МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

ОБОСНОВАНИЕ СХОДИМОСТИ В РАВНОМЕРНОЙ НОРМЕ МЕТОДА ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ ДЛЯ ПОЛНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НА ОКРУЖНОСТИ

© 2008 г. М.Э. Абрамян

Южный федеральный университет,
344090, Ростов н/Д, ул. Мильчакова, 8а,
mabr@math.rsu.ru

Southern Federal University,
344090, Rostov-on-Don, Milchakov Str., 8a,
mabr@math.rsu.ru

*Рассматривается полное сингулярное интегральное уравнение **(aI + bS + K) f = g** , где **S** – оператор сингулярного интегрирования на единичной окружности Г; I – единичный оператор; **a, b, g** – комплекснозначные функции, определенные на Г и удовлетворяющие условию Гельдера с показателем $\alpha\in(0,1)$; **K** – интегральный оператор с ядром κ, определенным на Г х Г и удовлетворяющим условию Гельдера с показателем α по совокупности переменных. Исследуется приближенный метод решения данного уравнения, основанный на аппроксимации интегралов с помощью составных квадратурных формул типа прямоугольников. Дается обоснование сходимости метода в равномерной норме в предположении, что интегральный оператор **aI + bS + K** обратим в L_2 (Г) и для функций **a, b** выполняется условие сильной эллиптичности.*

Ключевые слова: сингулярное интегральное уравнение, дискретизация интеграла по формуле прямоугольников, условие сильной эллиптичности.

L_∞-convergence of the approximation method based on the compound quadrature formula of rectangular type for singular integral operators with continuous coefficients is proved.

Keywords: singular integral equation, discretization of integral operators by the rectangular method, strong ellipticity condition.

Работа продолжает исследования приближенного метода решения сингулярных интегральных уравнений в классах гельдеровских функций, основанного на аппроксимации сингулярного интеграла посредством составной квадратурной формулы типа прямоугольников [1–3]. Ранее подобные методы изучались С.М. Белоцерковским и И.К. Лифановым в связи с методом дискретных вихрей [4, 5].

В частности, ими был рассмотрен вариант формулы прямоугольников, в котором подынтегральная функция *f* вычисляется на концах участка разбиения (отрезка или дуги окружности), а приближенное значение интеграла *Sf* находится в средних точках участков разбиения. Такая схема работает в случае простейшего уравнения вида $Sf = g$ на отрезке или на окружности [4, с. 73–78, 105–106; 5, с. 366–371]. Однако из-за того, что дискретизация функций f и g проводится по разным наборам узлов, перенос подобной схемы на уравнения вида $(aI+bS)f = g$ оказывается невозможным.

В предлагаемом методе используется вариант формулы прямоугольников для сингулярного интеграла на окружности, в котором как подынтегральная функция, так и приближенное значение интеграла вычисляются на одном и том же множестве точек (образующем равномерное разбиение окружности). Это позволяет применять данную формулу для сингулярных уравнений вида $(aI+bS)f = g$ и $(aI+bS+K)f = g$ [1, 3], а также для бисингулярных интегральных уравнений вида $(aI+bS_1+cS_2+dS_1S_2)f = g$ [2].

В настоящей работе дается обоснование сходимости метода прямоугольников в векторной L_∞-норме. Как и в [3], рассматривается полное сингулярное интегральное уравнение вида $(aI+bS+K)f = g$, где *a* и *b* – гельдеровские функции; *K* – интегральный оператор с гельдеровским ядром. Предполагается, что данное уравнение разрешимо в $L_2(\Gamma)$, а коэффициенты *a* и *b* удовлетворяют условию сильной эллиптичности.

1. Формулировка основного результата и схема доказательства

Пусть Г – единичная окружность в комплексной плоскости **C**. Обозначим через $H_\alpha(\Gamma)$ множество всех определенных на Г комплекснозначных функций *f*, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем α ($\in(0,1)$): $|f(t_1)-f(t_2)|\le A|t_1-t_2|^\alpha$, $t_1,t_2\in\Gamma$, где $A=A(f)$ – коэффициент Гельдера для функции *f*, независящий от выбора точек t_1, t_2.

Через $H_\alpha(\Gamma\times\Gamma)$ будем обозначать множество всех определенных на Г комплекснозначных функций двух переменных, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем α ($\in(0,1)$) по совокупности переменных:

$$|f(t_1,\tau_1)-f(t_2,\tau_2)|\le A(|t_1-t_2|^\alpha+|\tau_1-\tau_2|^\alpha),$$
$t_1,t_2,\tau_1,\tau_2\in\Gamma$.

Через $\mathbf{H}_\alpha$, $\alpha \in (0,1)$, обозначим множество всех интегральных операторов с ядром из класса $H_\alpha(\Gamma \times \Gamma)$, действующих на множестве $\bigcup_{\alpha \in (0,1)} H_\alpha(\Gamma)$. Используем следующие обозначения: $\mathbf{H}_{\alpha-0} = \bigcup_{\beta \in (0,\alpha)} \mathbf{H}_\beta$, $\mathbf{H} = \bigcup_{\alpha \in (0,1)} \mathbf{H}_\alpha$.

Пусть S – оператор сингулярного интегрирования $(Sf)(t) = \dfrac{1}{\pi i} \int_\Gamma \dfrac{f(\tau) d\tau}{\tau - t}$, $t \in \Gamma$, где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Рассмотрим полное сингулярное интегральное уравнение

$$(aI + bS + K)x = y, \tag{1}$$

где $a, b, y \in H_\alpha(\Gamma)$, I – единичный оператор, $K \in \mathbf{H}_\alpha$. Будем предполагать, что оператор $D = aI + bS + K$ является обратимым в $L_2(\Gamma)$. Это, в частности, означает, что для любой функции $y \in H_\alpha(\Gamma)$ существует единственное решение $\tilde{x}$ уравнения (1), также принадлежащее $H_\alpha(\Gamma)$.

Зафиксируем $n \in \mathbf{N}$ и определим на контуре Γ точки $t_n^m = (t_n)^m$, $m \in \mathbf{N}$, где $t_n = \exp(2\pi i / n)$.

Будем называть *n-мерной дискретизацией непрерывной на* Γ *функции f* вектор $[f]^{(n)} = (f(t_n^0), f(t_n^1), \ldots, f(t_n^{n-1})) \in \mathbf{C}^n$; *n-мерной дискретизацией сингулярного интегрального оператора S по формуле прямоугольников* – оператор умножения на матрицу $S_n = \left\| s_{ml}^{(n)} \right\|_{m,l=0}^{n-1}$ с элементами

$$s_{ml}^{(n)} = \begin{cases} 0, & m = l, \\ \dfrac{1}{\pi i} \dfrac{t_n^{l+1} - t_n^l}{t_n^l - t_n^m}, & m \neq l. \end{cases}$$

Определим n-мерную дискретизацию оператора $K \in \mathbf{H}$ с ядром k как оператор умножения на матрицу $[K]_n = \left\| k_{ml}^{(n)} \right\|_{m,l=0}^{n-1}$ с элементами $k_{ml}^{(n)} = k(t_n^m, t_n^l) \times (t_n^{l+1} - t_n^l)$, $m, l = 0, \ldots, n-1$.

Для непрерывной на Γ функции f обозначим через $d_n(f)$ диагональную матрицу порядка n с диагональными элементами $f(t_n^0), f(t_n^1), \ldots, f(t_n^{n-1})$; в частности, $d_n(1) = I_n$ – единичная матрица порядка n.

В пространстве $\mathbf{C}^n$ будем рассматривать следующую норму: $\left\| z^{(n)} \right\|_{(n)} = \max_{m=0,\ldots,n-1} | z_m^{(n)} |$. Матричная норма, подчиненная данной векторной норме, имеет вид [6, п. 14.58] $\| A_n \|_{(n)} = \max_{m=0,\ldots,n-1} \sum_{l=0}^{n-1} | a_{ml}^{(n)} |$.

Поставим уравнению (1) в соответствие систему линейных уравнений

$$(d_n(a) + d_n(b) S_n + [K]_n) x^{(n)} = [y]^{(n)}, \tag{2}$$

где $[y]^{(n)}$ – n-мерная дискретизация функции $y \in H_\alpha(\Gamma)$.

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть оператор D является обратимым в $L_2(\Gamma)$, а для функций a и b выполняется условие сильной эллиптичности:

$$a(t) + \lambda b(t) \neq 0, \quad \lambda \in [-1, 1], \quad t \in \Gamma. \tag{3}$$

Тогда для всех $n \in \mathbf{N}$, начиная с некоторого $n_0 = n_0(D)$, система (*2*) имеет единственное решение $\tilde{x}^{(n)}$, которое связано с решением $\tilde{x}$ уравнения (*1*) следующим образом: $\left\| [\tilde{x}]^{(n)} - \tilde{x}^{(n)} \right\|_{(n)} < C n^{-\alpha} \times (\ln n + 1)^{2/\alpha + 4}$, где $C = C(D, y)$ не зависит от n.

В дальнейшем константы, не зависящие от n, обозначаются буквой C. На протяжении всей работы используются следующие обозначения: $D_n^{(0)} = d_n(a) + d_n(b) S_n$; $D_n = D_n^{(0)} + [K]_n$; $D_{n,\xi} = a(\xi) I_n + b(\xi) S_n$, $\xi \in \Gamma$.

Кратко опишем схему доказательства. Используем некоторую модификацию схемы, примененной в [3]. Необходимость модификации обусловлена тем, что в [3] рассматривалась другая векторная норма в $\mathbf{C}^n$, а именно $\left\| z^{(n)} \right\|_{(2,n)} = n^{-1/2} \left(\sum_{m=0}^{n-1} | z_m^{(n)} |^2 \right)^{1/2}$, являющаяся дискретным аналогом L_2-нормы. В данной норме матрицы D_n равномерно ограничены по n, а матрицы $D_{n,\xi}$, кроме того, равномерно обратимы по n, начиная с некоторого n_0, для любого $\xi \in \Gamma$ (данный факт установлен в [1]). Это позволило ввести в рассмотрение банахову алгебру $\mathbf{A}$ ограниченных последовательностей матриц и свести обоснование равномерной обратимости матриц D_n к обратимости соответствующего смежного класса в фактор-алгебре $\mathbf{A}$ по идеалу $\Im_0$ всех семейств матриц $\{A_n\}$ таких, что $\| A_n \|_{(2,n)} \to 0$ при $n \to \infty$. Для обоснования обратимости $\{D_n + \Im_0\}$ в фактор-алгебре $\mathbf{A} / \Im_0$ использован прием из [7], состоящий во введении в рассмотрение двух вспомогательных идеалов $\Im_k$ и $\Im_s$, выбранных таким образом, что обратимость в соответствующих фактор-алгебрах влечет обратимость в $\mathbf{A} / \Im_0$.

В случае дискретного аналога L_∞-нормы, рассматриваемого в настоящей работе, матрицы D_n не являются равномерно ограниченными по n (для нормы S_n имеет место логарифмический рост), поэтому методы банаховых алгебр применить не удается. Однако и в этой ситуации доказано существование обратных матриц D_n^{-1}, начиная с некоторого n_0, и обоснован не более чем логарифмический рост норм этих матриц по n, что оказалось достаточным для доказательства теоремы 1 (см. п. 7–8). Построение семейства обратных матриц $\{D_n^{-1}\}$ проводится с помощью двух вспомогательных семейств матриц $\{D_n^{(1)}\}$ и $\{D_n^{(2)}\}$, причем способ построения семейства $\{D_n^{(2)}\}$ (см. п. 6) аналогичен способу построения в [3] обратного смежного класса в фактор-алгебре по $\Im_s$ (требуется лишь провести более точные оценки). Построение семейства $\{D_n^{(1)}\}$ является более сложным. Это объясняется тем, что аналогичное построение в [3] обратного смежного класса в фактор-алгебре по $\Im_k$ было основано на равномерной обратимости матриц $D_{n,\xi}$ и проводилось с использованием локального принципа Гохберга–Крупника [8, гл. XII, § 1]. В нашем случае равномерная обратимость матриц $D_{n,\xi}$ не имеет места, поэтому применить *результат* локального принципа не удается. Однако семейство $\{D_n^{(1)}\}$ можно построить, проводя *рассуждения*, аналогичные тем, которые применялись для обоснования локального принципа (см. п. 5). При этом используется специальное семейство локализующих функций, описание которых приводится в п. 4.

2. Свойства матрицы S_n

Доказательства приведенных в данном пункте свойств основаны на теории циркулянтов и содержатся в [1].

1. Пусть $f \in H_\alpha(\Gamma)$, $\alpha \in (0,1)$. Тогда для любого $n \in \mathbf{N}$ справедлива оценка $\left\| [Sf]^{(n)} - S_n[f]^{(n)} \right\|_{(n)} <$ $< Cn^{-\alpha}(\ln n+1)\|f\|_\alpha$, где C не зависит от f, n и α; $\|\cdot\|_\alpha$ – гельдеровская норма порядка α : $\|f\|_\alpha =$ $= \max_{t\in\Gamma} |f(t)| + \sup_{\substack{t,\tau\in\Gamma \\ t\neq\tau}} \dfrac{|f(t)-f(\tau)|}{|t-\tau|^\alpha}$.

2. *Для матрицы* $D_{n,\xi}$ *при любом* $\xi \in \Gamma$ *справедлива оценка* $\left\| D_{n,\xi} \right\|_{(n)} < C(\ln n+1)$, *где C не зависит от n и* ξ. *Аналогичная оценка справедлива и для матрицы* $D_n^{(0)}$.

3. Если a и b удовлетворяют условию (3), то существует такое $n_0 = n_0(a,b) \in \mathbf{N}$, что для $n \ge n_0$ и любых $\xi \in \Gamma$ матрицы $D_{n,\xi}$ являются обратимыми, причем для данных n

$$\left\| D_{n,\xi}^{-1} \right\|_{(n)} < C(\ln n+1), \qquad (4)$$

где C не зависит от n и ξ.

3. Свойства дискретизаций интегральных операторов $K \in \mathbf{H}$

Доказательства данных результатов содержатся в [9].

1. Пусть $n \in \mathbf{N}$, $K \in \mathbf{H}$ – интегральный оператор с ядром $k(t,\tau)$. Тогда

$$\left\| [K]_n \right\|_{(n)} \le 2\pi \times \times \max_{m,l=0,\dots,n-1} |k(t_n^m, t_n^l)| .$$

Отметим, что из данного свойства и свойства 2 п. 2 вытекает оценка

$$\left\| D_n \right\|_{(n)} < C(\ln n+1). \qquad (5)$$

2. Пусть $K_1, K_2 \in \mathbf{H}_\alpha$, $\alpha \in (0,1)$. Тогда для дискретизаций интегрального оператора K_1K_2 $(\in \mathbf{H}_\alpha)$ имеет место оценка: $\left\| [K_1K_2]_n - [K_1]_n[K_2]_n \right\|_{(n)} <$ $< Cn^{-\alpha}$.

3. Пусть $f \in H_\alpha(\Gamma)$, $K \in \mathbf{H}_\alpha$, $\alpha \in (0,1)$. Тогда для любого $n \in \mathbf{N}$ справедлива оценка

$$\left\| [Kf]^{(n)} - [K]_n[f]^{(n)} \right\|_{(n)} < Cn^{-\alpha}.$$

4. Пусть $K \in \mathbf{H}_\alpha$, $\alpha \in (0,1)$. Тогда $SK \in \mathbf{H}_{\alpha-0}$, $KS \in \mathbf{H}_{\alpha-0}$ и имеют место оценки $\left\| [SK]_n - \right.$ $\left. - S_n[K]_n \right\|_{(n)} < Cn^{-\alpha}(\ln n+1)$, $\left\| [KS]_n - [K]_nS_n \right\|_{(n)} <$ $< Cn^{-\alpha}(\ln n+1)$.

5. Для $K \in \mathbf{H}_\alpha$, $\alpha \in (0,1)$, имеет место оценка $\left\| (I_n - S_n^2)[K]_n \right\|_{(n)} < Cn^{-\alpha}$.

4. Описание семейства локализующих функций

Будем считать, что ветвь функции arg определена в комплексной плоскости с разрезом по отрицательной вещественной полуоси: $-\pi < \arg z \le \pi$.

Пусть $\xi \in \Gamma$, $\delta \in (0,1)$. Введем обозначения: $\xi^{(\pm)} = \xi\exp(\pm i\delta)$, $\xi_1^{(\pm)} = \xi\exp(\pm i\delta/2)$, $\xi_2^{(\pm)} = \xi \times$ $\times \exp(\pm 3i\delta/2)$, $\Gamma_\delta^{(1)} = \{t \in \Gamma, |\arg(t/\xi)| < \delta/2\}$, $\Gamma_\delta^{(\pm)} =$ $= \{t \in \Gamma, |\arg(t/\xi^{(\pm)})| < \delta/2\}$, $\Gamma_\delta^{(0)} = \{t \in \Gamma, |\arg(t/\xi)| >$ $> 3\delta/2\}$.

Определим функцию, которую будем называть *локализующей функцией порядка* δ *в точке* ξ :

$$\psi_{\xi,\delta}(t) = \begin{cases} 1, & t \in \overline{\Gamma_\delta^{(1)}}, \\ \exp\left(1 - \dfrac{\delta^2}{\delta^2 - \arg^2(t/\xi_1^{(\pm)})}\right), & t \in \Gamma_\delta^{(\pm)}, \\ 0, & t \in \overline{\Gamma_\delta^{(0)}}. \end{cases}$$

Эта функция непрерывна на Γ, равна 1 на дуге длины δ, центром которой является точка ξ, и равна 0 вне дуги длины 3δ с центром в этой же точке. Нетрудно показать [9], что данная функция бесконечно дифференцируема на всем контуре Γ.

5. Построение вспомогательного семейства матриц $D_n^{(1)}$

Данное построение проведем по схеме, использованной при обосновании локального принципа Гохберга–Крупника [8, гл. XII, § 1]. Сформулируем две леммы, доказательство которых содержится в [9].

Лемма 1. Для любых $n \in \mathbf{N}$, $\xi \in \Gamma$, $\delta \in (0,1)$ имеет место оценка

$$\left\| d_n(\psi_{\xi,\delta})(D_{n,\xi} - D_n^{(0)}) \right\|_{(n)} < C(\ln n + 1)\delta^{\alpha}, \qquad (6)$$

где α – показатель Гельдера функций *a* и *b*, входящих в определение $D_n^{(0)}$ и $D_{n,\xi}$, *C* не зависит от *n*, ξ, δ.

Лемма 2. Для любых $n \in \mathbf{N}$, $\xi \in \Gamma$, $\delta \in (0,1)$ имеет место следующее соотношение: $D_n^{(0)} d_n(\psi_{\xi,\delta}) - d_n(\psi_{\xi,\delta}) D_n^{(0)} = d_n(b)([K_{\xi,\delta}]_n + \Delta_{\xi,\delta,n})$, где $K_{\xi,\delta}$ – интегральный оператор с бесконечно дифференцируемым ядром; $\Delta_{\xi,\delta,n}$ – диагональная матрица, для нормы которой справедлива оценка

$$\left\| \Delta_{\xi,\delta,n} \right\|_{(n)} < C(\delta n)^{-1}, \qquad (7)$$

где *C* не зависит от *n*, ξ, δ.

Рассмотрим матрицу $d_n(\psi_{\xi,\delta})(D_{n,\xi} - D_n^{(0)}) D_{n,\xi}^{-1}$ и подберем δ таким образом, чтобы ее норма была меньше 1. В силу (4) и (6),

$$\left\| d_n(\psi_{\xi,\delta})(D_{n,\xi} - D_n^{(0)}) D_{n,\xi}^{-1} \right\|_{(n)} < C(\ln n + 1)^2 \delta^{\alpha}. \qquad (8)$$

Следовательно, в качестве δ можно взять

$$\delta_n' = (\ln n + 1)^{-2/\alpha} (2C)^{-1/\alpha}, \qquad (9)$$

где *C* – константа из правой части (8).

Обозначив $U_{n,\xi} = d_n(\psi_{\xi,\delta_n'})(D_{n,\xi} - D_n^{(0)}) D_{n,\xi}^{-1}$, получаем $\left\| U_{n,\xi} \right\|_{(n)} < 1/2$. Следовательно, матрица $I_n - U_{n,\xi}$ обратима и

$$\left\| (I_n - U_{n,\xi})^{-1} \right\|_{(n)} < 2. \qquad (10)$$

Положим $M_n = [6\pi/\delta_n'] + 1$, $\delta_n = 2\pi/M_n$. В силу (9) для M_n справедлива оценка

$$M_n < C(\ln n + 1)^{2/\alpha}. \qquad (11)$$

Далее

$$\delta_n < \delta_n'/3 \qquad (12)$$

и, следовательно, $\psi_{\xi,\delta_n}(t) \cdot \psi_{\xi,\delta_n'}(t) = \psi_{\xi,\delta_n}(t)$, $t \in \Gamma$.

Учитывая последнее равенство, выполним следующие преобразования:

$$\begin{aligned} & d_n(\psi_{\xi,\delta_n}) \cdot D_n^{(0)} D_{n,\xi}^{-1} = \\ & = d_n(\psi_{\xi,\delta_n}) \cdot \left[D_{n,\xi} D_{n,\xi}^{-1} - (D_{n,\xi} - D_n^{(0)}) D_{n,\xi}^{-1} \right] = \\ & = d_n(\psi_{\xi,\delta_n}) \cdot \left[I_n - d_n(\psi_{\xi,\delta_n'})(D_{n,\xi} - D_n^{(0)}) D_{n,\xi}^{-1} \right] = \\ & = d_n(\psi_{\xi,\delta_n}) \cdot (I_n - U_{n,\xi}). \end{aligned}$$

В силу обратимости $I_n - U_{n,\xi}$ окончательно получаем

$$d_n(\psi_{\xi,\delta_n}) = d_n(\psi_{\xi,\delta_n}) \cdot D_n^{(0)} D_{n,\xi}^{-1} (I_n - U_{n,\xi})^{-1}. \qquad (13)$$

Введем в рассмотрение систему функций $\psi_n^{(m)}(t) = \psi_{\xi_n^m,\delta_n}(t)$, где $\xi_n^m = t_{M_n}^m$, $m = 0,\ldots,M_n - 1$, а также функцию $\psi_n(t) = \sum_{m=0}^{M_n-1} \psi_n^{(m)}(t)$. Легко видеть, что $\psi_n(t) \in (1,3)$, $t \in \Gamma$, и, следовательно,

$$|1/\psi_n(t)| < 1, \quad t \in \Gamma. \qquad (14)$$

Теперь рассмотрим семейство матриц

$$D_n^{(1)} = \sum_{m=0}^{M_n-1} d_n(\psi_n^{(m)}) D_{n,\xi_n^m}^{-1} (I_n - U_{n,\xi_n^m})^{-1} d_n(1/\psi_n).$$

С учетом (4), (10), (11), (14) их нормы оцениваются следующим образом:

$$\left\| D_n^{(1)} \right\|_{(n)} < C(\ln n + 1)^{2/\alpha + 1}. \qquad (15)$$

Обратимся к произведению $D_n^{(0)} D_n^{(1)}$. Учитывая лемму 2 и (13) и используя обозначение

$$\begin{aligned} V_n = {} & d_n(b) \sum_{m=0}^{M_n-1} ([K_{\xi_n^m,\delta_n}]_n + \Delta_{\xi_n^m,\delta_n,n}) \times \\ & \times D_{n,\xi_n^m}^{-1} (I_n - U_{n,\xi_n^m})^{-1} d_n(1/\psi_n), \end{aligned} \qquad (16)$$

данное произведение можно представить в виде

$$D_n^{(0)} D_n^{(1)} = \sum_{m=0}^{M_n-1} d_n(\psi_n^{(m)}) d_n(1/\psi_n) + V_n = I_n + V_n.$$

Для $D_n D_n^{(1)}$, таким образом, имеем

$$D_n D_n^{(1)} = I_n + V_n + [K]_n D_n^{(1)}. \qquad (17)$$

6. Построение вспомогательного семейства матриц $D_n^{(2)}$

Положим $\tilde{a} = a/(a^2 - b^2)$, $\tilde{b} = -b/(a^2 - b^2)$. В силу (3) $\tilde{a}, \tilde{b} \in H_{\alpha}(\Gamma)$; кроме того, $(aI + bS) \times (\tilde{a}I + \tilde{b}S) = I$.

Рассмотрим оператор $D' = D(\tilde{a}I + \tilde{b}S) = I + K'$, где $K' = K(\tilde{a}I + \tilde{b}S) \in \mathbf{H}_{\alpha-0}$ (см. п. 3, свойство 4). Так как оператор *D* по условию обратим, получаем, что оператор D' также обратим, и $(D')^{-1} = (aI + bS)D^{-1}$. Учитывая, что $D' = I + K'$, где K' принадлежит $\mathbf{H}_{\alpha-0}$ и, следовательно, имеет непрерывное ядро, заключаем, что оператор $(D')^{-1}$ представим в виде $(D')^{-1} = I + \tilde{K}'$, где $\tilde{K}'$ является интегральным оператором с непрерывным ядром $\tilde{k}'$ [10, § 4, п. 4.2]. Используя этот факт, нетрудно показать [9], что $\tilde{K}' \in \mathbf{H}_{\alpha-0}$. Таким образом, оператор D^{-1} представим в виде $D^{-1} = (\tilde{a}I + \tilde{b}S)(D')^{-1} = \tilde{a}I + \tilde{b}S + \tilde{K}$, где $\tilde{K} = (\tilde{a}I + \tilde{b}S)\tilde{K}' \in \mathbf{H}_{\alpha-0}$ в силу свойства 4 из п. 3.

Введем в рассмотрение следующее семейство матриц: $D_n^{(2)} = d_n(\tilde{a}) + d_n(\tilde{b}) S_n + [\tilde{K}]_n$, $n \in \mathbf{N}$. Используя свойство 2 из п. 2 и свойство 1 из п. 3, получаем оценку

$$\left\| D_n^{(2)} \right\|_{(n)} < C(\ln n + 1). \qquad (18)$$

Лемма 3. Для любого интегрального оператора $B \in \mathbf{H}_{\alpha}$ справедлива следующая оценка:

$$\left\| (D_n D_n^{(2)} - I_n)[B]_n \right\|_{(n)} < C n^{-\alpha+0} (\ln n + 1)^2.$$

Доказательство данной леммы содержится в [9]. Используется свойство 2 из п. 2, свойства 2, 5 из п. 3, а также следующее соотношение, которому удовлетворяет оператор $\tilde{K}$:

$$(aI+bS)\widetilde{K}+K(\widetilde{a}I+\widetilde{b}S)+K\widetilde{K}+$$
$$+b(S\widetilde{a}I-\widetilde{a}S)+b(S\widetilde{b}I-\widetilde{b}S)S=0.$$

7. Построение матрицы, обратной к D_n

Воспользуемся идеей из [7] и положим $D_n^{(3)}=D_n^{(2)}+D_n^{(1)}-D_n^{(2)}D_nD_n^{(1)}$. В силу (5), (15) и (18) норма данной матрицы оценивается следующим образом:

$$\left\|D_n^{(3)}\right\|_{(n)}<C(\ln n+1)^{2/\alpha+3}. \qquad (19)$$

Легко убедиться в справедливости соотношения

$$D_nD_n^{(3)}-I_n=-(D_nD_n^{(2)}-I_n)(D_nD_n^{(1)}-I_n).$$

С учетом (17) правая часть последнего соотношения принимает вид

$$-(D_nD_n^{(2)}-I_n)V_n-(D_nD_n^{(2)}-I_n)[K]_nD_n^{(1)}. \qquad (20)$$

Оценим норму последнего слагаемого. Так как $K\in\mathbf{H}_\alpha$, то в силу леммы 3 $\left\|(D_nD_n^{(2)}-I_n)[K]_n\right\|_{(n)}<$ $<Cn^{-\alpha+0}(\ln n+1)^2$ и с учетом (15) норма последнего слагаемого в (20) оценивается величиной $Cn^{-\alpha+0}(\ln n+1)^{2/\alpha+3}$.

Теперь обратимся к первому слагаемому в (20). Согласно определению (16) матрицы V_n, достаточно проанализировать следующие выражения:

$$(D_nD_n^{(2)}-I_n)\sum_{m=0}^{M_n-1}[bK_{\xi_n^m,\delta_n}]_n\cdot V'_{n,\xi_n^m}, \qquad (21)$$

$$(D_nD_n^{(2)}-I_n)d_n(b)\sum_{m=0}^{M_n-1}\Delta_{\xi_n^m,\delta_n,n}\cdot V'_{n,\xi_n^m}, \qquad (22)$$

где $V'_{n,\xi_n^m}=D^{-1}_{n,\xi_n^m}(I_n-U_{n,\xi_n^m})^{-1}d_n(1/\psi_n)$, причем в силу (4), (10) и (14)

$$\left\|V'_{n,\xi_n^m}\right\|_{(n)}<C(\ln n+1). \qquad (23)$$

Согласно лемме 2, оператор $K_{\xi,\delta}$ для любых $\xi\in\Gamma$, $\delta\in(0,1)$ является интегральным оператором с бесконечно дифференцируемым ядром, поэтому $bK_{\xi,\delta}\in\mathbf{H}_\alpha$ и в силу леммы 3 $\left\|(D_nD_n^{(2)}-I_n)[bK_{\xi,\delta}]_n\right\|_{(n)}<$ $<Cn^{-\alpha+0}(\ln n+1)^2$. Таким образом, учитывая оценку (11) для M_n, а также (23), выражение (21) можно оценить величиной $Cn^{-\alpha+0}(\ln n+1)^{2/\alpha+3}$.

Для выражения (22) воспользуемся оценкой (7) нормы матрицы $\Delta_{\xi_n^m,\delta_n,n}$. Поскольку в силу (9) и (12) $\delta_n<C(\ln n+1)^{-2/\alpha}$, имеем

$$\left\|\Delta_{\xi_n^m,\delta_n,n}\right\|_{(n)}<Cn^{-1}(\ln n+1)^{2/\alpha}.$$

В силу (5) и (18) $\left\|D_nD_n^{(2)}-I_n\right\|_{(n)}<C(\ln n+1)^2$. Учитывая два последних неравенства, а также оценки (11) и (23), получаем, что выражение (22) можно оценить величиной $Cn^{-1}(\ln n+1)^{4/\alpha+3}$.

Объединяя полученные оценки, имеем $D_nD_n^{(3)}-$ $-I_n=\Delta_n$, где $\|\Delta_n\|_{(n)}<C(n^{-\alpha+0}+n^{-1}\times(\ln n+1)^{2/\alpha})\times$ $\times(\ln n+1)^{2/\alpha+3}$.

Таким образом, для всех $n\in\mathbf{N}$, начиная с некоторого n_0, матрица $I_n+\Delta_n$ является обратимой, норма матрицы $(I_n+\Delta_n)^{-1}$ равномерно по n ограничена, и в качестве матрицы, обратной D_n, можно взять $D_n^{-1}=D_n^{(3)}(I_n+\Delta_n)^{-1}$, причем, согласно (19), для всех $n\geq n_0$ имеет место оценка

$$\left\|D_n^{-1}\right\|_{(n)}<C(\ln n+1)^{2/\alpha+3}. \qquad (24)$$

Таким образом, существование единственного решения системы уравнений (2) доказано для всех $n\geq n_0$.

8. Доказательство оценки теоремы 1

Пусть $\widetilde{x}$ – решение уравнения (1), $\widetilde{x}^{(n)}$ – решение системы уравнений (2). Разность $D_n[\widetilde{x}]^{(n)}-D_n\widetilde{x}^{(n)}$ можно преобразовать к виду $d_n(b)(S_n[\widetilde{x}]^{(n)}-$ $-[S\widetilde{x}]^{(n)})+([K]_n[\widetilde{x}]^{(n)}-[K\widetilde{x}]^{(n)})$. Учитывая свойство 1 из п. 2 и свойство 3 из п. 3, получаем

$$\left\|D_n[\widetilde{x}]^{(n)}-D_n\widetilde{x}^{(n)}\right\|_{(n)}<Cn^{-\alpha}(\ln n+1).$$

Осталось применить оценку $\left\|[\widetilde{x}]^{(n)}-\widetilde{x}^{(n)}\right\|_{(n)}\leq$ $\leq\left\|D_n^{-1}\right\|_{(n)}\cdot\left\|D_n[\widetilde{x}]^{(n)}-D_n\widetilde{x}^{(n)}\right\|_{(n)}$ и воспользоваться оценкой (24). Теорема 1 полностью доказана.

Автор глубоко признателен профессору В.С. Пилиди за обсуждение настоящей работы и высказанные при этом многочисленные полезные замечания.

Литература

1. *Абрамян М.Э., Пилиди В.С.* Обоснование метода прямоугольников для сингулярного интегрального уравнения с постоянными коэффициентами на окружности. Ростов н/Д, 1998. Деп. в ВИНИТИ 27.07.1998. № 2385–В98.
2. *Абрамян М.Э., Пилиди В.С.* О сходимости метода прямоугольников для бисингулярного интегрального уравнения с постоянными коэффициентами на окружности // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2005. Спецвыпуск. Псевдодиф. уравнения и некоторые проблемы мат. физики. С. 13–21.
3. *Абрамян М.Э.* Обоснование сходимости метода прямоугольников для полного сингулярного интегрального уравнения с непрерывными коэффициентами на окружности // Мат. заметки. 2005. Т. 77. Вып. 2. С. 163–175.
4. *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М., 1985.
5. *Лифанов И.К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн. М., 1995.
6. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. М., 1984.

7. *Пилиди В.С.* Критерии равномерной обратимости регулярных аппроксимаций одномерных сингулярных интегральных операторов с кусочно непрерывными коэффициентами // Изв. АН СССР. Серия мат. 1990. Т. 54. № 6. С. 1270–1294.
8. *Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. Кишинев, 1973.
9. *Абрамян М.Э.* О сходимости в L_∞-норме метода прямоугольников для полного сингулярного интегрального уравнения с непрерывными коэффициентами на окружности. Ростов н/Д, 2007. Деп. в ВИНИТИ 13.06.2007. № 633–В2007.
10. *Забрейко П.П. и др.* Интегральные уравнения. М., 1968.

Поступила в редакцию ***26 ноября 2007 г.***