ОБ ИНТЕГРАЛЕ ЛЕБЕГА-СТИЛТЬЕСА С РАЗРЫВНОЙ ПРОИЗВОДЯЩЕЙ ФУНКЦИЕЙ И ЕГО СВЯЗИ С ИНТЕГРАЛОМ РИМАНА-СТИЛТЬЕСА

Н.В. ШИПОВ, *доц. МГУЛ, канд. физ.-мат. наук*[1]

caf-math@mgul.ac.ru, *nvshi@mail.ru*

[1]ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет леса»

141005, Московская обл., г. Мытищи-5, ул. 1-я институтская, д. 1, МГУЛ

Наиболее широким классом производящих функций для меры множеств в интеграле Лебега-Стилтьеса, а также производящих функций в интеграле Римана-Стилтьеса, является множество функций с ограниченной вариацией. Функции с ограниченной вариацией, которые в общем случае являются разрывными как слева, так и справа, представляются, как известно, в виде разности двух монотонных неубывающих функций. Каждая из этих двух монотонных неубывающих функций является в общем случае разрывной функцией (разрывной как слева, так и справа). Для целей изложения свойств меры Лебега-Стилтьеса и соответствующих свойств интеграла Лебега-Стилтьеса удобно считать, что монотонная производящая функция является непрерывной слева (или непрерывной только справа). При использовании интеграла Лебега-Стилтьеса в ряде случаев предлагается переопределить в случае необходимости каждую из двух монотонных неубывающих функций так, чтобы они стали непрерывными слева, что снижает общность изложения и применения. Разрывная производящая функция с ограниченным изменением представлена на отрезке в виде суммы непрерывной функции с ограниченным изменением, непрерывной слева функции скачков и непрерывной справа функции скачков. Обусловленная этими тремя функциями мера Лебега-Стилтьеса множества, а также соответствующий интеграл Лебега-Стилтьеса для разрывной (как справа, так и слева) производящей функции представлены в виде суммы трех слагаемых, каждое из которых определяется одной из указанных функций. Исходный интеграл Лебега-Стилтьеса оказывается независящим от значений производящей функции в точках разрыва. В методическом плане проиллюстрировано, что из полученных разложений непосредственно следует, что если подынтегральная функция непрерывна на отрезке [a, b], то интеграл Лебега-Стилтьеса по отрезку [a, b] совпадает с соответствующим интегралом Римана-Стилтьеса по отрезку [a, b]. Ранее этот факт был доказан на полуинтервале [a, b] для непрерывной слева производящей функции.

Ключевые слова: производящая функция, функции скачков, мера Лебега-Стилтьеса, интеграл Лебега-Стилтьеса, интеграл Римана-Стилтьеса

Как хорошо известно [1–10], наиболее широким классом производящих функций для меры множеств в интеграле Лебега-Стилтьеса, а также производящих функций в интеграле Римана-Стилтьеса [1–5], является множество функций с ограниченной вариацией. Последние, в свою очередь, представляются в виде разности двух монотонных неубывающих функций, каждая из которых является в общем случае разрывной функцией [1–5]. Для целей изложения свойств меры и интеграла Лебега-Стилтьеса [1], удобно считать монотонную производящую функцию непрерывной слева (или справа). При использовании интеграла в ряде случаев предлагается переопределить, в случае необходимости, каждую из двух монотонных неубывающих функций так, чтобы они стали непрерывными слева на интервале (a, b) [3, 11], что снижает общность изложения и применения. Целью настоящего краткого сообщения (для производящей функции разрывной как справа, так и слева) является выделение дискретных составляющих меры (и соответственно интеграла), отвечающих скачкам функции отдельно слева и справа.

В качестве производящей функции для меры Лебега-Стилтьеса будем использовать сначала монотонную неубывающую разрывную справа и слева функцию $F(x)$, имеющую на отрезке $[a, b]$ не более чем счетное число точек разрыва x_i. Обозначим скачки функции $F(x)$ в токе x_i

$$h_i = F(x_i + 0) - F(x_i),\ g_i = F(x_i) - F(x_i - 0), \quad (1)$$

$h_N = 0$ в точке $x_N = b$, $g_0 = 0$ в точке $x_0 = a$. (2)

Неубывающую разрывную справа и слева функцию $F(x)$ представим в виде суммы трех слагаемых

$$F(x) = \varphi(x) + h(x) + g(x), \quad (3)$$

где функции скачков

$$h(x) = \sum_{x_i < x} h_i\ ,\ g(x) = \sum_{x_i \le x} g_i \quad (4)$$

будут неубывающими непрерывными соответственно слева и справа. Поскольку $h(x_i) = h(x_i - 0)$, $h(x_i + 0) = h(x_i) + h_i$, $g(x_i - 0) = g(x_i) - g_i$, $g(x_i + 0) = g(x_i)$, то в представлении (3) функция $\varphi(x)$ оказывается непрерывной неубывающей функцией на отрезке $[a, b]$. Доказательство непрерывности справа и слева функции $\varphi(x)$ здесь полностью аналогично доказательству непрерывности слева соответствующей функции $\varphi(x)$ в [1], где $F(x)$ считалась непрерывной слева.

Для каждой из трех неубывающих функций в (3) определены меры отрезков и

полуинтервалов. На полукольце интервалов, отрезков полуинтервалов для функции $F(x)$, непрерывной слева, имеем [1]

$$m(\alpha, \beta) = F(\beta) - F(\alpha + 0), \quad (5а)$$
$$m[\alpha, \beta] = F(\beta+0) - F(\alpha), \quad (5б)$$
$$m(\alpha, \beta] = F(\beta +0) - F(\alpha + 0), \quad (5в)$$
$$m[\alpha, \beta) = F(\beta) - F(\alpha). \quad (5г)$$

На полукольце интервалов, отрезков полуинтервалов для функции $F(x)$, непрерывной справа, меру определяем по формулам

$$m(\alpha, \beta) = F(\beta - 0) - F(\alpha), \quad (5д)$$
$$m[\alpha, \beta] = F(\beta) - F(\alpha - 0), \quad (5е)$$
$$m(\alpha, \beta] = F(\beta) - F(\alpha). \quad (5ж)$$
$$m[\alpha, \beta) = F(\beta - 0) - F(\alpha - 0). \quad (5з)$$

Таким образом, мера Лебега-Стилтьеса μ_F, ввиду (3), представлена в виде суммы трех мер Лебега-Стилтьеса множества $A \subset [a, b]$

$$\mu_F(A) = \mu_\varphi(A) + \mu_H(A) + \mu_g(A). \quad (6)$$

Сумма дискретных мер в (6) множества $A \subset [a, b]$, ввиду σ-аддитивности этих мер, сразу находится из определений (1), (2), (4), поскольку множество точек разрыва не более чем счетно

$$\mu_H(A) + \mu_g(A) = \sum_{x_i \subset A} h_i + \sum_{x_i \subset A} g_i. \quad (7)$$

Таким образом, в общем случае равенство (6) справедливо на пересечении σ – алгебр мер μ_H, μ_g и μ_φ, в том числе для всех открытых и замкнутых множеств отрезка $[a, b]$, а также их счетных сумм и пересечений, включая все борелевские множества отрезка $[a, b]$.

Последнее замечание существенно при определении измеримости и суммируемости функций по мере μ_F.

Пусть функция $f(x)$ измерима, то есть измерима по классической мере Лебега. Тогда прообраз любого борелевского множества есть борелевское множество, а это последнее (ввиду изложенного в предыдущем абзаце) μ_H-измеримо и μ_φ-измеримо. Таким образом, измеримая функция будет μ_F-измеримой.

Предполагая выполненными условия суммируемости $f(x)$ по мере μ_φ, а также считая ряды в точках разрыва x_i сходящимися абсолютно, интеграл Лебега-Стилтьеса по мере μ_F представляется в виде суммы трех слагаемых

$$\int_{[a,b]} f(x)\, d\mu_F = \int_{[a,b]} f(x)\, d\mu_\varphi + \sum_i f(x_i) h_i + \sum_i f(x_i) g_i. \quad (8)$$

Объединяя ряды и оставляя скачки функции $F(x)$ в граничных точках a, b за знаком суммы ряда, приходим к окончательному выражению

$$\int_{[a,b]} f(x)\, d\mu_F = \int_{[a,b]} f(x)\, d\mu_\varphi + \sum_{x_i \subset (a,b)} f(x_i) \times (F(x_i + 0) - F(x_i - 0)) + f(a)(F(a + 0) - F(a)) + f(b)(F(b) - F(b - 0)). \quad (9)$$

Для непрерывной неубывающей функции $\varphi(x)$ меры всех отрезков и полуинтервалов совпадают с выражением $\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$ в (5г), (5ж).

Для неубывающей функции $F(x)$, имеющей разрывы справа и слева, меры всех отрезков и полуинтервалов получаются по формулам (6) с использованием выражений (5) для $h(x)$ и $g(x)$. Так, если интервал (α, β) не содержит точек разрыва, то разность $\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$, задающая меру первого слагаемого в (6), совпадает с изменением $F(\beta - 0) - F(\alpha + 0)$ функции $F(x)$ на указанном интервале, а второе и третье слагаемые в (6) для интервала равны нулю, $m(\alpha, \beta) = F(\beta - 0) - F(\alpha + 0)$. Аналогично находим меру точки разрыва x

$$\mu_F(x_i) = m(x_i) = m[x_i, x_i] = F(x_i + 0) - F(x_i - 0). \quad (10)$$

Меры отрезков и полуинтервалов получаются по аддитивности прибавлением к $m(\alpha, \beta) = F(\beta - 0) - F(\alpha + 0)$ мер граничных точек (10).

В итоге для неубывающей функции $F(x)$, имеющей разрывы справа и слева в точках α и β, определяем меры всех отрезков, интервалов и полуинтервалов

$$m(\alpha, \beta) = F(\beta - 0) - F(\alpha + 0),$$
$$m[\alpha, \beta] = F(\beta + 0) - F(\alpha - 0),$$
$$m[\alpha, \beta) = F(\beta - 0) - F(\alpha - 0),$$
$$m(\alpha, \beta] = F(\beta + 0) - F(\alpha + 0). \quad (11)$$

Пусть теперь $F(x)$ есть разрывная (справа и слева в отдельных точках) функция с ограниченным изменением. Поэтому она может быть представлена в виде разности двух монотонных неубывающих разрывных (справа и слева в отдельных точках) функций, для каждой из которых справедлива формула (9). Объединяя множество точек разрыва этих двух функций в единое множество, приходим снова к формуле (9) для произвольной функции $F(x)$ с ограниченным изменением. Для

этой функции скачки в формуле (9) могут быть разных знаков. Непрерывная функция $\varphi(x)$ с ограниченным изменением в (9) определяется по исходной функции $F(x)$ и также может быть представлена в виде разности монотонных, но уже непрерывных функций.

Как следствие (10), интеграл Лебега-Стилтьеса в (9) не зависит от значений производящей функции $F(x)$ в ее точках разрыва, лежащих внутри интервала (a, b).

С помощью формулы (9) теорему о совпадении интеграла Лебега-Стилтьеса с интегралом Римана-Стилтьеса можно доказать не только на полуинтервале [1], с. 362, но и на отрезке. Автоматически отпадает необходимость доказательства ряда свойств и теорем, связанных с независимостью интеграла Римана-Стилтьеса от значений производящей функции в точках ее разрыва [1].

Теорема 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а $F(x)$ имеет ограниченное изменение на $[a, b]$, то ее интеграл Римана-Стилтьеса существует, совпадает с соответствующим интегралом Лебега-Стилтьеса и не зависит от значений функции $F(x)$ в ее точках разрыва внутри интервала (a, b).

Существование обоих интегралов очевидно. Для интеграла Римана-Стилтьеса достаточно для заданного ε выбрать такое δ, что в любом промежутке с длиной, меньшей δ, колебание ω функции $f(x)$ будет меньше $\varepsilon / [F(b) - Fa)]$ для монотонной $F(x)$. Пусть далее отрезок $[a, b]$ разбит на отрезки $[x_i, x_{i+1}]$ длиной меньше δ, где x_i – произвольная монотонно возрастающая последовательность из $n + 1$ точек. Тогда

$$\sum_i \omega_i [F(x_{i+1}) - F(x_i)] < \varepsilon , \qquad (12)$$

откуда следует существование интеграла Римана-Стилтьеса для неубывающей функции $F(x)$, а значит и для функции $F(x)$ с ограниченным изменением [5].

Поскольку предел интегральной суммы (интеграла Римана-Стилтьеса при $max\ \Delta x_i \to 0$)

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)[F(x_{i+1}) - F(x_i)] \qquad (13)$$

существует и не зависит от выбора промежуточных точек ξ_i [5], то можно считать $x_i \le \xi_i < x_{i+1}$. Но тогда сумму (13) можно рассматривать как интеграл Лебега-Стилтьеса от простой μ_F –измеримой ступенчатой функции

$$\psi_n(x) = f(\xi_i), x_i \le x < x_{i+1}, \qquad (14)$$

где производящая функция $F(x)$ считается непрерывной слева, первые две составляющие меры в (3), (6). Мера полуинтервала $[x_i, x_{i+1}]$ выражается формулой (5г). Функция (14) при $n \to \infty$ равномерно сходится к $f(x)$. Поэтому при переходе к пределу (по определению интеграла Лебега с мерой $\mu_F\ \mu_\varphi + \mu_H$) сумма (13) дает интеграл Лебега-Стилтьеса от функции $f(x)$ по полуинтервалу $[a, b]$, то есть первые два слагаемых интеграла по отрезку $[a, b]$ в (8), поскольку $h_N = 0$ в точке b.

Третья составляющая меры (3),(6) есть непрерывная справа функция скачков $g(x)$. Поскольку для нее интеграл Римана-Стилтьеса также существует, то справедливы предыдущие рассуждения, но уже для полуинтервала (x_i, x_{i+1}), для которого мера определяется формулой (5ж), $g(x_{i+1}) - g(x_i) = g(x_{i+1}) - g(x_{i+1} - 0) = g_{i+1}$. Переходя к пределу, получаем третье слагаемое в (8) при производящей функции $g(x)$. После объединения рядов в (8), для интеграла Римана-Стилтьеса снова приходим к формуле (9), где все интегралы должны быть заменены на интегралы Римана-Стилтьеса, а функция $F(x)$ является функцией с ограниченным изменением. Теорема доказана.

Одновременное включение в производящую функцию $F(x)$ функций скачков, непрерывных отдельно справа и слева, позволяет в условиях теоремы исключить определения интеграла Римана-Стилтьеса по различным полуинтервалам [1], а также использовать общее определение интеграла Римана-Стилтьеса по отрезку [5], в котором промежуточная точка ξ_i может принимать все значения из отрезка $[x_i, x_{i+1}]$.

Формула (9) также включает в себя ряд утверждений и теорем [1] о независимости интеграла Римана-Стилтьеса от значений $F(x)$ в точках ее разрыва, если интегрируемая функция непрерывна.

Использование для производящей функции интеграла Римана-Стилтьеса упрощенной функции скачков [11] приводит к тому, что функция $\varphi(x)$ в соответствующем разложении (3) оказывается разрывной

(с устранимыми разрывами). Однако в условиях теоремы 1 интеграл Римана-Стилтьеса не зависит от значений производящей функции в точках ее разрыва, так что окончательные выражения для интеграла Римана-Стилтьеса совпадают с (9).

Библиографический список

1. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1976. – 542 с.
2. Натансон, И.П. Теория функций действительной переменной / И.П. Натансон. – М.: Гостехиздат, 1957. – 552 с.
3. Свешников, А.Г. Нелинейный функциональный анализ и его приложения к уравнениям в частных производных / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов. – М.: Научный мир, 2008. – 399 с.
4. Богачев, В.И. Основы теории меры. В 2 т. Т. 2 Основы теории меры / В.И. Богачев. – М.: Научный мир, 2003. – 520 с.
5. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Наука, 1970. – 656 с.
6. Никольский, С.М. Курс математического анализа. Т. 2. Курс математического анализа / С.М. Никольский. – М.: Наука, 1973. – 391 с.
7. Никольский, С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С.М. Никольский. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
8. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1971. – 512 с.
9. Владимиров, В.С. Обобщенные функции в математической физике / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1971. – 318 с.
10. Шипов, Н.В. О свойствах функционала $P(1/x)$ в пространстве обобщенных функций медленного роста / Н.В. Шипов // Математика в ВУЗе, 2010. – Вып. 19. – С. 1–8. *http://www.spbstu/public/m_v/index.html*
11. Покорный, Ю.В. Осцилляционная теория Штурма-Лиувилля для импульсных задач / Ю.В. Покорный, М.Б. Зверев, С.А. Шабров // Успехи мат. наук., 2008. – Т. 63. – Вып. 1.– С. 111–153.

ABOUT LEBESGUE–STIELTJES INTEGRAL WITH DISCONTINUOUS GENERATING FUNCTION AND ITS CONNECTION WITH RIEMANN-STIELTJES INTEGRAL

Shipov N.V., Accoc. Prof. Ph.D. (Physics and Mathematics) [(1)]

caf-math@mgul.ac.ru, nvshi@mail.ru

[(1)]Moscow Forest State University (MSFU), 1st Institutskaya st., 1, 141005 Mytishchi, Moscow reg., Russia

The widest class of generating functions for the Lebesgue-Stieltjes measure of the set and for the Lebesgue-Stieltjes Integral is the class of bounded variation functions. It is known, that the function of bounded variation can be written in the form of difference of two discontinuous monotone nondecreasing functions. It is convenient to explain the properties of Lebesgue – Stieltjes Integral and the properties of Lebesgue-Stieltjes measure in the case, when the monotone nondecreasing generating function is continuous from the left. It is offered sometimes to overdetermine the discontinuous generating function (discontinuous from the left and discontinuous from the right). Then the resulting generating function turns out to be continuous from the left. Discontinuous generating function of a bounded variation over the segment [a, b] is decomposed in the sum of continuous functions of bounded variation, a jump function (continuous from the left) and a jump function (continuous from the right). Lebesgue-Stieltjes measure of the set with respect to these three functions and the appropriate Lebesgue-Stieltjes integral decomposition are represented by the three relevant terms in the sum. Lebesgue-Stieltjes Integral is not depending on the values of the generating function at the jump dots. It follows from these decompositions that if the function under the integral is continuous over the segment [a, b], then the appropriate Lebesgue-Stieltjes Integral over the segment [a, b] is the same as the appropriate Riemann– Stieltjes Integral over the segment [a, b], not only over the half-interval [a, b].

Keywords: generating function, jump function, Lebesgue-Stieltjes measure, Lebesgue-Stieltjes Integral, Riemann-Stieltjes Integral

References

1. Kolmogorov, A.N., Fomin, S.V. *Elementy teorii funktsiy i funktsional`nogo analiza* [Elements of the theory of functions and functional analysis]. Moscow: Nauka Publ., 1976. 542 p.
2. Natanson, I.P. *Teoriya funktsiy deystvitel'noy peremennoy* [Theory of functions of the valid variable]. Moscow: Gostekhizdat Publ., 1957. 552 p.
3. Sveshnikov A.G., Al'shin A.B., Korpusov M.O. *Nelineynyy funktsional'nyy analiz i ego prilozheniya k uravneniyam v chastnykh proizvodnykh* [The nonlinear functional analysis and its annexes to the equations in private derivatives]. Moscow: Nauchnyy mir Publ., 2008. 399 p.
4. Bogachev V.I. *Osnovy teorii mery* [Bases of the theory of a measure]. Moscow, Nauchnyy mir Publ., 2003. T. 2. 520 p.
5. Fikhtengol'ts G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. T. 3. Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [Course of differential and integral calculus.]. Moscow: Nauka Publ., 1970. 656 p.
6. Nikol'skiy S.M. *Kurs matematicheskogo analiza* [Course of the mathematical analysis]. Moscow: Nauka Publ., 1973. 391 p.
7. Nikol'skiy S.M. *Priblizhenie funktsiy mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniya* [Approach of functions of many variables and theorem of an investment]. Moscow: Nauka Publ., 1969. 480 p.
8. Vladimirov V.S. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 512 p.
9. Vladimirov, V.S. *Obobshchennye funktsii v matematicheskoy fizike* [The generalized functions in mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 318 p.
10. Shipov, N.V. *O svoystvakh funktsionala P(1/x) v prostranstve obobshchennykh funktsiy medlennogo rosta* [About properties of functionality of P(1/x) in space of the generalized functions of slow growth]. Mathematics in higher education institution. St. Petersburg state polytechnical university, 2010. № 19. pp. 1-8. http://www.spbstu/public/m_v/index.html (Accessed 20 April 2010).
11. Pokornyy Yu.V., Zverev M.B., Shabrov S.A. *Ostsillyatsionnaya teoriya Shturma-Liuvillya dlya impul'snykh zadach* [The oscillation theory of Storm Liouville for pulse tasks]. Achievements of Mathematical Sciences, 2008, Vol. 63, № 1, pp. 111-153.