Российский журнал биомеханики, 2004, том 8, № 2: 12-18

Российский Журнал Биомеханики
www.biomech.ac.ru

УДК 531/534:57+612.7

ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРИИ ЦЕНТРА МАСС ГОРНОЛЫЖНИКА В СПЕЦИАЛЬНОМ СЛАЛОМЕ, СЛАЛОМЕ-ГИГАНТЕ И СУПЕР-ГИГАНТЕ

Р.Н. Рудаков*, А.Р. Гайсина*, А.Ф. Лисовский, А.А. Разумов***

*Кафедра теоретической механики Пермского государственного технического университета, Россия, 614990, Пермь, Комсомольский проспект, 29а, e-mail: rrn@theormech.pstu.ac.ru
**Чайковский институт физической культуры, Россия, 617762, Чайковский, ул. Ленина, 67

Аннотация. Рассматривается спуск горнолыжника по варьируемым траекториям на модельных горнолыжных трассах, расположенных на плоских склонах. Определены оптимальные углы входа горнолыжника в поворот. Показано, что расчетные результаты мало отличаются от результатов, полученных при спуске горнолыжника по реальному криволинейному склону. Исследована зависимость оптимальных значений угла входа в поворот и радиуса кривизны траектории при обходе шеста от величины смещения ворот от осевой линии.

Ключевые слова: биомеханика спорта, слаломная траектория, оптимизация, угол входа в поворот.

Введение

Ранее в работе [1] рассматривался специальный слалом на криволинейном склоне горы цилиндрической формы. Экспериментально и теоретически исследовалась модельная слаломная траектория с расстоянием между воротами по линии наибольшего ската 10 м и смещением ворот от осевой линии, равном 4 м. Показано, что для горнолыжника массой 78,08 кг оптимальный угол входа в поворот равен 52°, а радиус кривизны траектории при обходе шеста равен 2,4 м. Рассмотренную методику предполагается обобщить на случай других горнолыжных трасс с большим расстоянием между воротами и отличным от рассмотренного профилем горы спуска. Поскольку поверхность реальных склонов обычно отличается от цилиндрической, составление уравнений движения по таким склонам сопряжено со значительными математическими трудностями. Реальный склон заменяется плоским склоном, время спуска по которому совпадает со временем спуска по реальной трассе. Для примера, разобранного в [1], расчеты показали, что такая замена слабо влияет на оптимальные значения угла входа горнолыжника в поворот и радиуса кривизны траектории при обходе шеста.

В данной работе рассмотрено влияние асимметрии траектории на время спуска горнолыжника. Показано, что это влияние несущественно, и в дальнейшем рассматривались только симметричные траектории.

Таким образом, проведена оптимизация симметричных слаломных трасс на плоских склонах горы спуска. Получены оптимальные параметры варьируемой траектории для специального слалома, близкие к результатам оптимизации на

© Р.Н. Рудаков, А.Р. Гайсина, А.Ф. Лисовский, А.А. Разумов, 2004

криволинейном склоне [1]. Найдены также ранее не исследованные оптимальные параметры траектории в слаломе-гиганте и супер-гиганте.

Уравнения движения центра масс системы лыжник-лыжи

Рассмотрим спуск горнолыжника M по плоскому склону, расположенному под углом α к горизонту

На рис. 1 показана часть склона, на котором начинается движение по периодической траектории $y = y(x)$. Ось x совпадает с линией наибольшего ската горы. Период траектории равен L, а ее амплитуда равна a.

В работе [1] с помощью полиномов построена ? часть периода траектории $y = y(x)$. Считалось, что на осевой линии ($x = 0$) задается угол входа в поворот φ_0 и эта точка кривой является точкой перегиба, а при обходе флажка ($x = L/4$) радиус кривизны траектории составляет величину b:

$$\begin{aligned} &x = 0: \quad y = 0, \quad y' = \operatorname{tg}\varphi_0, \quad y'' = 0, \\ &x = \frac{L}{4}: \quad y = a, \quad y' = 0, \quad y'' = -\frac{1}{b}, \end{aligned} \tag{1}$$

где штрих означает производную по x.

Построим траекторию в виде полинома

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 x^4 + C_6 x^5. \tag{2}$$

Коэффициенты C_i определяются из условий (1), после чего полученная часть траектории достраивается до полного периода с учётом симметрии кривой. Строится требуемое число периодов кривой и получается зависимость $y(x)$ на всей модельной трассе [1].

Уравнение движения центра масс для его криволинейной координаты s получено из [1] для частного случая α = const:

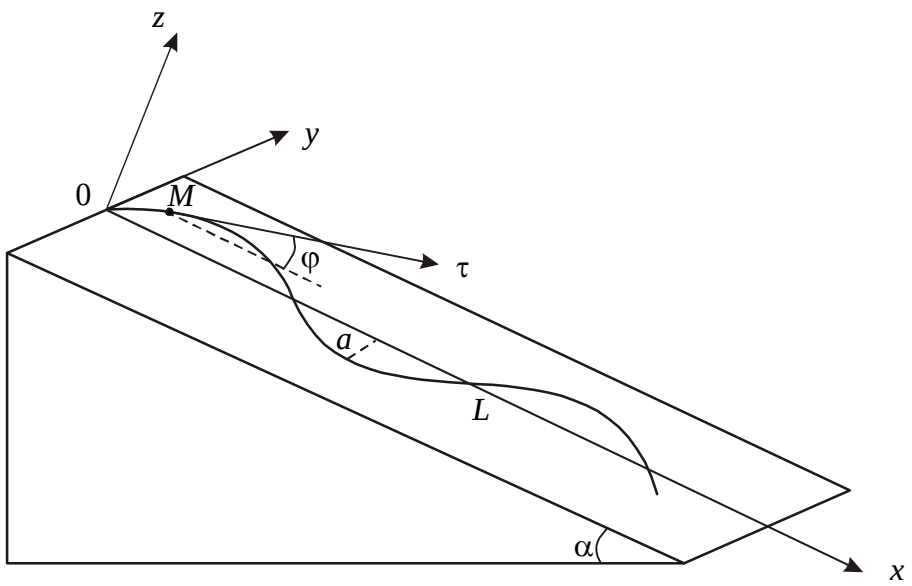

Рис. 1. Геометрия слаломной траектории на плоском склоне

$$m\frac{dV}{dt} = mg\sin\alpha\cos\varphi - R - F_{mp},\ V = \frac{ds}{dt},$$

$$R = 0{,}5\rho\mu V^2, \quad F_{mp} = f\sqrt{N_1^2 + N_2^2}, \tag{3}$$

$$N_1 = mg\cos\alpha, \quad N_2 = mg\sin\alpha\sin\varphi\frac{y''}{|y''|} + m\frac{V^2}{r},$$

где m – масса системы лыжник-лыжи, V – скорость лыжника, g – ускорение свободного падения, ρ – плотность воздуха, R – лобовое сопротивление движению лыжника, F_{mp} – сила трения, N_1 – составляющая реакции лыжни, перпендикулярная склону, N_2 – составляющая реакции, направленная вовнутрь траектории, $r = \frac{(1+y')^{3/2}}{|y''|}$ – радиус кривизны траектории, штрих означает производную по x.

В эти уравнения также входят аэродинамический параметр μ и коэффициент трения f, ранее найденные в работах [2, 3]. Коэффициент трения, зависящий от глубины врезания кантов лыж в снег, считается линейно зависящим от тангенса угла отклонения лыжника от нормали к поверхности склона горы: $f = f_0 + h\frac{|N_2|}{N_1}$.

Начальная скорость движения горнолыжника по периодической траектории принята равной его скорости в конце прямолинейного участка разгона. К уравнениям движения добавим начальные условия движения:

$$t = 0:\ s = 0,\ V = V_0. \tag{4}$$

Задача Коши (3), (4) решалась численно методом пошагового интегрирования.

Асимметричная траектория

Рассмотрено влияние асимметрии траектории центра масс горнолыжника на время его спуска. С помощью полиномов построена $^1/_2$ часть периода траектории $y = y(x)$ (рис. 2). Считается, что на осевой линии ($x = k$) задается угол входа в поворот φ_0 и эта точка кривой является точкой перегиба, а при обходе флажка ($x = L/4$) радиус кривизны траектории составляет величину b:

$$\begin{aligned} x = k:&\quad y = 0, \quad y' = \mathrm{tg}\,\varphi_0, \quad y'' = 0,\\ x = \frac{L}{4}:&\quad y = a, \quad y' = 0, \quad y'' = -\frac{1}{b},\\ x = \frac{L}{2} + k:&\quad y = 0, \quad y' = -\mathrm{tg}\,\varphi_0, \quad y'' = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где k – параметр асимметрии кривой.

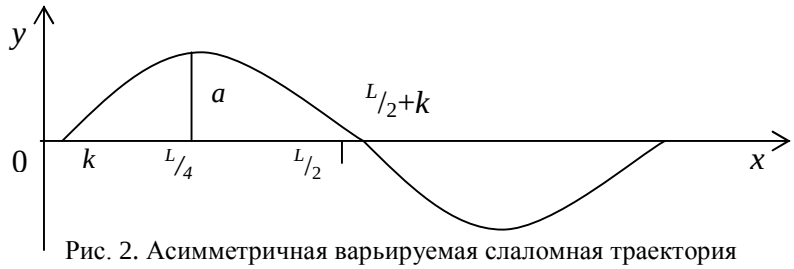

Рис. 2. Асимметричная варьируемая слаломная траектория

Построим траекторию в виде полинома:

$$y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + C_5x^4 + C_6x^5 + C_7x^6 + C_8x^7 + C_9x^8. \quad (6)$$

Коэффициенты C_i определяются из условий (5), после чего полученная часть траектории достраивается до полного периода с учетом симметрии кривой. Строится требуемое число периодов кривой и получается зависимость $y(x)$ на всей модельной трассе.

Численно решается система уравнений (3) при начальных условиях (4), соответствующих условиям проведения эксперимента.

Рассчитано время спуска по асимметричной траектории, удовлетворяющей условиям эксперимента, описанного в [1]. Оказалось, что оптимальное значение параметра асимметрии равно $k = 0{,}05$ м, при котором оптимальный угол входа в поворот $\varphi_0^* = 53°$, что всего лишь на 2% превышает значение, полученное для симметричной траектории. Это позволяет в дальнейшем рассматривать оптимизацию только симметричных траекторий, что упрощает решение задачи оптимизации.

Результаты оптимизации

Решены задачи оптимизации траектории при спуске горнолыжника по плоскому склону горы в специальном слаломе, слаломе-гиганте и супер-гиганте. Для этих видов слалома были приняты значения периода траектории L, аэродинамического параметра горнолыжника μ, соответственно: $L = 20, 50, 100$ м, $\mu = 0{,}46, 0{,}46, 0{,}34$. Для всех видов слалома угол плоского склона с горизонтом принят равным $\alpha = 22{,}3°$, коэффициент трения при скольжении по прямой $f_0 = 0{,}05$, коэффициент пропорциональности в формуле коэффициента трения $h = 0{,}241$, масса лыжника $m = 78{,}08$ кг.

Задача Коши (3), (4) решалась до тех пор, пока не стабилизировалось значение амплитуды скорости на каждом периоде траектории.

Изменялись два варьируемых параметра траектории: угол входа в поворот φ_0 и радиус кривизны траектории b при обходе горнолыжником шеста. Находились оптимальные значения угла входа в поворот φ_0^* и соответствующего ему радиуса кривизны траектории b^*, при которых время спуска горнолыжника по заданной трассе минимально. Приведены результаты для модельных трасс, соответствующих длине спуска по линии наибольшего ската вместе с разгоном, равной 180 м в специальном слаломе, 300 м в слаломе-гиганте и 500 м в супер-слаломе. Разгон составляет $^1/_4$ периода траектории в каждом виде слалома.

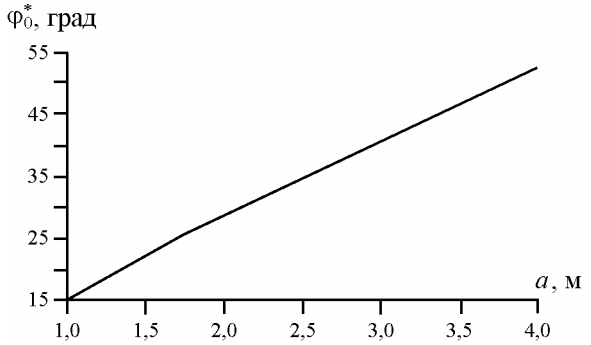

Рис. 3. Зависимость угла входа в поворот от расстояния ворот до осевой линии в специальном слаломе

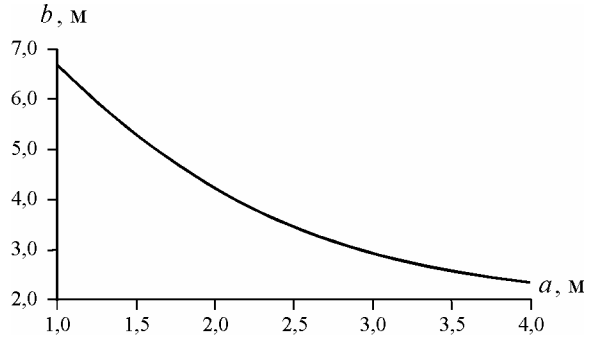

Рис. 4. Зависимость радиуса кривизны от расстояния ворот до осевой линии в специальном слаломе

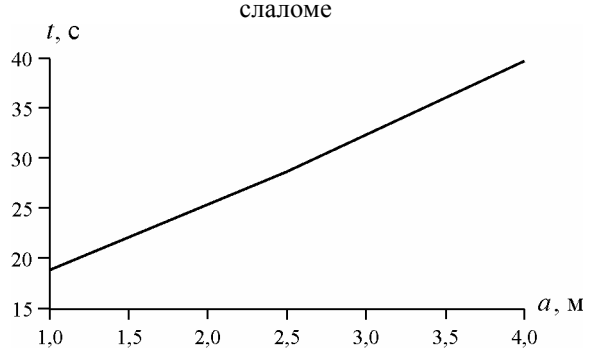

Рис. 5. Зависимость времени спуска горнолыжника от расстояния ворот до осевой линии в специальном слаломе

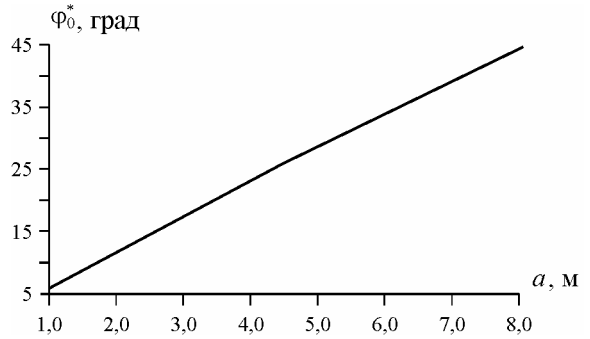

Рис. 6. Зависимость угла входа в поворот от расстояния ворот до осевой линии в слаломе-гиганте

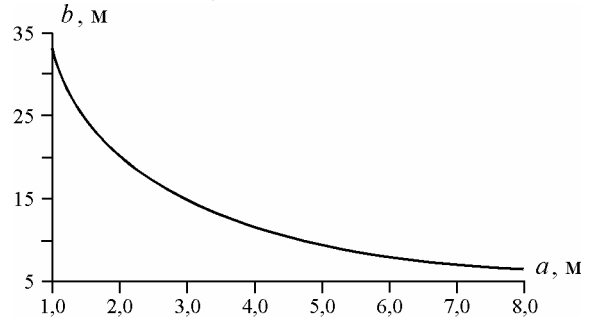

Рис. 7. Зависимость радиуса кривизны траектории от расстояния ворот до осевой линии в слаломе-гиганте

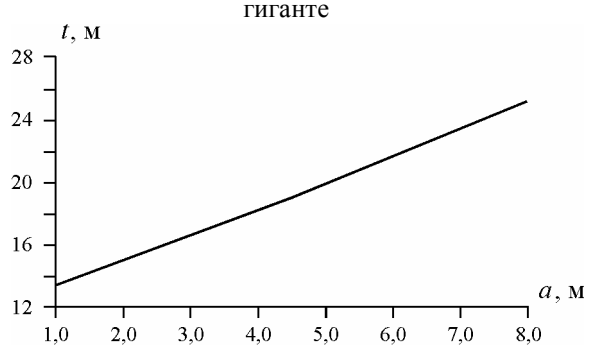

Рис. 8. Зависимость времени спуска горнолыжника от расстояния ворот до осевой линии в слаломе-гиганте

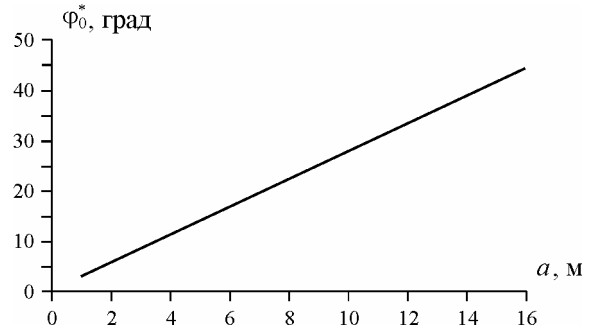

Рис. 9. Зависимость угла входа в поворот от расстояния ворот до осевой линии в супер-гиганте

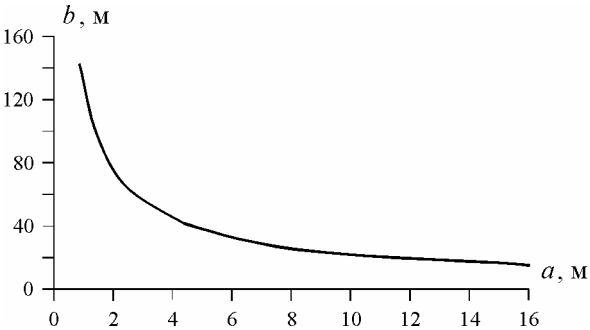

Рис. 10. Зависимость радиуса кривизны траектории от расстояния ворот до осевой линии в супер-гиганте

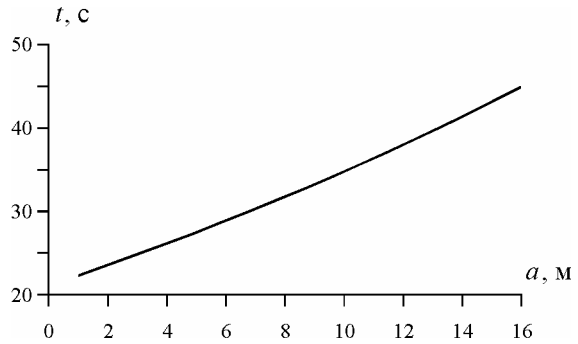

Рис. 11. Зависимость времени спуска горнолыжника от расстояния ворот до осевой линии в супер-гиганте

На рисунках 3-11 приводятся оптимальные параметры траектории и время спуска горнолыжника для трех рассматриваемых видов слалома при разных значениях смещения a ворот от осевой линии. Зависимости, приведенные на рис. 3-5 для специального слалома, практически совпадают с результатами оптимизации траектории на криволинейном склоне [1]. Анализ зависимостей параметров траектории в слаломе-гиганте (рис.6-8) и супер-гиганте (рис. 9-11) показывает, что при одинаковом смещении ворот a оптимальный угол входа в поворот φ_0^* сильно зависит от периода траектории L. Так, при $a = 4$ м в специальном слаломе $\varphi_0^* = 52^\circ$, в слаломе-гиганте $\varphi_0^* = 25^\circ$, в супергиганте $\varphi_0^* = 12^\circ$. Существенно увеличивается предельная скорость горнолыжника с увеличением периода траектории. Ее среднее значение равно 16,4; 40 и 69 км/час для трех рассматриваемых видов слалома при $a = 4$ м.

Малое значение средней скорости в специальном слаломе получилось из-за слишком большого значения отклонения ворот a для этого вида слалома. Как видно из рис. 5, время спуска практически линейно зависит от a, и с уменьшением смещения ворот время существенно уменьшается и возрастает средняя скорость спуска.

Заключение

Исследованы модельные слаломные траектории в специальном слаломе, слаломе-гиганте и супер-гиганте. Для конкретных параметров задачи найдены оптимальные значения угла входа горнолыжника в поворот и радиуса кривизны траектории его центра масс при обходе шеста. Данная методика может быть применена для любого конкретного спортсмена и для разной кривизны склона горы. Для этого надо знать реальное время спуска горнолыжника на конкретной трассе и необходимо найти угол наклона эквивалентного плоского склона, при котором время спуска совпадает с реальным. Далее исследование можно проводить по приведенной в этой работе методике.

Результаты исследования слаломных траекторий и методика их оптимизации могут быть использованы тренерами и спортсменами в тренировочном процессе.

Список литературы

1. *Рудаков Р.Н., Лисовский А.Ф., Гайсина А.Р., Хитрюк В.В.* Оптимизация слаломной траектории на криволинейном склоне // Российский журнал биомеханики. 2003. Том 7. № 2. С. 53-61.

2. *Rudakov R.N., Nyashin Yu.I., Podgayets A.R., Lisovski A.F., Miheeva S.A.* The influence of aerodynamic forces on the movement of sportsmen and sport balls // Russian Journal of Biomechanics. 2001. V. 5. № 2. P. 83-103.
3. *Рудаков Р.Н., Гайсина А.Р., Лисовский А.Ф., Подгаец А.Р.* Математическое моделирование специального слалома // Всерос. науч.-практ. конф. «Перспективные технологии и методики в спорте, физической культуре и туризме»: Сб. матер. Чайковский, 2002. С. 194-198.

OPTIMIZATION OF THE TRAJECTORY OF MOUNTAIN-SKIER'S CENTRE OF MASS IN SPECIAL SLALOM, GIANT SLALOM AND SUPERGIANT SLALOM

R.N. Rudakov, A.R. Gaysina, A.F. Lisovskii, A. A. Razumov
(Perm, Tchaikovskii, Russia)

The mountain-skier's descent along the variable trajectories in model mountain-skier's tracks located on flat slopes is considered. The optimal angles of mountain-skier's entrance in turning are determined. It is shown that received results differ slightly from the results received at the mountain-skier's descent along the real curvilinear slope. The relationships between optimal value of the entrance angle into turning, the trajectory curvature radius at pole round and the value of the gate displacement from the axis line are investigated.

Key words: biomechanics in sports, slalom trajectory, optimization, entrance angle into turning.

Получено 30 мая 2004