УДК 004.8

А. Л. Тулупьев

АПОСТЕРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ИДЕАЛЕ КОНЪЮНКТОВ *)

Настоящая работа опирается на систему терминов, обозначений и результатов из ряда источников [1–8], посвященных теории алгебраических байесовских сетей (АБС).

АБС – это набор идеалов конъюнктов, причем каждому конъюнкту приписана оценка его вероятности, а сам набор в общем случае снабжен структурой графа смежности [5, 6]. С точки зрения исследований в области искусственного интеллекта, такого рода идеалы конъюнктов могут быть рассмотрены как логико-вероятностные модели фрагментов знаний с неопределенностью, а сама АБС – как модель базы фрагментов знаний. Для краткости идеал конъюнктов с определенными на нем оценками вероятностей называется далее фрагментом знаний (ФЗ).

Когда АБС уже построена и ее элементам назначены оценки вероятности, встает, в частности, вопрос о том, как обработать свидетельство, поступившее в один из ФЗ АБС.

В теории АБС свидетельства представляются как ФЗ. Три вида свидетельств: детерминированные, стохастические и неточные (неопределенные) – выделяются согласно виду оценок в таком ФЗ: бинарных, скалярных (точечных), интервальных соответственно [1, 3–5, 7]. Детерминированное свидетельство может быть рассмотрено как стохастическое, а стохастическое – как неточное. Стохастическое и неточное свидетельства называются недетерминированными.

Цель работы – предложить математические модели для представления свидетельств указанного выше вида и трактовку их вероятностной семантики, а также описать подход в сжатом виде, который позволит учесть влияние поступившего свидетельства на оценки вероятностей в ФЗ, т. е. предложить схему *локального апостериорного вывода* (вывода апостериорных оценок истинности в ФЗ).

1. Виды свидетельств. Пусть о ситуации или объектах в предметной области становится что-то известно: поступает *свидетельство* (оно может быть *атомарным* или *составным*, т. е. кортежем свидетельств). Требуется рассчитать оценки апостериорных вероятностей элементов ФЗ, а уже на основе изменившихся оценок может быть принято или отвергнуто какое-то решение.

Тулупьев Александр Львович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета, ведущий научный сотрудник Санкт-Петербургского института информатики и автоматизации РАН. Количество опубликованных работ: 155. Научные направления: представление и обработка данных и знаний с неопределенностью, применение методов математики и информатики в социокультурных исследованиях, применение методов биостатистики и математического моделирования в эпидемиологии, технология разработки программных комплексов с СУБД. E-mail: ALT@iias.spb.su, ALT4488@peterstar.ru.

*) Часть публикуемых материалов получена в рамках работы, выполненной при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00861-а).

В простейшем случае вычисление апостериорной вероятности сводится к расчету условной вероятности вида $p(\tilde{Z}|\tilde{E})$, где $\tilde{Z}$ – интересующее нас утверждение (конъюнкция литералов), а $\tilde{E}$ – поступившее свидетельство. Вместе с тем не всегда расчет оценки апостериорной вероятности может быть выполнен по формуле из определения условной вероятности. Кроме того, свидетельство не обязательно представляет собой утверждение, которое истинно (или ложно) с вероятностью 1, да и его компоненты могут находиться между собой в некоторой недетерминированной зависимости.

В первую очередь решим задачу представления свидетельств в рамках теории АБС на логико-вероятностном языке, затем рассмотрим способы распространения их влияния в ФЗ на частных примерах и, наконец, коснемся вопроса о непротиворечивости получающихся апостериорных оценок.

Часто вместо слов «распространение влияния свидетельства» говорят «пропагация свидетельства». Она возможна не только в отдельно взятом ФЗ, но также в цепи ФЗ и ациклической сети [4].

Как было отмечено ранее, свидетельства делятся на два класса: атомарные и составные (иначе говоря, сложные свидетельства или кортежи свидетельств). *Атомарное свидетельство* строится над одной атомарной пропозициональной формулой; *составное свидетельство* содержит в себе сведения об истинности небольшого числа пропозициональных формул, сформированных над некоторым количеством атомарных.

Детерминированным атомарным свидетельством являются сведения о том, что какое-то утверждение, соответствующее атомарной пропозиции, оказалось либо истинным, либо ложным. Например, установлено, что утверждение x истинно; тогда соответствующее свидетельство запишется как $\langle x \rangle$. Если же выявлено, что утверждение x ложно, свидетельство будет содержать в своей записи отрицание этой атомарной пропозиции: $\langle \bar{x} \rangle$.

Кортеж детерминированных свидетельств состоит из цепи атомарных детерминированных свидетельств, например или $\langle x_1 x_2 \rangle$, или $\langle x_1 \bar{x}_2 \rangle$, или $\langle \bar{x}_1 x_2 \rangle$, или $\langle \bar{x}_1 \bar{x}_2 \rangle$, или $\langle x_1 x_2 x_3 \rangle$ и т. д. Запись кортежа детерминированных свидетельств может приобретать вид $\langle X \rangle$, что служит сокращением для более длинной записи $\langle X \rangle = \langle x_1 x_2 \ldots x_m \rangle$. Аналогично $\left\langle \tilde{X} \right\rangle = \langle \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \ldots \tilde{x}_m \rangle$. В последнем случае подчеркиваем, что интерес представляет *некоторое* означивание (а не все возможные) цепочки конъюнкций X, рассматриваемое в качестве поступившего кортежа детерминированных свидетельств. Далее такое обозначение чаще всего используется в формулах для описания пропагации недетерминированных (стохастических и неточных) свидетельств или их кортежей.

Обратим внимание, что апостериорная вероятность интересующего нас утверждения Z из АБС запишется в следующем виде:

- $p_a(Z| \langle x \rangle)$, при детерминированном свидетельстве $\langle x \rangle$;
- $p_a(Z| \langle \bar{x} \rangle)$, при детерминированном свидетельстве $\langle \bar{x} \rangle$;
- $p_a(Z| \langle \tilde{x} \rangle)$, при рассмотрении «общего случая» детерминированного свидетельства $\langle \tilde{x} \rangle$;
- $p_a(Z| \langle x_1 \bar{x}_2 \rangle)$, при кортеже детерминированных свидетельств $\langle x_1 \bar{x}_2 \rangle$;
- $p_a(Z| \left\langle \tilde{X} \right\rangle)$, при рассмотрении «общего случая» кортежа детерминированных свидетельств $\left\langle \tilde{X} \right\rangle$.

В частности, при поступлении свидетельства $\langle x \rangle$, если в ФЗ имеется скалярная оценка вероятности $p(xZ)$, можно рассчитать $p_a(Z| \langle x \rangle)$ по формуле из определения условной вероятности

$$p_a(Z|\langle x\rangle) = p(Z|x) = \frac{p(xZ)}{p(x)}.$$

Стохастическое атомарное свидетельство характеризуется апостериорной вероятностью своей истинности. В этом случае запись свидетельства выглядит таким образом: $\langle p_{[a]}(\tilde{x})\rangle$, т. е. мы знаем апостериорную скалярную оценку вероятности всех двух означиваний $\tilde{x}$. (Здесь и далее предполагается, что апостериорное распределение вероятностей $p_{[a]}$ в свидетельстве задано непротиворечиво.)

Теперь обозначение апостериорной вероятности примет более сложный вид, поскольку, фактически, в качестве свидетельства поступает некоторое новое, *апостериорное* распределение $^{*)}$ вероятностей: $p_a(Z|\langle p_{[a]}(\tilde{x})\rangle)$.

Кортеж стохастических свидетельств характеризуется апостериорным распределением вероятностей на конъюнкциях означиваний атомарных пропозициональных формул, входящих в кортеж. Формальная запись кортежа стохастических свидетельств $\left\langle p_{[a]}(\tilde{X})\right\rangle$ или $\langle p_{[a]}(\tilde{x}_1\tilde{x}_2\ldots\tilde{x}_m)\rangle$, т. е. известна апостериорная оценка вероятности всех означиваний $\left\langle \tilde{X}\right\rangle = \langle\tilde{x}_1\tilde{x}_2\ldots\tilde{x}_m\rangle$. Заметим, что в теории АБС соответствующее распределение вероятностей задается на идеале вида $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}^{\triangle}$ как скалярные оценки вероятности истинности его элементов. Кроме того, подчеркнем, что апостериорное распределение вероятностей характеризует связи между атомарными свидетельствами и между их наборами. Возможность учитывать такие зависимости является важным свойством аппарата АБС, а также сказывается на результатах апостериорного вывода.

Апостериорное распределение вероятностей в случае кортежа стохастических свидетельств обозначается как

$$p_a(Z) = p(Z|\left\langle p_{[a]}(\tilde{X})\right\rangle).$$

Если же представить себе семейство апостериорных распределений вида

$$\Pr_{[a]}[\tilde{X}] = \Pr_{[a]}[\tilde{x}_1\tilde{x}_2\ldots\tilde{x}_m],$$

заданное на идеале интервальными оценками вероятностей (обязательно непротиворечивыми!), то получим *кортеж неточных свидетельств* и как частный случай – отдельное *неточное атомарное свидетельство.* Такой кортеж запишется так:

$$\left\langle p_{[a]}(\tilde{X}) \in \Pr_{[a]}[\tilde{X}]\right\rangle \text{ или подробнее – } \left\langle p_{[a]}(\tilde{x}_1\tilde{x}_2\ldots\tilde{x}_m) \in \Pr_{[a]}[\tilde{x}_1\tilde{x}_2\ldots\tilde{x}_m]\right\rangle.$$

Неточное атомарное свидетельство задается соответственно как $\langle p_{[a]}(\tilde{x}) \in \Pr_{[a]}[\tilde{x}]\rangle$, т. е. в этом случае достаточно задать интервальную оценку $\mathbf{p}_{[a]}(x)$.

Для краткой записи произвольного свидетельства или кортежа свидетельств станем пользоваться обозначением $\langle\langle\rangle\rangle$, а называть такое обозначение будем *свидетельством общего вида.*

Первой задачей апостериорного вывода является оценка вероятности (или ожидаемой вероятности) появления некоторого свидетельства $\langle\langle\rangle\rangle$ над заданным ФЗ $\mathcal{C}$ (или заданной БФЗ $\mathcal{N}_{\mathrm{KPB}}$): $p(\langle\langle\rangle\rangle|\mathcal{C})$ и соответственно $p(\langle\langle\rangle\rangle|\mathcal{N}_{\mathrm{KPB}})$.

$^{*)}$ Далее в наших рассуждениях будут встречаться два вида *апостериорных распределений* вероятностей. Распределение $p_{[a]}$ первого вида содержится в свидетельстве, а распределение p_a второго вида получается на элементах ФЗ после пропагации свидетельства, т. е. в результате апостериорного вывода.

Результаты первой задачи можно использовать [1, 9, 10], например, в формуле Байеса, если у нас есть несколько классов ситуаций, описанных ФЗ или базой ФЗ (БФЗ), которым [классам] присвоено априорное распределение вероятностей, однако в настоящей работе эта задача представлена не будет; вопросы, с ней связанные, получили рассмотрение в [4].

Второй задачей апостериорного вывода является оценка апостериорной вероятности или ожидаемой апостериорной вероятности цепочек конъюнкций Z, входящих в ФЗ или БФЗ, но не имеющих общих атомарных пропозиций с поступившим свидетельством или кортежем свидетельств: $p_a(Z|\langle\langle\rangle\rangle)$.

Если известно, как рассчитывать (подход к расчетам представлен в п. 2) апостериорные вероятности $p(Z|\langle\tilde{x}\rangle)$ в случае поступления детерминированного свидетельства $\langle\tilde{x}\rangle$ и $p(Z|\left\langle\tilde{X}\right\rangle)$ в случае поступления кортежа детерминированных свидетельств $\left\langle\tilde{X}\right\rangle$, то тогда обработка атомарных стохастических свидетельств $\left\langle p_{[a]}(\tilde{x})\right\rangle$ или их кортежей $\left\langle p_{[a]}(\tilde{X})\right\rangle$ будет производиться по формулам, напоминающим таковые для расчета математических ожиданий*):

$$p_a(Z|\left\langle p_{[a]}(\dot{\tilde{x}})\right\rangle) = \sum_{\tilde{x}} p_a(Z|\langle\tilde{x}\rangle)p_{[a]}(\tilde{x}), \tag{1}$$

$$p_a(Z|\left\langle p_{[a]}(\dot{\tilde{X}})\right\rangle) = \sum_{\tilde{X}} p_a(Z|\left\langle\tilde{X}\right\rangle)p_{[a]}(\tilde{X}). \tag{2}$$

Здесь точка над $\tilde{x}$ и $\tilde{X}$ означает, что означивания $\tilde{x}$ и $\tilde{X}$ слева и справа от знака равенства не связаны; связаны только означивания этих переменных и конъюнкций под знаком суммирования.

Формулы (1) и (2) обобщим на случай кортежей неточных свидетельств [4, 13]:

$$\mathbf{p}_a(Z|\left\langle p_{[a]}(\dot{\tilde{x}}) \in \Pr_{[a]}[\dot{\tilde{x}}]\right\rangle) = \underset{p_{[a]}(\tilde{x})\in\Pr_{[a]}[\dot{\tilde{x}}]}{[\min;\max]} \sum_{\tilde{x}} p_a(Z|\langle\tilde{x}\rangle)p_{[a]}(\tilde{x}), \tag{3}$$

$$\mathbf{p}_a(Z|\left\langle p_{[a]}(\dot{\tilde{X}}) \in \Pr_{[a]}[\dot{\tilde{X}}]\right\rangle) = \underset{p_{[a]}(\tilde{X})\in\Pr_{[a]}[\dot{\tilde{X}}]}{[\min;\max]} \sum_{\tilde{X}} p_a(Z|\left\langle\tilde{X}\right\rangle)p_{[a]}(\tilde{X}), \tag{4}$$

где $[\min;\max]$ представляет собой замкнутый промежуток, а экстремальные значения берутся от стоящей справа суммы.

Полученные формулы (1)–(4) для расчетов оценок апостериорных вероятностей обобщаются и на случай, когда результатом апостериорного вывода по детерминированному свидетельству становятся не скалярные, а интервальные оценки $\mathbf{p}_a(Z|\left\langle\tilde{X}\right\rangle)$: несколько упрощая, можно сказать, что соответствующие операции производятся с верхними и нижними границами интервалов [4, 11, 12].

2. Скалярные априорные оценки. Рассмотрим более детально обработку свидетельства, построенного над атомами из V, при его поступлении в отдельный ФЗ со скалярными оценками вероятностей – соответствующий идеал конъюнктов задан над атомарными пропозициями цепочки VX, при этом подцепочки V и X общих элементов не имеют. Ограничимся двумя видами свидетельств: кортежем детерминированных свидетельств $\left\langle\tilde{V}\right\rangle$ и кортежем стохастических свидетельств $\left\langle p_{[a]}\left(\tilde{V}\right)\right\rangle$. Здесь

*) На самом деле, так оно и есть. Можно определить соответствующую случайную величину и рассчитывать ее математическое ожидание [3, 4, 11, 12].

не будем рассматривать подробно расчет вероятности появления кортежа свидетельств над ФЗ. Соответствующие вычисления описаны, например, в [4, 13].

Кортеж стохастических свидетельств фактически рассматривается как набор кортежей детерминированных свидетельств всех возможных означиваний, построенных над одной и той же цепочкой конъюнкций V, при этом на наборе задано вероятностное распределение $p_{[a]}\left(\tilde{V}\right)$. Результаты пропагации кортежа стохастических свидетельств $\left\langle p_{[a]}\left(\tilde{V}\right)\right\rangle$ получаются как «смесь», т. е. как усреднение (линейная комбинация) результатов пропагации кортежей детерминированных свидетельств $\left\langle\tilde{V}\right\rangle$, построенных над одними и теми же атомарными пропозициями из V, по вероятностному распределению $p_{[a]}\left(\tilde{V}\right)$, заданному над $\tilde{V}$. Заметим, что вероятности $p_{[a]}$ могут быть заданы как над квантами $\tilde{V}$, так и над элементами идеала $V^{\triangle}$.

Кортеж детерминированных свидетельств можно рассмотреть как частный случай кортежа стохастических свидетельств, в котором ненулевую вероятность (а значит, равную единице) имеет только одно означивание аргументных мест в цепи свидетельств.

Обозначим априорные вероятности элементов идеала как p, а апостериорные вероятности – как p_a. При принятых обозначениях влияние кортежей свидетельств выражается следующим набором формул:

$$p_a\left(\tilde{V}\tilde{X}|\left\langle\tilde{V}\right\rangle\right)=p\left(\tilde{V}\tilde{X}|\tilde{V}\right)=\frac{p\left(\tilde{V}\tilde{X}\tilde{V}\right)}{p\left(\tilde{V}\right)}=\frac{p\left(\tilde{V}\tilde{X}\right)}{p\left(\tilde{V}\right)}\quad\left[=p\left(\tilde{X}|\tilde{V}\right)\right], \tag{5}$$

$$p_a\left(\tilde{X}|\left\langle\tilde{V}\right\rangle\right)=p\left(\tilde{X}|\tilde{V}\right)=\frac{p\left(\tilde{V}\tilde{X}\right)}{p\left(\tilde{V}\right)}\quad\left[=p\left(\tilde{X}|\tilde{V}\right)\right],$$

$$\begin{aligned} p_a\left(\tilde{V}\tilde{X}|\left\langle p_{[a]}\left(\tilde{V}\right)\right\rangle\right)=p\left(\tilde{V}\tilde{X}|\tilde{V}\right)p_{[a]}\left(\tilde{V}\right)&= \\ =\frac{p\left(\tilde{V}\tilde{X}\tilde{V}\right)}{p\left(\tilde{V}\right)}p_{[a]}\left(\tilde{V}\right)&=\frac{p\left(\tilde{V}\tilde{X}\right)}{p\left(\tilde{V}\right)}p_{[a]}\left(\tilde{V}\right), \end{aligned} \tag{6}$$

$$p_a\left(\tilde{X}|\left\langle p_{[a]}\left(\tilde{V}\right)\right\rangle\right)=\sum_{\tilde{V}}p\left(\tilde{X}|\tilde{V}\right)p_{[a]}\left(\tilde{V}\right)=\sum_{\tilde{V}}\frac{p\left(\tilde{V}\tilde{X}\right)}{p\left(\tilde{V}\right)}p_{[a]}\left(\tilde{V}\right).$$

Обратим внимание на то, что выражение (6) вводит апостериорную вероятность таким образом, что на квантах $\tilde{V}$ она совпадает с вероятностью соответствующего означивания в поступившем кортеже стохастических свидетельств:

$$p_a\left(\tilde{V}|\left\langle p_{[a]}\left(\tilde{V}\right)\right\rangle\right)=\sum_{\tilde{X}}p_a\left(\tilde{V}\tilde{X}|\left\langle p_{[a]}\left(\tilde{V}\right)\right\rangle\right)=\sum_{\tilde{X}}\frac{p\left(\tilde{V}\tilde{X}\right)}{p\left(\tilde{V}\right)}p_{[a]}\left(\tilde{V}\right)=$$

$$= p_{[a]}\left(\tilde V\right)\frac{\sum\limits_{\tilde X} p\left(\tilde V \tilde X\right)}{p\left(\tilde V\right)} = p_{[a]}\left(\tilde V\right)\frac{p\left(\tilde V\right)}{p\left(\tilde V\right)} = p_{[a]}\left(\tilde V\right).$$

Особо следует рассмотреть случай [4], когда при одном или нескольких означиваниях $\tilde V$ вероятность $p(\tilde V) = 0$. При таких $\tilde V$ считается, что оценка условной вероятности вырождается в $p(Z|\tilde V) \in [0;1]$.

Совпадение условных вероятностей в формуле (5) позволяет в случае кортежа детерминированных свидетельств не хранить апостериорные вероятности над всем исходным идеалом конъюнктов $(VX)^{\triangle}$; достаточно хранить апостериорные вероятности над подыдеалом $X^{\triangle}$ исходного идеала, в который не входят конъюнкты, содержащие хотя бы один атом из кортежа свидетельств.

3. Интервальные априорные оценки. В случае апостериорного вывода в ФЗ со скалярными оценками вероятностей при поступлении и детерминированного, и стохастического свидетельства расчеты сводятся к употреблению формулы из определения условной вероятности. В случае интервальных оценок в ФЗ получение оценок апостериорных вероятностей становится задачей гиперболического программирования.

Не вдаваясь в детальный разбор общего случая (с ним можно познакомиться в [4, 11, 13]), приведем примеры, демонстрирующие важную особенность апостериорного вывода: в предложенной модели БФЗ с неопределенностью возникающие задачи гиперболического программирования удается свести к задачам линейного программирования. Соответствующий класс задач, с точки зрения теории оптимизации, рассматривался, например, в [14].

Пример 1. (Апостериорный вывод, интервальные оценки, атомарное свидетельство.)

Рассмотрим ФЗ третьего порядка $\mathcal{C} = \{x_1, x_2, x_3, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, x_1x_2x_3\}$, построенный над $A = \{x_1, x_2, x_3\}$. Заданы непротиворечивые интервальные оценки истинности элементов ФЗ $\mathcal{D}^{\wedge,3}$:

$$\left\{\begin{array}{ccccc}
p_1^- & \leqslant & p(x_1) & \leqslant & p_1^+, \\
p_2^- & \leqslant & p(x_2) & \leqslant & p_2^+, \\
p_3^- & \leqslant & p(x_3) & \leqslant & p_3^+, \\
p_{12}^- & \leqslant & p(x_1x_2) & \leqslant & p_{12}^+, \\
p_{13}^- & \leqslant & p(x_1x_3) & \leqslant & p_{13}^+, \\
p_{23}^- & \leqslant & p(x_2x_3) & \leqslant & p_{23}^+, \\
p_{123}^- & \leqslant & p(x_1x_2x_3) & \leqslant & p_{123}^+.
\end{array}\right.$$

На вход поступает детерминированное свидетельство $\langle x_3\rangle$. Для простоты будем предполагать, что $p(x_3)$ имеет либо скалярное значение, отличное от нуля, либо интервальную оценку с различающейся верхней и нижней границами. Эта интервальная оценка в качестве нижней границы может содержать нуль.

Вторая задача апостериорного вывода сводится к решению серии задач гиперболического программирования для $Z \in \{x_1, x_2, x_1x_2\}$:

$$p^-(Z|\langle x_3\rangle) = \min_{\mathcal{R}^{\wedge,3}} \frac{p(x_3Z)}{p(x_3)}, \qquad p^+(Z|\langle x_3\rangle) = \max_{\mathcal{R}^{\wedge,3}} \frac{p(x_3Z)}{p(x_3)}.$$

Покажем, что возникшие экстремальные задачи сводятся к задачам линейного программирования. Введем величину $\xi = \frac{1}{p(x_3)}$. При сделанных предположениях она строго положительна; более того, $\xi \in [1;\infty)$. Умножим неравенства из множества $\mathcal{R}^{\wedge,3} = \mathcal{E}^{\wedge,3} \bigcup \mathcal{D}^{\wedge,3}$, соответствующего рассматриваемому ФЗ, на переменную ξ. Неравенства не поменяют знак, поскольку ξ строго положительна. Заменим переменные $\xi p(f) = d(f)$. Отметим, что $d(x_3) = 1$. В получившееся множество неравенств включим дополнительный элемент – линейное неравенство $\xi \geqslant 1$. Это множество неравенств назовем $\mathcal{R}_d^{\wedge,3}$.

Вторая задача апостериорного вывода свелась к решению серии задач линейного программирования:

$$p^-(Z|\,\langle x_3\rangle) = \min_{\mathcal{R}_d^{\wedge,3}} d(Z), \quad p^+(Z|\,\langle x_3\rangle) = \max_{\mathcal{R}_d^{\wedge,3}} d(Z), \quad Z \in \{x_1, x_2, x_1x_2\}.$$

В явном виде множество неравенств $\mathcal{R}_d^{\wedge,3}$ выглядит следующим образом:

$$\mathcal{R}_d^{\wedge,3} = \left\{ \begin{array}{l} \xi \geqslant 1, \\ d(x_1x_2x_3) \geqslant 0, \\ d(x_1x_3) - d(x_1x_2x_3) \geqslant 0, \\ d(x_2x_3) - d(x_1x_2x_3) \geqslant 0, \\ 1 - d(x_1x_3) - d(x_2x_3) + d(x_1x_2x_3) \geqslant 0, \\ d(x_1x_2) - d(x_1x_2x_3) \geqslant 0, \\ d(x_1) - d(x_1x_2) - d(x_1x_3) + d(x_1x_2x_3) \geqslant 0, \\ d(x_2) - d(x_1x_2) - d(x_2x_3) + d(x_1x_2x_3) \geqslant 0, \\ \xi - d(x_1) - d(x_2) - 1 + d(x_1x_2) + \\ \qquad + d(x_1x_3) + d(x_2x_3) - d(x_1x_2x_3) \geqslant 0, \\ \quad \begin{array}{ll} \xi p_1^- \leqslant d(x_1), & d(x_1) \leqslant \xi p_1^+, \\ \xi p_2^- \leqslant d(x_2), & d(x_2) \leqslant \xi p_2^+, \\ \xi p_3^- \leqslant 1, & 1 \leqslant \xi p_3^+, \\ \xi p_{12}^- \leqslant d(x_1x_2), & d(x_1x_2) \leqslant \xi p_{12}^+, \\ \xi p_{13}^- \leqslant d(x_1x_3), & d(x_1x_3) \leqslant \xi p_{13}^+, \\ \xi p_{23}^- \leqslant d(x_2x_3), & d(x_2x_3) \leqslant \xi p_{23}^+, \\ \xi p_{123}^- \leqslant d(x_1x_2x_3), & d(x_1x_2x_3) \leqslant \xi p_{123}^+. \end{array} \end{array} \right\}$$

Пример 2. (Апостериорный вывод, интервальные оценки, кортеж свидетельств.) Снова рассмотрим построенный над $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ ФЗ

$$\mathcal{C} = \{x_1, x_2, x_3, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, x_1x_2x_3\}.$$

В отличие от примера 1, на вход поступает кортеж детерминированных свидетельств $\langle x_2x_3\rangle$. Будем предполагать, что $p(x_2x_3)$ имеет либо ненулевое скалярное значение, либо интервальную оценку с различающимися границами. Эта интервальная оценка в качестве нижней границы может содержать нуль.

Заданы те же непротиворечивые интервальные оценки истинности элементов ФЗ $\mathcal{D}^{\wedge,3}$, что и в примере 1.

Вторая задача апостериорного вывода сводится к решению задач гиперболического программирования:

$$p^-(Z|\,\langle x_2x_3\rangle) = \min_{\mathcal{R}^{\wedge,3}} \frac{p(x_2x_3Z)}{p(x_2x_3)}, \quad p^+(Z|\,\langle x_2x_3\rangle) = \max_{\mathcal{R}^{\wedge,3}} \frac{p(x_2x_3Z)}{p(x_2x_3)}, \quad Z \in \{x_1\}.$$

Покажем, что возникшие экстремальные задачи снова сводятся к задачам линейного программирования. Введем величину $\xi = \frac{1}{p(x_2x_3)}$. При сделанных предположениях она строго положительна; более того, $\xi \in [1;\infty)$. Умножим неравенства из множества $\mathcal{R}^{\wedge,3} = \mathcal{E}^{\wedge,3} \bigcup \mathcal{D}^{\wedge,3}$, соответствующего рассматриваемому ФЗ, на переменную ξ. Неравенства не поменяют знак, поскольку ξ строго положительна. Заменим переменные $\xi p(f) = d(f)$. Отметим, что $d(x_2x_3) = 1$. В получившееся множество неравенств включим дополнительный элемент – линейное неравенство $\xi \geqslant 1$. Назовем это множество $\mathcal{R}^{\wedge,3}_{d\langle x_2x_3\rangle}$.

Вторая задача апостериорного вывода в случае ФЗ третьего порядка и двулитерного кортежа детерминированных свидетельств сводится к решению задач линейного программирования:

$$p^-(Z|\,\langle x_2x_3\rangle) = \min_{\mathcal{R}^{\wedge,3}_{d\langle x_2x_3\rangle}} d(Z), \quad p^+(Z|\,\langle x_2x_3\rangle) = \max_{\mathcal{R}^{\wedge,3}_{d\langle x_2x_3\rangle}} d(Z), \quad Z \in \{x_1\}.$$

Само множество $\mathcal{R}^{\wedge,3}_{d\langle x_2x_3\rangle}$ в явном виде выглядит так:

$$\mathcal{R}^{\wedge,3}_{d\langle x_2x_3\rangle} = \left\{ \begin{array}{l} \xi \geqslant 1, \\ d(x_1x_2x_3) \geqslant 0, \\ d(x_1x_2) - d(x_1x_2x_3) \geqslant 0, \\ d(x_1x_3) - d(x_1x_2x_3) \geqslant 0, \\ d(x_1) - d(x_1x_2) - d(x_1x_3) + d(x_1x_2x_3) \geqslant 0, \\ 1 - d(x_1x_2x_3) \geqslant 0, \\ d(x_2) - d(x_1x_2) - 1 + d(x_1x_2x_3) \geqslant 0, \\ d(x_3) - d(x_1x_3) - 1 + d(x_1x_2x_3) \geqslant 0, \\ \xi - d(x_1) - d(x_2) - d(x_3) + d(x_1x_2) + \\ \qquad +d(x_1x_3) + 1 - d(x_1x_2x_3) \geqslant 0, \\ \begin{array}{ll} \xi p_1^- \leqslant d(x_1), & d(x_1) \leqslant \xi p_1^+, \\ \xi p_2^- \leqslant d(x_2), & d(x_2) \leqslant \xi p_2^+, \\ \xi p_3^- \leqslant d(x_3), & d(x_3) \leqslant \xi p_3^+, \\ \xi p_{12}^- \leqslant d(x_1x_2), & d(x_1x_2) \leqslant \xi p_{12}^+, \\ \xi p_{13}^- \leqslant d(x_1x_3), & d(x_1x_3) \leqslant \xi p_{13}^+, \\ \xi p_{23}^- \leqslant 1, & 1 \leqslant \xi p_{23}^+, \\ \xi p_{123}^- \leqslant d(x_1x_2x_3), & d(x_1x_2x_3) \leqslant \xi p_{123}^+. \end{array} \end{array} \right\}$$

В примерах 1 и 2 разобраны только положительно означенные детерминированные свидетельства. В случае другого означивания свидетельств или иного порядка атомарных свидетельств в кортеже следовало бы применить алгоритмы переобозначения или перестановки элементов идеала цепочек конъюнкций соответственно.

Обобщение апостериорного вывода на случай стохастических свидетельств и неточных свидетельств производится по формулам (1)–(4).

Хотя примеры 1, 2 и формулы (1)–(4) дают достаточно четкое представление о том, как производить апостериорный вывод, при разработке алгоритмов для последующей программной реализации может потребоваться более детальное описание подхода. Удобная с точки зрения разработки программных приложений формализация процесса и объектов, в нем участвующих, предложена, например, в [4, 15, 16]; кроме того, там же систематически описан подход к обработке стохастических и неточных свидетельств.

4. Непротиворечивость апостериорных оценок. *Утверждение.* Пусть X – это цепочка атомов, формирующая поступившее свидетельство, а Z используется так же, как в примерах 1, 2, и п. 1: оно обозначает произвольный конъюнкт из исходного ФЗ, не содержащий ни одного атома из поступившего свидетельства. Тогда совокупность апостериорных оценок вероятностей

$$\left[\min\left\{\frac{p(XZ)}{p(X)}\right\};\max\left\{\frac{p(XZ)}{p(X)}\right\}\right]$$

задает непротиворечивый ФЗ над конъюнктами вида Z, если соответствующие экстремальные задачи имеют решение.

П р и м е ч а н и е 4.1. Утверждение верно, даже если в исходном ФЗ $p(X) = 0$. В этом случае интересующие нас оценки выродятся в $[0;1]$ [13].

П р и м е ч а н и е 4.2. Совокупность конъюнктов вида Z образует идеал; он является подыдеалом идеала-носителя исходного ФЗ.

П р и м е ч а н и е 4.3. Предполагается, что апостериорные оценки вероятностей удалось получить. В противном случае, если соответствующие задачи гиперболического программирования не имеют решения, исходные данные были противоречивы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обратим внимание на важное свойство совокупности величин вида $d(XZ)$, где Z «пробегает» соответствующий идеал.

Пусть $\xi = \frac{1}{p(X)}$. Тогда, используя матрицы $\mathbf{I}_n$ и векторы $\mathbf{P}^{(n)}$ из [4, 5], запишем применявшееся в примерах 1 и 2 преобразование системы неравенств, вытекающей из требований вероятностной логики.

Определим новый вектор $\mathbf{d}^{(n)} = \xi \cdot \mathbf{P}^{(n)}$. Его «нижний» подвектор, содержащий вероятности конъюнктов вида XZ, где Z «пробегает» конъюнкты, не содержащие атомов их X, обозначим $\mathbf{d}^{(m)}$, где m равно разности числа атомов в ФЗ и числа атомов в свидетельстве:

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_n \times \mathbf{P}^{(n)} &\geqslant \mathbf{0}^{\langle n\rangle},\\
\xi \cdot \mathbf{I}_n \times \mathbf{P}^{(n)} &\geqslant \xi \cdot \mathbf{0}^{\langle n\rangle},\\
\mathbf{I}_n \times \xi \cdot \mathbf{P}^{(n)} &\geqslant \mathbf{0}^{\langle n\rangle},\\
\mathbf{I}_n \times \mathbf{d}^{(n)} &\geqslant \mathbf{0}^{\langle n\rangle}.
\end{aligned}$$

Из последнего неравенства следует

$$\mathbf{I}_m \times \mathbf{d}^{(m)} \geqslant \mathbf{0}^{\langle m\rangle},$$

в силу того, что матрица $\mathbf{I}_n$ имеет структуру

$$\left[\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \end{array}\right].$$

Учтем, что, согласно определению, $d(X) = 1$.

Таким образом, оказывается, что на величины вида $d(XZ) = p(Z|X)$ наложены требования аксиоматики вероятностей, т. е. после проведения апостериорного вывода (и если все соответствующие задачи гиперболического программирования имеют решение) получим непротиворечивую совокупность оценок апостериорных вероятностей над идеалом конъюнктов с элементами вида Z.

За счет переозначиваний и перестановок переменных случай, когда детерминированное свидетельство содержит атомы с отрицанием, сводится к рассмотренному в утверждении. Соответствующие вопросы рассмотрены в [4]; на матрично-векторном языке преобразования, связанные с апостериорным выводом при произвольном детерминированном свидетельстве, выполнены в [15], а еще более общая ситуация рассмотрена в [16].

Как уже отмечалось, при обработке стохастического свидетельства сначала пропагируется по-отдельности каждое означивание цепи конъюнкций из всех атомов, входящих в такое свидетельство. Затем из результатов пропагации строится «смесь» – линейная комбинация с весами $p_{[a]}(\tilde{X})$. Поскольку линейная комбинация непротиворечивых ФЗ образует непротиворечивый ФЗ, то результаты пропагации стохастического свидетельства также непротиворечивы.

Литература

1. *Городецкий В. И.* Байесовский вывод: препринт Ленингр. ин-та информатики и автоматизации АН СССР, № 149. Л., 1991. 38 с.

2. *Тулупьев А. Л.* Алгебраические байесовские сети: теоретические основы и непротиворечивость. СПб.: С.-Петерб. ин-т информатики и автоматизации РАН, 1995. 76 с.

3. *Тулупьев А. Л.* Алгебраические байесовские сети: логико-вероятностный подход к моделированию баз знаний с неопределенностью. СПб.: С.-Петерб. ин-т информатики и автоматизации РАН, 2000. 282 с.

4. *Тулупьев А. Л., Николенко С. И., Сироткин А. В.* Байесовские сети: логико-вероятностный подход. СПб.: Наука, 2006. 607 с.

5. *Тулупьев А. Л.* Алгебраические байесовские сети: локальный логико-вероятностный вывод: учеб. пособие. СПб.: С.-Петерб. гос. ун-т; ООО Изд-во «Анатолия», 2007. 80 с.

6. *Тулупьев А. Л.* Алгебраические байесовские сети: глобальный логико-вероятностный вывод: учеб. пособие. СПб.: С.-Петерб. гос. ун-т; ООО Изд-во «Анатолия», 2007. 40 с.

7. *Тулупьев А. Л.* Непротиворечивость оценок вероятностей над идеалами конъюнктов и дизъюнктов // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2009. Вып. 2. С. 121–131.

8. *Тулупьев А. Л.* Непротиворечивость оценок вероятностей в алгебраической байесовской сети // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2009. Вып. 3. С. 144–151.

9. *Городецкий В. И.* Адаптация в экспертных системах // Изв. АН СССР. Сер. Техническая кибернетика. 1993. № 5. С. 101–110.

10. *Городецкий В. И.* Алгебраические байесовские сети – новая парадигма экспертных систем // Юбил. сб. трудов институтов Отделения информатики, вычислительной техники и автоматизации РАН. М.: Изд-во РАН, 1993. Т. 2. С. 120–141.

11. *Тулупьев А. Л., Николенко С. И., Никитин Д. А., Сироткин А. В.* Синтез апостериорных оценок истинности суждений в интегрированных базах знаний: детерминированный вариант // Изв. высш. учеб. заведений. Приборостроение. 2006. № 11. С. 35–39.

12. *Тулупьев А. Л., Николенко С. И., Сироткин А. В.* Синтез апостериорных оценок при поступлении свидетельств с неопределенностью в интегрированную систему знаний о неточных вероятностях // Изв. высш. учеб. заведений. Приборостроение. 2006. № 11. С. 39–44.

13. *Тулупьев А. Л., Никитин Д. А.* Экстремальные задачи в апостериорном выводе над идеалами цепочек конъюнкций // Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2, т. 2. СПб.: Наука, 2005. С. 12–52.

14. *Гаврурин М. К., Малоземов В. Н.* Экстремальные задачи с линейными ограничениями: учеб. пособие. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1984. 175 с.

15. *Сироткин А. В., Тулупьев А. Л.* Матрично-векторные уравнения локального логико-вероятностного вывода в алгебраических байесовских сетях // Труды СПИИРАН. 2008. Вып. 6. СПб.: Наука, 2008. С. 131–149.

16. *Тулупьев А. Л., Сироткин А. В., Николенко С. И.* Байесовские сети доверия: логико-вероятностный вывод в ациклических направленных графах. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009. 400 с.

Статья рекомендована к печати член-кор. РАН, проф. Г. А. Леоновым.

Статья принята к печати 24 сентября 2009 г.