

Колебания изолированного вихря в океане с учетом диссипации энергии

В рамках эквивалентно-баротропной модели двухслойного вращающегося океана рассмотрено влияние трения в форме Рэлея на колебания осесимметричного приповерхностного вихря. Для полей в вихре, характеризующихся линейными зависимостями проекций скорости течения от радиуса и квадратичной зависимостью от радиуса толщины вихря, задача сведена к решению системы четырех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и анализировалась численно. Показано, что вихрь, выведенный из геострофического равновесия, совершает затухающие со временем инерционные колебания. Полная энергия вихря монотонно убывает, потенциальная и кинетическая энергии затухают, совершая противофазные инерционные колебания. Увеличение времени жизни вихря (уменьшение коэффициента трения) приводит к уменьшению скорости его затухания. Увеличение амплитуды радиальных колебаний вихря вызывает его более быстрое затухание со временем. Зависимость скорости диссипации вихря от его начального радиуса не является монотонной. Интенсивность вихрей малого и большого радиусов убывает со временем наиболее значительно.

Ключевые слова: вихри в океане, радиальные колебания вихрей, влияние диссипации, амплитудно-энергетические характеристики вихря, численные решения.

Введение. Синоптические вихри в океане подвержены существенной временной изменчивости, совершая сложные горизонтальные перемещения и колебания относительно центра масс [1]. Теоретические исследования нестационарной динамики вихревых образований проводились многими исследователями с использованием численных, аналитических и лабораторных методов. Только для нескольких модельных ситуаций удалось найти точные аналитические решения задач о нелинейных колебаниях вихрей. Исследования проводились, как правило, в рамках эквивалентно-баротропной модели двухслойного океана, математическое описание которой формально совпадает с системой уравнений длинных поверхностных волн.

Аналитическое решение задачи об осесимметричных длинноволновых колебаниях вращающейся жидкости в бассейнах параболической формы, записанное через элементарные функции, получено в работах [2, 3]. Предполагалось, что проекции горизонтальной скорости течения зависят линейно, а смещения свободной поверхности изменяются квадратично в зависимости от расстояния до оси симметрии вихря. В работах [4 – 6] показано, что такие колебания являются достаточно общей формой колебаний динамических об-

разований в океане и атмосфере, описываемых системами уравнений типа уравнений мелкой воды.

Точные аналитические решения задачи о горизонтальных колебаниях вихря без изменения его геометрической формы и радиальных колебаниях полей инерционного периода относительно центра масс вихря впервые предложены в работах [1, 5]. В методе нахождения аналитического решения используется, как и в задачах о колебаниях жидкости в параболическом бассейне, точная замена исходной математической модели системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с последующим нахождением аналитических решений. В работах [1, 5, 7, 8] изложены процедуры нахождения аналитических решений аналогичной пространственной структуры, описывающих нелинейные колебания эллиптических вихрей.

В работе [9] найден класс аналитических решений эквивалентно-баротропной модели для нелинейных инерционных колебаний кругового вихря. Как и в предыдущих задачах, радиальная скорость движения жидкости в вихре линейно зависит от радиуса, однако изменение азимутальной скорости и толщины вихря описывается многочленами различных степеней от радиальной координаты с зависящими от времени коэффициентами. Благодаря полиномиальной зависимости азимутальной скорости и толщины вихря от радиальной координаты это решение является более общим и позволяет воспроизводить близкие к реальным, по сравнению с найденными ранее, пространственные распределения полей. Новая форма решения в последующем была успешно использована в [10, 11] для нахождения свободных нелинейных колебаний жидкости в бассейнах параболической формы и колебаний вихрей с учетом плотностной стратификации.

В настоящей работе в рамках эквивалентно-баротропной модели океана рассмотрено влияние диссипации на колеблющийся приповерхностный вихрь. Использована простейшая форма задания трения в вихре, а именно трения в форме Рэлея, которое пропорционально скорости течения. Ранее затухание колеблющихся вихрей в океане исследовалось численно для различных параметризаций трения и путем лабораторного моделирования [12, 13].

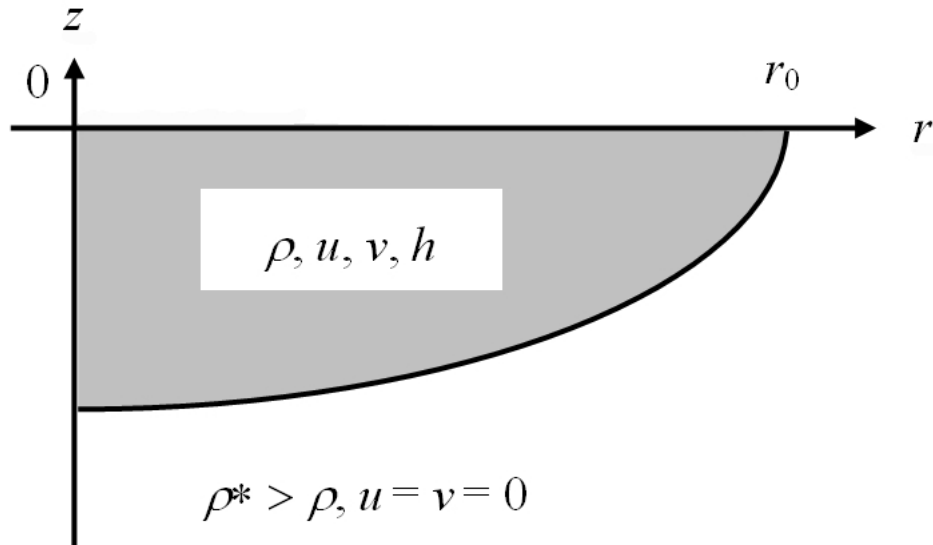
Математическая модель. В рамках эквивалентно-баротропной модели океана рассмотрим нелинейные осесимметричные колебания приповерхностной линзы легкой воды плотности ρ (теплый вихрь), окруженной более тяжелой жидкостью плотности ρ^* бесконечной глубины (рис. 1). Учитывается вращение Земли и действие внутренних сил трения в форме Рэлея. Не зависящее от азимутального угла ϕ движение жидкости в цилиндрической системе координат $(r, z, \phi; r$ – радиус, ось z направлена вертикально вверх) описывается системой трех длинноволновых уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} - fv = -g' \frac{\partial h}{\partial r} - su, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} + fu = -sv, \quad (2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(ruh)}{\partial r} = 0, \quad (3)$$

где t – время; $\{u; v\}(r, t)$ – радиальная и азимутальная проекции горизонтальной скорости течения; $h(r, t)$ – толщина приповерхностной линзы легкой воды; f – параметр Кориолиса, предполагаемый постоянным; s – коэффициент трения, значение которого фактически определяет время жизни вихря; $g' = g(1 - \rho/\rho^*)$ – приведенное ускорение свободного падения; g – ускорение свободного падения.



Р и с. 1. Радиальное сечение приповерхностного вихря

Любое решение системы уравнений (1) – (3) должно удовлетворять условию

$$h(r_0, t) = 0 \quad (4)$$

на подвижной внешней границе $r = r_0$ вихря на свободной поверхности океана (рис. 1).

В рамках системы уравнений (1) – (3) будем изучать колебания вихря, первоначально выведенного из состояния геострофического равновесия. При отсутствии диссипации энергии вихря колебания полей происходят с инерционным периодом [1, 4 – 9], в том числе при учете плотностной стратификации [11].

Сведение исходной модели к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Следуя работам [1 – 3], зададим гидродинамические поля в виде

$$u = A(t)r, \quad v = B(t)r, \quad h = C(t) + D(t)r^2, \quad (5)$$

где A, B, C, D – подлежащие нахождению функции времени. Требование положительности толщины вихря h и условие (4) приводят к необходимости выполнения следующих ограничений:

$$C(t) > 0, \quad D(t) < 0. \quad (6)$$

Подстановка выражений (5) в (1) – (3) и приравнивание в полученных формулах коэффициентов при одинаковых степенях r приводят к системе четырех обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения коэффициентов A, B, C, D в решении (5):

$$\frac{dA}{dt} + A^2 - B^2 - fB + 2g'D + sA = 0, \quad (7)$$

$$\frac{dB}{dt} + 2AB + fA + sB = 0, \quad (8)$$

$$\frac{dC}{dt} + 2AC = 0, \quad (9)$$

$$\frac{dD}{dt} + 4AD = 0. \quad (10)$$

Систему уравнений (7) – (10) необходимо дополнить начальными условиями

$$A(0) = A_0, \quad B(0) = B_0, \quad C(0) = C_0 > 0, \quad D(0) = D_0 < 0. \quad (11)$$

Уравнение (9) не зависит от уравнений (7), (8) и (10). Если коэффициент D найден, то функция C может быть рассчитана по явной формуле

$$C = C_0 \sqrt{\frac{D}{D_0}}, \quad (12)$$

вытекающей из уравнений (9) и (10).

Полная кинетическая E_{kin} , полная потенциальная E_{pot} и полная механическая E_{tot} энергии вихря, горизонтальная структура которого описывается формулами (5), выражаются следующим образом через зависящие от времени коэффициенты A, B, C, D :

$$E_{\text{kin}} = \frac{\pi \rho C^3 (A^2 + B^2)}{12 D^2}, \quad E_{\text{pot}} = -\frac{\pi \rho g' C^3}{6 D}, \quad E_{\text{tot}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}}. \quad (13)$$

Они получены путем вычисления соответствующих двойных интегралов

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \rho \iint_S h(u^2 + v^2) dx dy, \quad E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \rho g' \iint_S h^2 dx dy$$

с учетом (5), здесь S – область свободной поверхности, являющаяся верхней границей вихревого образования.

Аналитическое решение при отсутствии диссипации. При отсутствии диссипации ($s = 0$) система уравнений (7) – (10) допускает аналитическое решение (см. [1, 4]), которое можно записать в принятых в данной статье обозначениях в форме

$$A = \frac{1}{2} \mathcal{H} \Psi \cos \Phi, \quad B = -\frac{1}{2} f + l \Psi, \quad C = c \Psi, \quad D = -\frac{c}{R_0^2} \Psi^2, \quad (14)$$

где R_0 – радиус вихря в начальный момент времени,

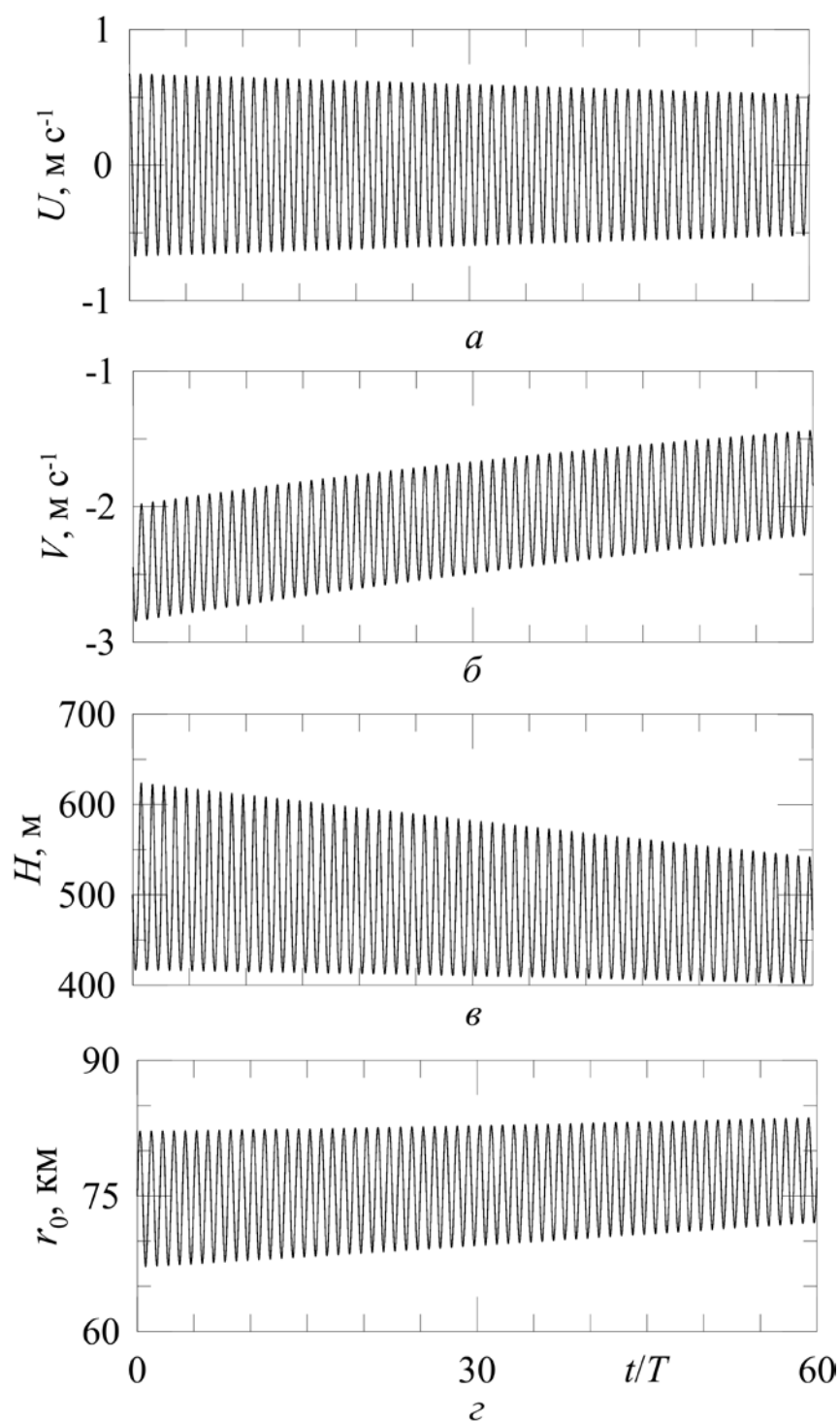
$$\Psi = \frac{1}{1 + \gamma \sin \Phi}, \quad \Phi = ft + \varphi, \quad l = \frac{1}{2} f \sqrt{1 - \gamma^2 - \frac{8g'c}{f^2 R_0^2}},$$

$\gamma \in [0, 1)$, $\varphi > 0$ и $c > 0$ – константы. Решение (14) описывает инерционные радиальные колебания вихря (последовательность горизонтальных расширений и сжатий вихря), амплитуда которых определяется значением параметра γ . Это решение используется ниже в вычислительных экспериментах для задания агеострофических начальных условий при расчете колебаний вихря с учетом диссипации. Обобщение этого решения на случай более сложного, чем (5), полиномиального представления полей дано, как отмечалось ранее, в [9]. Аналитическое решение в форме (5) для многослойного вихря предложено в работе [11]. Инерционные колебания вихря были воспроизведены в численных и лабораторных экспериментах [12, 13].

Численный анализ колебаний вихря. Система уравнений (7) – (10) с соответствующими начальными условиями (11) решалась численно методом Рунге – Кутты четвертого порядка точности. Далее по формулам (5) определялись проекции вектора горизонтальной скорости и толщина вихря как функции r и t . Что касается энергетических характеристик вихревого поля, то они находились по формулам (13).

Для задания времени жизни вихря необходимо подобрать соответствующее значение коэффициента трения s в уравнениях (1), (2). Будем условно считать, что затухание полей в вихре осуществляется по закону $\exp(-st)$. В качестве характерного временного масштаба длительности жизни вихря примем время t_{life} , за которое поля в вихре убывают в e раз. Коэффициент трения s связан с временем жизни вихря обратной пропорциональной зависимостью, а именно $s = 1/t_{\text{life}}$.

В работе [14] даны статистические характеристики рингов Гольфстрима, наблюдавшихся в 1974 – 1983 гг. Средние физико-географические параметры этих вихрей можно оценить как $R_0 = 75$ км, $t_{\text{life}} = 130$ сут, северная широта 38° , $c = 500$ м. Поэтому коэффициент трения для среднестатистического вихря $s = 8,903 \times 10^{-8} \text{ с}^{-1}$. Примем $\gamma = 0,2$, $g' = 0,01 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$, $\varphi = 0$.

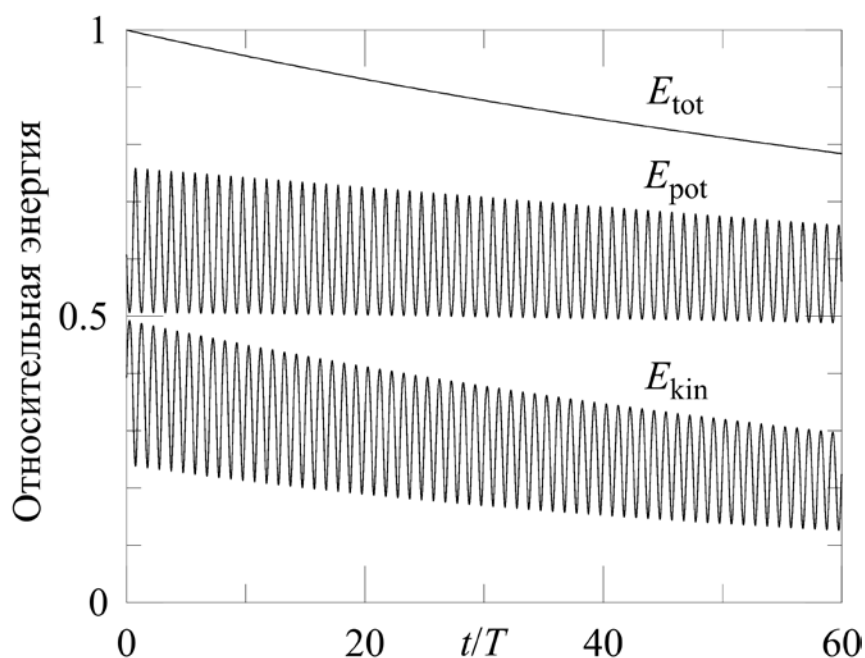


Р и с. 2. Квазиинерционные затухающие колебания радиальной (*a*) и азимутальной (*б*) скоростей течения на границе вихря, максимальной толщины (*в*) и радиуса (*г*) вихревого образования. Начальный радиус вихря $R_0 = 75$ км, амплитудный параметр $\gamma = 0,2$

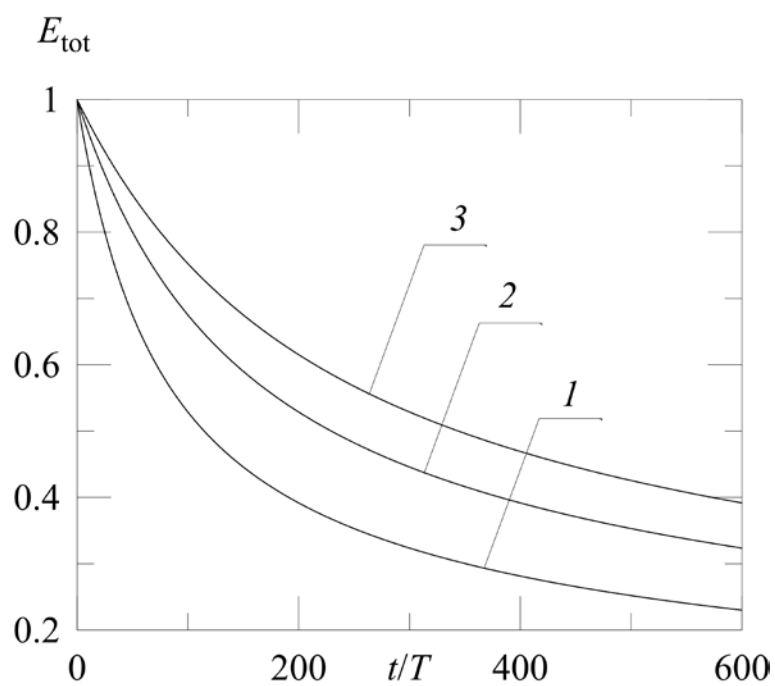
На рис. 2 представлены зависимости от времени характеристик осциллирующего вихря: радиальной $U = A(t)r_0(t)$ и азимутальной $V = B(t)r_0(t)$ скоростей на внешней границе вихря, его максимальной толщины $H = C(t)$ в центре и динамического радиуса $r_0(t)$ на свободной поверхности. Все указанные величины подвержены колебаниям с инерционной частотой f относительно некоторых средних значений. За счет действия сил трения амплитуда колебаний полей монотонно убывает.

Колебания радиальной скорости осуществляются относительно нулевого значения (рис. 2, а), азимутальной – относительно убывающего со временем геострофического распределения скорости потока жидкости циклонического вращения (рис. 2, б). С течением времени среднее значение глубины вихря убывает (рис. 2, в), в то время как средний радиус вихря увеличивается (рис. 2, г). Тем самым благодаря диссипации энергии приповерхностный вихрь расширяется и уплощается. Такое согласованное изменение средних геометрических параметров вихревого образования является следствием сохранения со временем объема вихря $Q = -\pi C^2/D = Cr_0^2$.

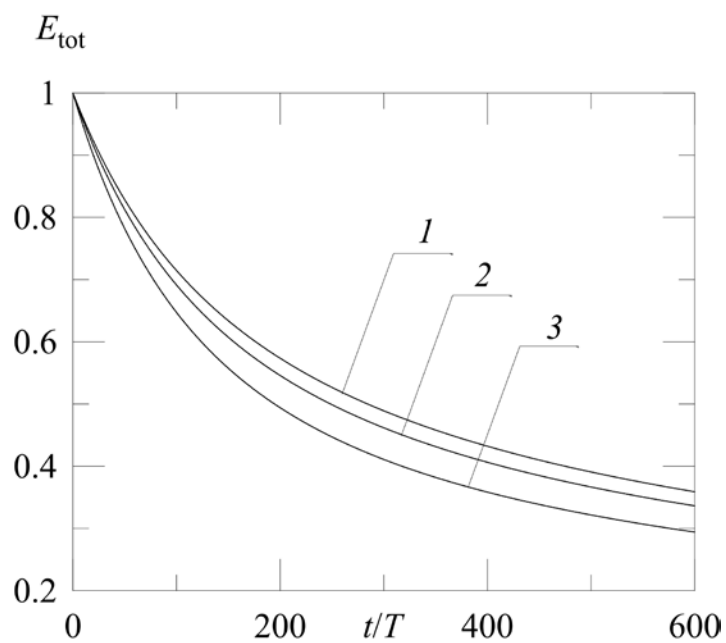
Интегральные энергетические характеристики вихря убывают со временем, что обусловлено потерями энергии на трение (рис. 3). Полные кинетическая и потенциальная энергии вихря совершают противофазные колебания инерционного периода, для полной энергии вихревого поля характерно монотонное убывание значений со временем.



Р и с. 3. Изменение со временем кинетической E_{kin} , потенциальной E_{pot} и полной E_{tot} энергий вихря, отнесенных к энергии вихревого образования в начальный момент времени. Начальный радиус вихря $R_0 = 75$ км, амплитудный параметр $\gamma = 0,2$



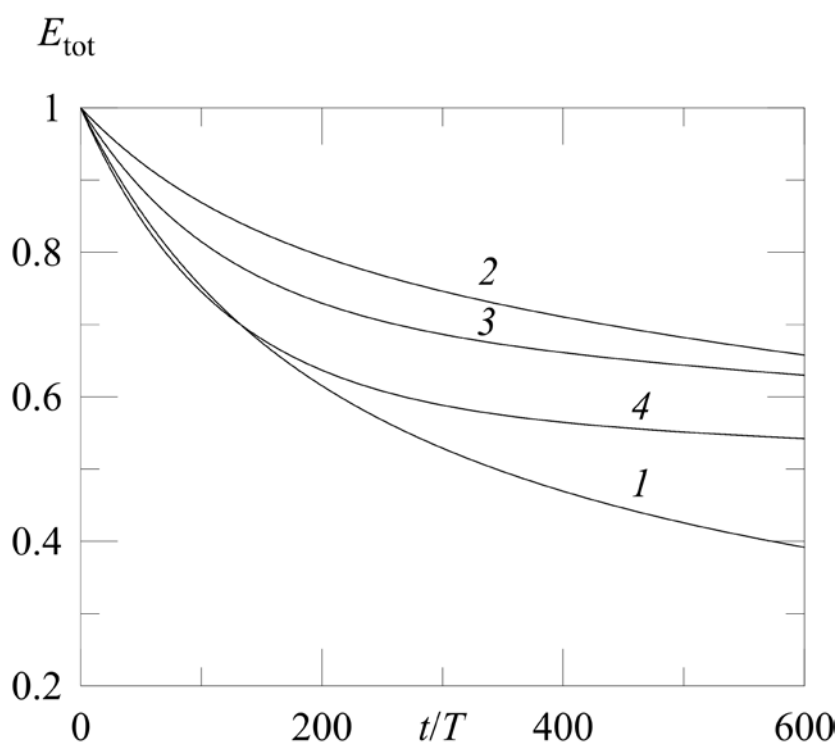
Р и с. 4. Уменьшение полной энергии вихря со временем (измеряется в инерционных периодах $T = 19,49$ ч) для различного времени жизни вихря: 1 – $t_{\text{life}} = 60$ сут; 2 – $t_{\text{life}} = 120$ сут; 3 – $t_{\text{life}} = 180$ сут. Начальный радиус вихря $R_0 = 75$ км, амплитудный параметр $\gamma = 0,2$



Р и с. 5. Уменьшение полной энергии вихря со временем для различных значений амплитудного параметра колебаний: 1 – $\gamma = 0,1$; 2 – $\gamma = 0,2$; 3 – $\gamma = 0,3$. Начальный радиус вихря $R_0 = 75$ км

Рассмотрим зависимость скорости затухания интенсивности вихря (полной энергии) от параметров модели. Кривые на рис. 4 демонстрируют уменьшение скорости затухания вихря с ростом времени его жизни (с уменьшением коэффициента трения). Более интересной является зависимость скорости затухания полной энергии вихря от амплитудного параметра модели γ . Так, увеличение амплитуды радиальных колебаний вихря приводит к более быстрому уменьшению интенсивности вихревого образования со временем (рис. 5).

Наконец, рассмотрим зависимость диссипации энергии вихря со временем от его начального радиуса. Как показывает рис. 6, скорость затухания вихря со временем немонотонно зависит от R_0 . Она наибольшая для вихрей малого и большого радиусов, но минимальная для промежуточных значений R_0 . Для случаев, представленных на рис. 6, наименьшие скорости диссипации энергии вихря соответствуют значению радиуса $R_0 = 150$ км.



Р и с. 6. Уменьшение полной энергии вихря со временем для различных начальных значений его радиусов: 1 — $R_0 = 75$ км; 2 — $R_0 = 150$ км; 3 — $R_0 = 225$ км; 4 — $R_0 = 300$ км. Амплитудный параметр $\gamma = 0,2$

Заключение. В рамках эквивалентно-баротропной модели двухслойного вращающегося океана рассмотрено влияние диссипации (трение в форме Рэлея) на колебания осесимметричного приповерхностного вихря. Для полей в вихре, характеризующихся линейными зависимостями проекций скорости течения от радиуса и квадратичной зависимостью от радиуса толщины вихря, задача сводится к решению системы четырех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Ее аналитические решения найти не удалось, и поэтому был выполнен численный анализ этой системы уравнений.

Вихрь, выведенный из геострофического равновесия, совершает затухающие со временем благодаря трению инерционные колебания относительно некоторого среднего состояния, которое также затухает со временем, но более медленно. Полная энергия вихря монотонно убывает, а полные потенциальная и кинетическая энергии затухают, совершая противофазные инерционные колебания.

Численный анализ показал, что увеличение времени жизни вихря (уменьшение коэффициента трения) приводит к уменьшению скорости его затухания, что понятно из физических соображений. Более интересной является зависимость скорости затухания полной энергии вихря от амплитудного параметра его колебаний γ . Увеличение амплитуды радиальных колебаний вихря приводит к более быстрому затуханию со временем интенсивности вихревого образования. Наконец, зависимость скорости диссипации вихря от его начального радиуса не является монотонной. За счет трения интенсивность вихрей малого и большого радиусов убывает наиболее заметно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cushman-Roisin B., Heil W.H., Nof D.* Oscillations and rotations of elliptical warm-core rings // *J. Geophys. Res.* – 1985. – 90, № C6. – P. 11756 – 11764.
2. *Ball F.K.* Some general theorems concerning the finite motion of a shallow rotating liquid lying on a paraboloid // *J. Fluid Mech.* – 1963. – 17, pt. 2. – P. 240 – 256.
3. *Thacker W.C.* Some exact solutions to the nonlinear shallow-water wave equations // *Ibid.* – 1981. – 107. – P. 499 – 508.
4. *Ингель Л.Х.* Класс точных нестационарных решений уравнений мелкой воды с вращением // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* – 1994. – 30, № 3. – С. 718 – 720.
5. *Cushman-Roisin B.* Exact analytical solution for elliptical vortices of the shallow water equations // *Tellus.* – 1987. – 39A, № 3. – P. 235 – 244.
6. *Калашиник М.В., Кахиани В.О., Ломинадзе Д.Г. и др.* Нелинейные изохронные колебания жидкости в параболоиде: теория и эксперимент // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* – 2004. – № 5. – С. 131 – 142.

7. Young W.R. Elliptical vortices in shallow-water // J. Fluid Mech. – 1986. – 171. – P. 101 – 119.
8. Rogers C. Elliptic warm-core theory: the pulsrodon // Phys. Lett. A. – 1989. – 138, № 6, 7. – P. 267 – 273.
9. Rubino A., Brandt P., Hessner K. Analytical solutions for circular eddies of the reduced-gravity, shallow-water equations // J. Phys. Oceanogr. – 1998. – 28, № 5. – P. 999 – 1002.
10. Доценко С.Ф., Рубино А. Точные аналитические решения нелинейных уравнений длинных волн в случае осесимметричных колебаний жидкости во вращающемся параболическом бассейне // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2003. – № 2. – С. 158 – 164.
11. Dotsenko S., Rubino A. Analytical solutions for circular stratified eddies of the reduced-gravity shallow-water equations // J. Phys. Oceanogr. – 2006. – 36, № 9. – P. 1693 – 1702.
12. Rubino A., Hessner K., Brandt P. Decay of stable warm-core eddies in a layered frontal model // Ibid. – 2002. – 32, № 1. – P. 181 – 201.
13. Rubino A., Brandt P. Warm-core eddies studied by laboratory experiments and numerical modeling // Ibid. – 2003. – 33, № 2. – P. 431 – 435.
14. Brown O.B., Cornillon P.C., Emmerson S.R. et al. Gulf Stream warm rings: a statistical study of their behavior // Deep-Sea Res. – 1986. – 33, № 11/12. – P. 1459 – 1473.

* Морской гидрофизический институт НАН Украины,
Севастополь
E-mail: sf_dotsenko@mail.ru

Материал поступил
в редакцию 22.06.12

** Dipartimento di Scienze Ambientali, Universita Ca'Foscari,
Venice, Italy
E-mail: rubino@unive.it

АНОТАЦІЯ В рамках еквівалентно-баротропної моделі двошарового обертового океану розглянуто вплив тертя у формі Релея на коливання осесиметричного приповерхневого вихору. Для полів у вихорі, які характеризуються лінійними залежностями проекцій швидкості течії від радіусу і квадратичною залежністю від радіусу товщини вихору, задача зведена до розв'язання системи чотирьох нелінійних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку та аналізувалася чисельно. Показано, що вихор, виведений з геострофічної рівноваги, здійснює загасаючі з часом інерційні коливання. Повна енергія вихору монотонно убуває, потенційна та кінетична енергії загасають, здійснюючи інерційні коливання протифаз. Збільшення часу життя вихору (зменшення коефіцієнта тертя) призводить до зменшення швидкості його загасання. Збільшення амплітуди радіальних коливань вихору спричиняє його більш швидке загасання з часом. Залежність швидкості дисипації вихору від його початкового радіусу не є монотонною. Інтенсивність вихорів малого та великого радіусів убуває з часом найзначніше.

Ключові слова: вихори в океані, радіальні коливання вихорів, вплив дисипації, амплітудно-енергетичні характеристики вихору, чисельні рішення.

ABSTRACT Influence of the Rayleigh friction on oscillation of axisymmetric surface vortex is considered within the framework of the equivalent-barotropic model of the two-layer rotating ocean. For the vortex fields characterized by linear dependences of the flow velocity projections upon the radius and by a quadratic dependence upon the vortex thickness radius, the problem is reduced to solving a system of four non-linear ordinary differential equations of the first order and is analyzed numerically. It is shown that the vortex developed from the initial ageostrophic state, generates damping with time inertial oscillations. The vortex total energy decreases monotonically, potential and kinetic energies decay generating anti-phased inertial oscillations. Increase of the vortex lifetime (diminution of inertial friction) results in decrease of the vortex decay rate. Increase of the amplitude of the vortex radial oscillations causes its faster attenuation in time. Dependence of the vortex dissipation rate upon its initial radius is not monotonic. The most considerable intensity decrease in time is characteristic of the vortices of small and large radii.

Keywords: eddies in the ocean, radial oscillations of vortices, effect of dissipation, amplitude-energy characteristics of a vortex, numerical solutions.