с контрактом с корректируемой процентной ставкой (ККС) записывается в виде

$$(1-\rho)\left[V(y-r_0)+\delta\int_{-\infty}^{\infty}V(y-[r_0+\varepsilon])f(\varepsilon)d\varepsilon\right]+\rho V(y-r_0) \tag{6}$$

Разность между полезностями (5) и (6) записывается в следующем виде:

$$\Omega=V(y-i)-V(y-r_0)+(1-\rho)\delta\left[V(y-i)-\int_{-\infty}^{\infty}V-(y-[r_0+\varepsilon])f(\varepsilon)d\varepsilon\right]. \tag{7}$$

Первая часть выражения (7) равна разности в период 0 между полезностями, соответствующими контрактам с фиксированной процентной ставкой и корректируемой процентной ставкой. Второе слагаемое представляет собой аналогичную разность ожидаемых полезностей, умноженную на дисконтный фактор и на вероятность того, что платежи в период 1 действительно сделаны. Чтобы упростить Ω, заметим, что ожидаемая полезность первого периода, соответствующая контракту с корректируемой процентной ставкой $\int_{-\infty}^{\infty}V(y-[r_0+\varepsilon])f(\varepsilon)d\varepsilon$ может быть выражена в качестве эквивалентной детерминированной функции, равной ожидаемой величине чистого дохода $y-(r_0+\mu)$ за минусом рисковой премии $R\geq 0$. В результате получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty}V(y-[r_0+\varepsilon])f(\varepsilon)d\varepsilon=V(y-[r_0+\mu]-R). \tag{8}$$

Используя выражение (8) в (7) , приходим к выражению для Ω:

$$\Omega(\rho,i)=V(y-i)-V(y-r_0)+(1-\rho)\delta[V(y-i)-V(y-[r_0+\mu]-R)]. \tag{9}$$

Заметим, что компонента Ω, соответствующая нулевому периоду, которая равна разности первых двух слагаемых в выражении (9), отрицательна при условии, что фиксированная процентная ставка превосходит корректируемую процентную ставку нулевого периода. Напротив, в силу

$$y-i=y-(r_0+b(\alpha)\mu)>y-(r_0+\mu)-R$$

разность между двумя последними членами Ω, соответствующая периоду 1, положительна.

Поскольку разность полезностей в периоды 0 и 1 в (9) имеет противоположные знаки, знак Ω и поэтому направление выбора «контракт с фиксированной процентной ставкой» - «контракт с корректируемой процентной ставкой» не определены для произвольно выбранного заемщика. Некоторые факты, однако, могут быть получены из анализа выражения (9) . Во-первых, для заемщика, который собирается расторгнуть контракт с фиксированной процентной ставкой, Ω отрицательно и контракт с корректируемой процентной ставкой предпочтительнее. Это утверждение следует из оценки Ω при $\rho = 1$: $\Omega(1, i) = V(y - i) - V(y - r_0) < 0$. Во-вторых, поскольку в период 1 разность полезностей Ω положительна, получаем

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \rho} < 0. \tag{10}$$

Поэтому разность полезностей КФС-ККС уменьшается с ростом вероятности досрочной предоплаты заемщика. Имея эти оценки, можно ожидать, что разность полезностей будет положительной для малых значений ρ, так что заемщики, характеризующиеся меньшей вероятностью предоплаты, предпочитают КФС. Для исследования этого вопроса предположим, что заемщик характеризуется нейтральным отношением к риску, что его дисконтный фактор равен дисконтному фактору кредитора $(\delta = \theta)$, и что вероятность расторжения им контракта КФС равна α, т.е. ожидаемой доле заемщиков, расторгнувших в период 0 контракты с кредитором. В этом случае оценка кредитов заемщиком отражает оценку их кредитором, и они для него безразличны. Тем не менее, если $\rho < \alpha$, тогда больший вес приходится на положительную, соответствующую периоду 1 часть Ω, и полная разность полезностей становится положительной, показывая, что КФС является предпочитаемым (обратный вывод возникает при $\rho > \alpha$). Докажем, что аналогичный результат имеет место при неприятии риска заемщиком: если $\delta = \theta$, Ω положительна для всех ρ, удовлетворяющих неравенству $\alpha + \nu < 1$ при некотором $\nu > 0$. Поэтому при неприятии риска заемщиками КФС предпочитается заемщиками со значениями ρ в интервале, расположенном выше α. Аналогичный, результат имеет место при $\delta > \theta$. Для исследования знака выражения (9) при условии неприятия риска заемщиком и $\rho < 1$, заметим, что строгая вогнутость V предполагает выполнение неравенства $V(z) - V(x) < V'(x)(z - x)$ для любых z и x. Используя этот факт и исключая i с использованием (3), получаем, что первые два члена (9) превосходят

$$-b(\alpha)\mu V'(y - [r_0 + b(\alpha)\mu]), \tag{11}$$

в то время как два последние члена превосходят

$$[(1-\rho)\delta([1-b(\alpha)]\mu + R)]V'(y - [r_0 + b(\alpha)\mu]) \tag{12}$$

Следовательно, Ω больше, чем

$$\frac{(1-\rho)\delta(\mu + R)}{1 + (1-\rho)\delta} - b(\alpha)\mu, \tag{13}$$

умноженного на $[1 + (1-\rho)\delta]V'(y - [r_0 + b(\alpha)\mu])$.

В случае, если заемщик и кредитор дисконтируют будущую полезность одинаково ($\delta = \theta$), это условие сводится к $\rho \le \alpha$. Поскольку $\Omega > 0$ тогда справедливо при $\rho = \alpha$, отсюда следует (при условии (10)), что Ω также положительно при значениях ρ, больших α. В более общем виде при $\delta \ge \theta$ Ω положительно для $\rho \le 1 - (1-\alpha)\theta/\delta$. Наконец, поднимая стоимость КФС, увеличение i понижает разность полезностей КФС - ККС. Дифференцируя (9) , получаем

$$\frac{\partial \Omega}{\partial i} = -(1 + [1-\rho]\delta)V'(y - i) < 0. \tag{14}$$

Условия равновесия

Будем предполагать, что имеет место равенство $\delta = \theta$ (заметим, что все результаты сохраняются в более общем случае $\delta \ge \theta$; анализ этой ситуации связан с усложнением чисто математической части и не представляет принципиальных затруднений). Далее, предположим, что заемщики характеризуются различными значениями ρ, заполняющими промежуток [0,1]. Это означает, что для произвольного $\alpha > 0$ найдутся заемщики, предпочитающие КФС (напомним, что любой заемщик с $\rho < \alpha$ принадлежит к этой группе). Обозначим через ρ^* наибольшее значение ρ среди заемщиков, предпочитающих КФС. При данном определении и $\frac{\partial\Omega}{\partial\rho} < 0$ получаем, что пул заемщиков, заключивших КФС, состоит из индивидуумов с ρ, лежащими в интервале $\left[0, \rho^*\right]$. Первое требование равновесия кредитного рынка состоит в том, что заемщик, имеющий значение ρ^*, должен быть безразличен между КФС и ККС. Если это условие не будет иметь место, другие заемщики со значениями ρ, большими ρ^*, войдут в пул заемщиков, заключивших КФС. Условие безразличия записываем в виде

$$\Omega\left(\rho^*, i\right) = 0 \tag{15}$$

Другая существенная характеристика равновесия состоит в том, что ожидаемая кредитором доля заемщиков, предоплативших контракты, которая до настоящего момента считалась заданной, должна быть равна средней вероятности расторжения контракта среди заемщиков, заключивших КФС, которая в свою очередь зависит от расположения ρ^*. Чтобы формализовать соотношение между α и ρ^*, введем плотность распределения вероятностей $g(\rho)$. Тогда средняя вероятность расторжения контракта среди заемщиков, заключивших КФС равна ожидаемому значению ρ при условии, что $\rho \le \rho^*$, определяемому соотношением

$$\frac{\int\limits_0^{\rho^*} \rho g(\rho) d\rho}{\int\limits_0^{\rho^*} g(\rho) d\rho} \equiv h\left(\rho^*\right). \tag{16}$$

Это соотношение может быть подставлено в выражение (3), определяющее ставку КФС как функцию α. В результате получаем уравнение:

$$i = r_0 + b\left(h\left(\rho^*\right)\right)\mu = \Phi\left(\rho^*\right), \tag{17}$$

которое устанавливает соотношение между процентной ставкой КФС и ρ^* при условии равенства нулю прибыли кредитора. Заметим, что поскольку $b'(\alpha) < 0$ и $h'\left(\rho^*\right) > 0$ имеет место неравенство

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \rho^*} = b'h'\left(\rho^*\right)\mu < 0 \tag{18}$$

Увеличение пула заемщиков, заключивших КФС, понижает *i*, увеличивая среднюю вероятность расторжения контракта среди заемщиков. Равновесие кредитного рынка характеризуется уравнениями (15) и (17), которые совместно определяют величины ρ^* и *i*. Эти условия могут быть объединены в единственное условие путем подстановки (17) в (15) :

$$\Omega\left(\rho^*, \Phi\left(\rho^*\right)\right) = 0. \tag{19}$$

Следующий результат устанавливает существование решения уравнения (19).

УТВЕРЖДЕНИЕ. Если заемщики отвергают риск и все значения ρ в интервале [0,1] представлены в популяции, существует по крайней мере одно равновесие ρ^*, удовлетворяющее условию $0 < \rho^* < 1$.

Равновесие иллюстрируется на рис. 1 . В плоскости переменных $\left(\rho^*, i\right)$ показаны кривые, соответствующие уравнениям $i = \Phi\left(\rho^*\right)$ и $\Omega\left(\rho^*, i\right) = 0$.

Наклон кривой Ω определяется соотношением $-\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \rho}\right) \Big/ \left(\frac{\partial \Omega}{\partial i}\right) < 0$ (см. (10),(14)). Отрицательный наклон кривой Ω можно объяснить следующим образом. С увеличением ρ увеличивается относительная привлекательность ККС, поэтому требуется более низкая процентная ставка КФС, чтобы сделать заемщика с критическим значением ρ безразличным между КФС и ККС. Предыдущие результаты предполагают, что кривая Ω пересекает вертикальную ось над кривой Φ и что кривая Ω пересекает вертикальную прямую

$\rho^* = 1$ ниже кривой Φ. Действительно, поскольку $\frac{\partial\Omega}{\partial i} < 0$, области под (над) кривой Ω определяются условием $\Omega > 0$ (<0). Далее, поскольку $\Omega(1, \Phi(1)) < 0$ означает, что условие $\Omega < 0$ имеет место на кривой Φ при $\rho^* = 1$, отсюда следует, что кривая Ω лежит под кривой Φ. Аналогично условие $\Omega(0, \Phi(0)) > 0$ означает, что $\Omega > 0$ имеет место на кривой Φ при $\rho^* = 0$, так что кривая Ω лежит выше кривой Φ.

Равновесие, показанное на рис. 1, устойчиво, поскольку кривая Ω пересекает кривую Φ сверху. Начиная от точки на кривой Φ слева от точки пересечения имеет место неравенство $\Omega > 0$, означающее, что заемщик с критическим значением ρ^* предпочитает КФС. Это означает, что пул заемщиков, заключивших КФС, будет расти при увеличении ρ^*. При фиксированном i увеличение ρ^* (движение вправо в горизонтальном направлении) приводит к пересечению с кривой Ω . Поскольку i сейчас выше соответствующих кривой Φ, прибыль положительна, и i должно уменьшиться, чтобы обеспечить нулевую прибыль. Результирующее движение вниз вновь увеличивает Ω, и процесс повторяется. Поскольку эта серия корректировок сдвигает точку (ρ^*, i) по направлению к точке пересечения кривых, равновесие устойчиво. Неустойчивые точки равновесия также могут существовать, но этот случай требует наличия нескольких точек равновесия. Если кривые на рис. 1 пересекаются три раза, например, то существуют две устойчивых точки равновесия и одна неустойчивая. Действительно если существует несколько точек равновесия, то равновесие с наименьшей величиной i (наибольшей ρ^*) приводит к наиболее высокому благосостоянию. Любое увеличение i понижает ожидаемую полезность заемщиков, заключивших КФС, не изменяя полезность заемщиков, заключивших ККС. Для устойчивости равновесия необходимо выполнение условия $\frac{\partial\Omega/\partial\rho}{\partial\Omega/\partial i} > -b'h'(\rho^*)\mu$,которое показывает, что по абсолютной величине наклон кривой Ω превосходит наклон кривой Φ в точке пересечения.

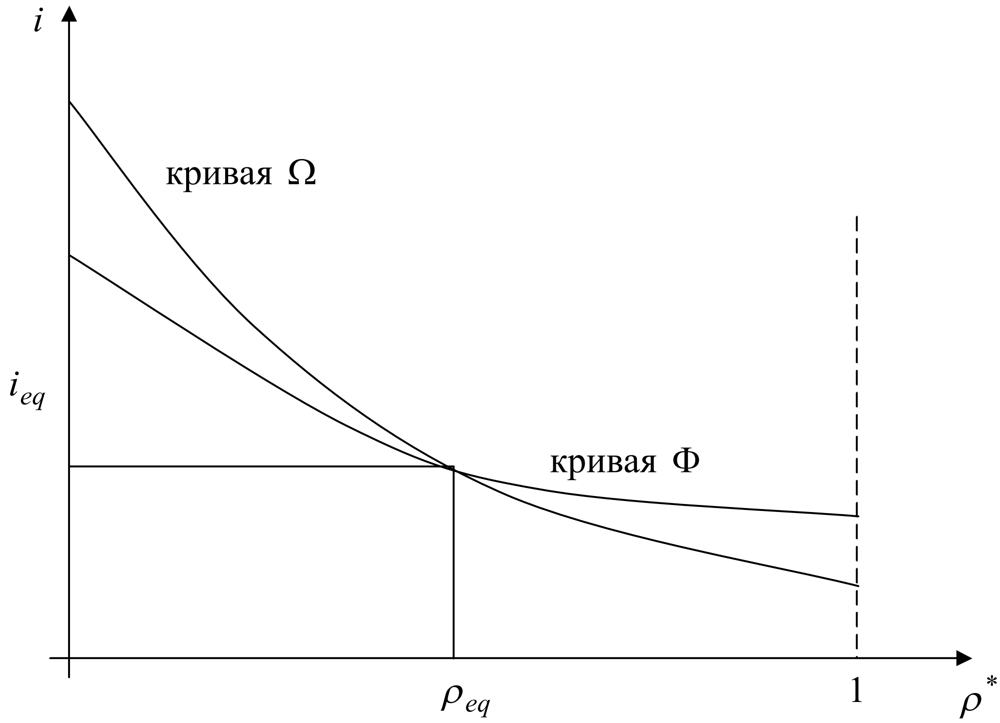

Рис. 1. Равновесие в плоскости $\left(\rho^*, i\right)$

Литература

1. Жарковская Е.П. Банковское дело. - М.: Омега-Л, 2003.
2. Башарин Г.П. Начала финансовой математики. - М.: «ИНФРА-М», 1997.
3. Четыркин Е.М. Финансовая математика. - М.: «Дело», 2002.