

ОЦЕНКА СТОЙКОСТНОЙ ЗАВИСИМОСТИ МЕТОДОМ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

А.В. Анцев, Н.И. Пасько

Предлагается исходя из верной модели износа методика оценки параметров стойкостной зависимости методом наибольшего правдоподобия по статистикам: «скорость-стойкость», «скорость-подача-глубина-стойкость»; «скорость-подача-глубина-наработка-износ» и др. Стойкостная зависимость понимается как совокупность закона распределения стойкости и параметров закона, зависящих от режимов резания. Рассматривается случай с логнормальным распределением стойкости и зависимостью средней стойкости в виде полинома соответствующей степени от логарифмов отмеченных параметров режима резания. Методика иллюстрируется на числовом примере со статистикой «скорость-подача-стойкость».

Ключевые слова: стойкость, износ, режущий инструмент, стойкостная зависимость, максимальное правдоподобие, логнормальное распределение, логарифмическая шкала, полином, степень, коэффициент вариации.

Под стойкостной зависимостью обычно понимают зависимость стойкости режущего инструмента T от параметров режима резания. При токарной обработке параметры режима – это скорость резания V , подача S , глубина резания h . Стойкость – это наработка инструмента до отказа (затупления или поломки режущего лезвия). Из-за разброса режущих свойств отдельных экземпляров инструмента, разброса твердости, припуска на обработку и других параметров заготовок и из-за стохастического характера процесса износа стойкость является случайной величиной, которая характеризуется законом распределения в виде плотности распределения наработки на отказ $f(t)$ или функцией надежности $P(t) = \int_t^{\infty} f(t)dt$, то есть вероятностью безотказной работы инструмента в течение наработки t или более.

Кроме отмеченных функций используются частные характеристики стойкости [1]: средняя стойкость (математическое ожидание)

$$\bar{T} = \int_0^{\infty} f(t)t dt = \int_0^{\infty} P(t)dt$$

и дисперсия стойкости

$$D_T = \int_0^{\infty} f(t)t^2 dt - \bar{T}^2 = 2 \int_0^{\infty} P(t)t dt - \bar{T}^2.$$

Кроме дисперсии для характеристики степени разброса стойкости используются квадратичное отклонение $\sigma_T = \sqrt{D_T}$ и коэффициент вариации $K_T = \sigma_T / \bar{T}$.

Среднегеометрическая стойкость

$$\hat{T} = \exp\left(\int_0^{\infty} f(t) \ln(t) dt\right).$$

Гамма-процентная стойкость T_γ – это наработка, которую инструмент безотказно отработает с вероятностью γ процентов. Она определяется через $f(t)$ и $P(t)$ из следующих уравнений:

$$\int_{T_\gamma}^{\infty} f(t) dt = \gamma/100; P(T_\gamma) = \gamma/100.$$

Если отказы инструмента связаны только с износом режущего лезвия, то желательно знать зависимость износа инструмента Y от наработки t . При веерной модели износа [2, 3] $Y = U \cdot t$, где U – интенсивность износа. При логнормальном распределении интенсивности износа по этому закону распределены и величина износа Y и стойкость T . То есть если интенсивность U имеет плотность

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_u} \exp\left[-\frac{(\ln u - \ln \hat{U})^2}{2\delta_u^2}\right], \quad (1)$$

то износ Y имеет плотность

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_y} \exp\left[-\frac{(\ln y - \ln \hat{Y})^2}{2\delta_y^2}\right], \quad (2)$$

а стойкость T имеет плотность

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_t} \exp\left[-\frac{(\ln t - \ln \hat{T})^2}{2\delta_t^2}\right]. \quad (3)$$

В этих плотностях $\hat{U}$, $\hat{Y}$, $\hat{T}$ – среднегеометрические значения, $\delta_u = \delta_y = \delta_t = \delta$ – параметры разброса, однозначно связанные с коэффициентами вариации K_U , K_Y , K_T , которые в данном случае совпадают и

$$K_T = \sqrt{\exp(\delta^2) - 1}. \quad (4)$$

Между $\hat{U}$, $\hat{Y}$, $\hat{T}$, $\bar{T}$ имеют место следующие связи:

$$\hat{Y} = \hat{U} \cdot t, \quad \hat{T} = L / \hat{U}, \quad \bar{T} = \hat{T} \cdot \exp(\delta^2 / 2), \quad (5)$$

где L – предельно допустимый износ, по достижении которого инструмент считается отказавшим, то есть наступает параметрический отказ.

Так как стойкость T является случайной величиной, то стойкостная зависимость считается заданной, если известен закон распределения стойкости и определены зависимости параметров распределения от параметров режима резания. В нашем случае – это плотность распределения стойкости (3) и для параметров распределения заданы зависимости

$$\hat{T} = \varphi(V, S, h), \quad \delta = \psi(V, S, h). \quad (6)$$

Параметр δ согласно (4) однозначно связан с коэффициентом вариации стойкости и по имеющимся экспериментальным данным K_T практически не изменяется с изменением параметров режима резания [4], значит, это относится и к δ .

Стойкостную зависимость можно представить как произведение детерминированной компоненты на случайный коэффициент, то есть $T = \hat{T} \cdot \tau$, где τ – это случайный коэффициент с логнормальным распределением

$$f(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta\tau} \exp\left(-\frac{\ln^2 \tau}{2\delta^2}\right).$$

Среднее геометрическое значение этого коэффициента $\hat{\tau} = 1$, а коэффициент вариации равен коэффициенту вариации стойкости K_T (4). Аналогично можно представить и зависимость износа от наработки, то есть $Y(t) = \hat{Y}(t) \cdot \tau$, где τ – тот же коэффициент, что и при определении стойкости T . Математическое ожидание износа после наработки t

$$\bar{Y}(t) = \hat{Y}(t) \cdot \exp(\delta^2 / 2).$$

Что касается зависимости параметра $\hat{T}$ (среднегеометрической стойкости) от параметров режима резания, то на практике чаще используют степенные зависимости вида

$$\hat{T} = \frac{C_T}{V^m S^a h^b}. \quad (7)$$

Обрабатывая результаты стойкостных испытаний в логарифмической системе координат [4, 5] и изображая зависимости в логарифмических координатах, усредненную стойкость логично считать средним геометрическим значением. Для зависимости стойкости от скорости резания предложены и другие зависимости [6, 7]. Но форма (7) практически удобна тем, что после логарифмирования она становится линейной относительно параметров m , a , b , что облегчает их оценку из опыта. Однако формула (7) не позволяет учесть горбообразный характер зависимости T от V [4, 6, 8]. Чтобы обеспечить отмеченную линейность и учесть горбообразность зависимостей $T(V)$ и $T(S)$, предлагается следующая форма зависимости:

$$\begin{aligned} \hat{T} = & \exp(a_0 + a_1 \cdot \ln V + a_2 \cdot \ln^2 V + a_3 \cdot \ln^3 V + a_4 \cdot \ln S + \\ & + a_5 \cdot \ln^2 S + a_6 \cdot \ln h). \end{aligned} \quad (8)$$

$$\hat{T} = \exp(a_0 + a_1 \cdot \ln V + a_2 \cdot \ln^2 V + a_3 \cdot \ln^3 V). \quad (9)$$
$$l(a_0, \dots, a_3, \delta) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta \cdot T_i}} \exp\left[-\frac{(\ln T_i - a_0 - a_1 \ln V_i - \dots - a_3 \ln^3 V_i)^2}{2\delta^2}\right]. \quad (10)$$
$$\frac{\partial \ln(l(a_0, \dots, a_3, \delta))}{\partial \delta} = 0; \quad (11)$$

$$\frac{\partial \ln(l(a_0, \dots, a_3, \delta))}{\partial a_0} = 0, \dots, \frac{\partial \ln(l(a_0, \dots, a_3, \delta))}{\partial a_3} = 0.$$

$$\delta^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\ln T_i - a_0 - a_1 \ln V_i - a_2 \ln^2 V_i - a_3 \ln^3 V_i)^2, \quad (12)$$
$$\begin{aligned} & a_0 \bar{V}_0 + a_1 \bar{V}_1 + a_2 \bar{V}_2 + a_3 \bar{V}_3 = \overline{TV_0}; \\ & . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ & a_0 \bar{V}_3 + a_1 \bar{V}_4 + a_2 \bar{V}_5 + a_3 \bar{V}_6 = \overline{TV_3}. \end{aligned} \tag{13}$$
$$\bar{V}_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln^k(V_i), k = 0, \dots, 6; \overline{TV}_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln T_i \cdot \ln^j(V_i), j = 0, \dots, 3; (14)$$

Здесь приняты обозначения:

$$\begin{aligned}\overline{S_k} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln^k S_i, \quad \overline{h_k} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln^k h_i, \quad \overline{t_k} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln^k t_i, \quad \overline{S_j V_k} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln^j S_i \ln^k V_i, \\ \overline{h V_k} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln h_i \ln^k V_i, \quad \overline{t V_k} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln t_i \ln^k V_i, \quad \overline{S_k h} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln^k S_i \ln h_i, \\ \overline{S_k t} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln^k S_i \ln t_i, \quad \overline{t h} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln t_i \ln h_i, \quad \overline{Y V_k} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln Y_i \ln^k V_i, \\ \overline{Y S_k} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln Y_i \ln^k S_i, \quad \overline{Y h} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln Y_i \ln h_i, \quad \overline{Y t} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln Y_i \ln t_i, \\ k &= 0, \dots, 3, \quad j = 0, \dots, 2.\end{aligned}$$

Коэффициенты системы (17) являются статистическими моментами системы величин V, S, h, t, Y , а матрица коэффициентов является симметрической и $\overline{S_j V_k} = \overline{V_k S_j}$, $\overline{t h} = \overline{h t}$.

Чтобы получить зависимость стойкости от параметров режима резания, воспользуемся соотношениями (5). При этом получим, что

$$\hat{T} = \frac{L}{\hat{U}}, \quad \hat{U} = \frac{\hat{Y}(t)}{t} = \exp(b_0 + b_1 \ln V + \dots + b_6 \ln h). \quad (18)$$

Параметр δ^2 рассчитывается по формуле (16) и в этом случае.

Если $\hat{T}$ представить в виде $\hat{T} = \exp(a_0 + a_1 \ln V + \dots + a_6 \ln h)$, то

$$a_0 = \ln L - b_0, \quad a_1 = -b_1, \quad a_2 = -b_2, \dots, a_6 = -b_6.$$

Рассмотрим теперь конкретный пример расчета стойкостной зависимости по статистике (V_i, S_i, T_i) , $i = 1, \dots, N$. Стойкостную зависимость будем искать при

$$\begin{aligned}\hat{T} &= \exp(a_0 + a_1 \ln V + a_2 \ln^2 V + a_3 \ln^3 V + a_4 \ln S + \\ &+ a_5 \ln^2 S + a_6 \ln V \ln S).\end{aligned} \quad (19)$$

При этом параметр разброса стойкости δ рассчитывается по формуле аналогичной (12), то есть

$$\begin{aligned}\delta^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\ln T_i - a_0 - a_1 \ln V_i - a_2 \ln^2 V_i - a_3 \ln^3 V_i - a_4 \ln S_i - \\ &- a_5 \ln^2 S_i - a_6 \ln V_i \ln S_i)^2.\end{aligned} \quad (20)$$

Этот расчет выполняется после определения коэффициентов $a_0, \dots, a_6$ в результате решения системы линейных уравнений, аналогичной (13). В отличие от (8) здесь глубина резания h явно не учитывается, так как при получении отмеченной статистики она не варьировалась. Для

оценки параметров $a_0, \dots, a_5, a_6, \delta$ воспользуемся данными из работы [5], оформленными на рис. 1 как содержание файла исходных данных для программы расчета отмеченных параметров.

Опытные данные: скорость-подача-стойкость (V_S_T)
 Сталь 1X18H9T, $t=0.5$ мм, твердый сплав Т30К4
 ? вариант степеней при $\ln V$ и $\ln S$
 29 число измерений;

V, м/мин	S, мм/об	T, мин
37	0.10	41
70	0.10	45
100	0.10	62
150	0.10	25
200	0.10	2.5
37	0.15	55
.....		
45	0.40	44
70	0.40	65
100	0.40	60
110	0.40	31
155	0.40	5
210	0.40	0.9

 Примечания:
 1) варианты степеней по $\ln V$, $\ln S$:
 1 – 1 1; 2 – 2 1; 3 – 2 1*1; 4 – 3 1; 5 – 3 1*1;
 6 – 3 2; 7 – 3 1 1*1; 8 – 3 2 1*1; 9 – 2 2;
 10 – 2 2 1*1; 11–3 0;
 2) если в первой позиции стоки 'вариант степеней...' поставить символ '?', то запустится вариант с поиском лучшего варианта стойкостной зависимости, если указать номер конкретного варианта, то рассчитываться будет только заданный вариант.

Рис. 1. Исходные данные к программе расчета параметров стойкостной зависимости

Варианты расшифровываются так: например, варианту 8 – 3 2 1*1 соответствует следующая зависимость натурального логарифма средне-геометрической стойкости от V и S :

$$\ln \hat{T}(V, S) = a_0 + a_1 \ln V + a_2 \ln^2 V + a_3 \ln^3 V + a_4 \ln S + a_5 \ln^2 S + a_6 \ln V \ln S.$$

Результаты расчета по описанной методике сведены в таблицу. Здесь приведены результаты расчета для 11 вариантов стойкостной зависимости, отличающихся структурой полинома по $\ln V$ и $\ln S$, как это отмечено в примечании рис. 1. Оценка параметра δ зависит как от разброса стойкости, так и от точности математической модели стойкостной зависимости. Увеличивая степени полинома типа (19) по $\ln V$ и $\ln S$, можно уменьшить δ вплоть до нуля. Но при ограниченном размере выборки нет смысла повышать степень полинома, так как более точный полином на

данной выборке окажется совсем неточным на другой выборке. Оптимальные степени можно установить, например, так, как в работе [11]. Определяем коэффициенты полинома на части выборки, используя только нечетные номера измерений, и проверяем полученные варианты стойкостной зависимости, вычисляя δ по формуле (20) с использованием четных членов выборки. Тот вариант степеней считается лучшим, для которого параметр δ минимален. Затем аналогичный расчет проводим используя четные номера измерений с проверкой по нечетным. Если полученные по четным и нечетным измерениям варианты совпали, то для этого варианта находим параметры $a_0, \dots, a_6, \delta$, используя всю выборку. Если отмеченные варианты не совпали, то оценку $a_0, \dots, a_6, \delta$ проводим по обоим вариантам и выбираем тот вариант, для которого квадратичное отклонение δ меньше.

Подбор структуры и коэффициентов стойкостных зависимостей

Структура полинома	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	δ	K_T
1 1	11.15	-1.85	–	–	-0,24	–	–	0.895	1.108
2 1	-44.60	23.14	-2.78	–	-0.48	–	–	0.378	0.392
2 1*1	-43.55	22.84	-2,76	–	–	–	-0.106	0.374	0.387
2 2	-45.11	23.17	-2.78	–	-1.10	-0.20	–	0.377	0.390
2 2 1*1	-41.79	2224	-2.73	–	0.391	-0.168	-0.303	0.368	0.381
3 0	114.72	-84.20	21.19	-1.77	–	–	–	0.385	0.400
3 1	84.76	-64.68	16.90	-1.46	-0.402	–	–	0.336	0.346
3 1*1	87.41	-66.14	17.19	-1.48	–	–	-0.09	0.329	0.338
3 2	83.26	-63.9	16,7	-1.44	-0.89	-0.15	–	0.334	0.344
3 1 1*1	106.59	-77.6	19.55	-1.65	1.732	–	-0.46	0.315	0.323
3 2 1*1	105.25	-76.9	19.40	-1.64	1.371	-1.104	-0.454	0.314	0.322

С проверкой по четным данным лучшим оказался вариант «3 1 1*1», а с проверкой по нечетным данным оказался лучшим вариант «3 1*1». Из данных двух вариантов выбирается вариант «3 1 1*1», так как δ для него меньше, несмотря на то, что в таблице есть вариант «3 2 1*1» с самым минимальным значением δ .

Таким образом, для средней стойкости (математического ожидания) получено следующее выражение:

$$\bar{T} = \exp(106.59 - 77.56 \ln V + 19.55 \ln^2 V - 1.65 \ln^3 V + 1.732 \ln S - 0.46 \ln V \ln S) \cdot \exp(\delta^2 / 2)$$

при квадратичном отклонении логарифма стойкости $\delta = 0.315$ и коэффициенте вариации стойкости $K_T = 0.323$.

На рис. 2 приведены графики зависимости средней стойкости от скорости резания и подачи. Математическое ожидание стойкости $\bar{T}$ рассчитывалось по вышеприведенной формуле при $\delta = 0.315$.

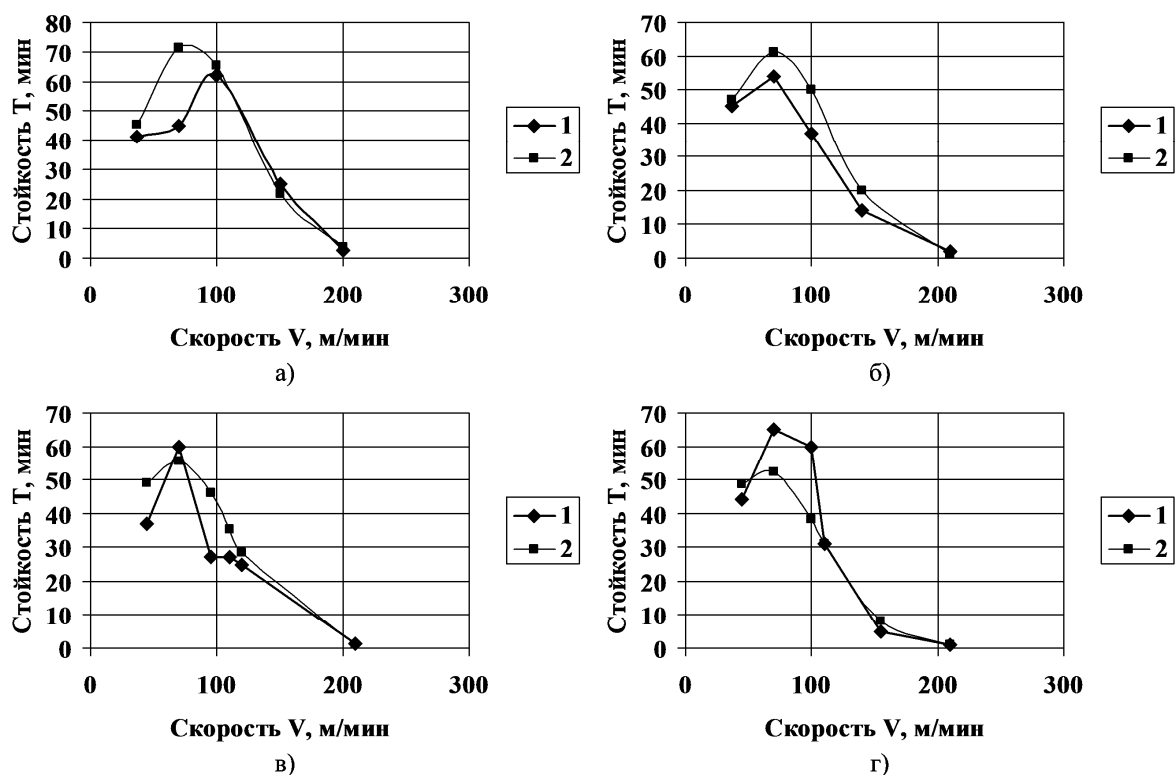


Рис. 2. Графики зависимости стойкости от скорости резания при различных подачах: а - $S = 0.1$ мм/об; б - $S = 0.2$ мм/об; в - $S = 0.3$ мм/об; г - $S = 0.4$ мм/об; 1 – опытные значения; 2 – математические ожидания

Отклонение фактической стойкости от математического ожидания связано с разбросом стойкости как случайной величины. Степень разброса характеризуется коэффициентом вариации стойкости K_T .

Список литературы

1. Иноземцев А.Н., Пасько Н.И. Надежность станков и станочных систем: учеб. пособие. Тула: Изд-во ТулГУ, 2002. 182 с.
2. Веерная модель износа режущего инструмента и оптимизация режима профилактики / Н.И. Пасько, А.В. Анцев, Н.В. Анцева, С.В. Сальников. // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2015. Вып. 12: в 2 ч. Ч 1. С. 119 – 130.
3. Обобщенная стохастическая модель отказов режущего инструмента и ее применение / Н.И. Пасько, А.В. Анцев, Н.В. Анцева, С.В. Сальников. Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. 174 с.
4. Хает Г.Л. Прочность режущего инструмента. М.: Машиностроение, 1975. 168 с.

5. Макаров А.Д. Износ и стойкость режущих инструментов. М.: Машиностроение, 1966. 264 с.
6. Кацев П.Г. Статистические методы исследования режущего инструмента. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1974. 231 с.
7. Темчин Г.И. Многоинструментальные наладки. Теория и расчет. М.: Машгиз, 1963. 443 с.
8. Грановский Г.И., Грановский В.Г. Резание металлов: учебник для машиностроит. и приборостроит. вузов. М.: Высш. шк., 1985. 304 с.
9. Кендалл М.Д., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. М.: Наука, 1973. 903 с.
10. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Физматгиз, 1962. 572 с.
11. Пасько Н.И., Анцев А.В. Статистические методы в управлении качеством: учеб. пособие. Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. 173 с.

Анцев Александр Витальевич, канд. техн. наук, доц., a.antsev@yandex.ru, Россия, Тула, Тульский государственный университет,

Пасько Николай Иванович, д-р техн. наук, проф., pasko37@mail.ru, Россия, Тула, Тульский государственный университет

TOOL-LIFE EQUATION ESTIMATION USING THE MAXIMUM LIKELIHOOD METHOD

A.V. Antsev, N.I. Pasko

The method for estimation of parameters of tool-life equation using the maximum likelihood method with assumption of fibered model of tool wear is proposed. The method uses statistics "speed – tool life", "speed – feed – depth – tool life", "speed – feed – depth – operation time – tool wear", etc. Tool-life equation is understood as the system of tool-life distribution law and parameters of the law, which depend of cutting modes. The case with lognormal distribution of tool-life and mean tool-life in the form of a polynomial of appropriate degree on the logarithms of the marked parameters of the cutting modes is considered. The method is illustrated on a numerical example with the statistics "speed – feed – tool life".

Key words: tool-life, wear, cutting tool, tool-life equation, maximum likelihood, lognormal distribution, logarithmic scale, polynomial, degree, coefficient of variation.

Antsev Alexander Vitalyievich, candidate of technical sciences, docent, a.antsev@yandex.ru, Russia, Tula, Tula State University,

Pasko Nicolay Ivanovich, doctor of technical sciences, professor, Pasko37@mail.ru, Russia, Tula, Tula State University