УДК 514.172.4

А.И. Пучкова[1], **Ю.Н. Киселёв**[2], **А.В. Кулевский**[3], **М.В. Орлов**[4]

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ПОСТРОЕНИЮ МИНИМАЛЬНОЙ ВЫПУКЛОЙ ОБОЛОЧКИ

В статье минимальная выпуклая оболочка множества конечномерного пространства строится дискретным образом: на каждом шаге строится новое множество, включающее в себя множество с предыдущего шага. Процедура построения цепочки множеств содержит наглядные геометрические конструкции. Показано, что эта цепочка множеств стабилизируется, т. е. начиная с некоторого номера все множества построенной цепочки совпадают с минимальной выпуклой оболочкой. При этом учитывается основной результат традиционного подхода к построению минимальной выпуклой оболочки — теорема Каратеодори.

Ключевые слова: выпуклая комбинация точек, минимальная выпуклая оболочка множества.

1. Введение. При изложении линейной теории оптимального управления (см. [1–3]) существенно используются определенные факты выпуклого анализа. В статье рассмотрен вопрос о построении минимальной выпуклой оболочки множества конечномерного пространства на основе определяемой индуктивно цепочки "разбухающих" множеств. Процедура построения множеств цепочки содержит прозрачные геометрические конструкции. Показано, что эта цепочка множеств стабилизируется, т. е. все множества построенной цепочки начиная с некоторого номера совпадают между собой и с минимальной выпуклой оболочкой. Минимальный номер стабилизации зависит от исходного множества и от размерности пространства. В статье указана явная формула для наименьшего номера стабилизации, который зависит лишь от размерности пространства и обслуживает все овыпукляемые множества. Интерес к изучаемому вопросу оправдывается популярностью операции овыпукления в различных конструкциях теории оптимального управления и представляет определенный методический интерес.

2. Постановка задачи. Минимальная выпуклая оболочка множества является одним из важнейших понятий в теории выпуклого анализа и в теории оптимального управления.

Определение. Пусть F — произвольное множество из n-мерного евклидова пространства E^n. Минимальной выпуклой оболочкой $\operatorname{conv} F$ множества F называется наименьшее выпуклое множество, содержащее множество F.

Существует два подхода к описанию минимальной выпуклой оболочки. Первый связан с именем Каратеодори [4]. Он базируется на следующих двух утверждениях, доказательство которых можно найти в [2].

Лемма 1. *Для любого множества $F \subset E^n$ существует минимальная выпуклая оболочка* $\operatorname{conv} F$, *которая совпадает с совокупностью всех выпуклых комбинаций точек из множества F.*

Лемма 2 (теорема Каратеодори). *Пусть $F \subset E^n$. Любая точка $x \in \operatorname{conv} F$ представима в виде выпуклой комбинации не более чем $n+1$ точек из множества F, где n — размерность пространства E^n.*

Второй подход к описанию минимальной выпуклой оболочки можно назвать геометрическим. Этот подход применяется в линейной теории оптимального управления. В его основе лежит лемма 3, доказательство которой можно найти в [1, 3].

Лемма 3 (о построении минимальной выпуклой оболочки). *Для любого множества $F \subset E^n$ существует минимальная выпуклая оболочка* $\operatorname{conv} F$, *которую можно построить следующим образом. Рассмотрим последовательность множеств*

$$F_0, F_1, \ldots, F_m, \ldots \ . \tag{1}$$

[1] Факультет ВМК МГУ, асп., e-mail: apuchkova@gmail.com
[2] Факультет ВМК МГУ, доц., к.ф.-м.н., e-mail: kiselev@cs.msu.su
[3] Факультет ВМК МГУ, ст. преп., e-mail: KulevskyAV@cs.msu.su
[4] Факультет ВМК МГУ, доц., к.ф.-м.н., e-mail: orlov@cs.msu.su

Здесь

$$F_0 = F, \quad F_1 = \bigcup_{x,y \in F_0} [x,y], \quad F_2 = \bigcup_{x,y \in F_1} [x,y], \quad \ldots, \quad F_{m+1} = \bigcup_{x,y \in F_m} [x,y], \quad \ldots,$$

где

$$[x,y] = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \{\lambda x + (1-\lambda)y\}$$

— отрезок с концами x и y. Тогда $\operatorname{conv} F = \bigcup\limits_{m=0}^{\infty} F_m$.

Из определения цепочки множеств (1) видно, что построенная в лемме 3 последовательность множеств "разбухает" (обладает свойством монотонности по включению):

$$F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_k \subset \ldots \subset \bigcup_{m=0}^{\infty} F_m \equiv \operatorname{conv} F.$$

Заметим, что для выпуклого множества F имеем $F \equiv F_0 = F_1 = \ldots = \operatorname{conv} F$, т. е. $F_0 = \operatorname{conv} F$. Для множества, состоящего из двух различных точек в E^n, выпуклой оболочкой будет отрезок, соединяющий эти точки, $\operatorname{conv} F = F_1$. Если рассмотреть симплекс на плоскости или в трехмерном пространстве, то процесс построения выпуклой оболочки заканчивается не позднее второго шага, т. е. $\operatorname{conv} F = F_2$.

Логично поставить вопрос: процесс построения минимальной выпуклой оболочки имеет бесконечный характер или же он заканчивается за конечное число шагов? Ответ на этот важный для теории вопрос можно найти ниже в теореме о стабилизации цепочки множеств, которая является основным результатом данной статьи.

3. Теорема о стабилизации. Сначала докажем вспомогательную лемму.

Лемма 4. *Множество F_k при $k \geqslant 1$ совпадает с совокупностью всех выпуклых комбинаций не более чем 2^k точек исходного множества F.*

Доказательство. Лемма 4 доказывается методом математической индукции.

Базис индукции. При $k = 1$ утверждение леммы 4 верно. Действительно, при этом $2^k = 2$. Если точка $x \in E^n$ принадлежит множеству F_1, то по определению множества F_1 найдутся такие точки x_1, x_2 из множества $F_0 \equiv F$, что $x \in [x_1, x_2]$, или

$$x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \quad x_1, x_2 \in F, \quad \alpha \in [0,1],$$

откуда видно, что точка x представлена в виде выпуклой комбинации не более чем двух точек множества F.

Пусть теперь точка $x \in E^n$ является выпуклой комбинацией двух точек исходного множества F, т. е.

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \quad x_1, x_2 \in F, \quad \alpha_1, \alpha_2 \geqslant 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

Это означает, что точка x принадлежит отрезку $[x_1, x_2]$, который, по построению множества F_1, содержится в этом множестве F_1. Следовательно, точка $x \in F_1$. Базис индукции проверен.

Индукционный шаг. Предположим, что утверждение леммы 4 верно для некоторого натурального $k \geqslant 1$; покажем, что утверждение леммы 4 верно и для $k+1$, т. е. если множество F_k совпадает с совокупностью всех выпуклых комбинаций не более чем 2^k точек исходного множества F, то множество F_{k+1} совпадает с совокупностью всех выпуклых комбинаций не более чем $2^{k+1} = 2^k \cdot 2$ точек исходного множества F. Проверка этого утверждения содержит два этапа, изложенные в следующих двух абзацах.

Если точка $z \in E^n$ принадлежит множеству F_{k+1}, то по определению множества F_{k+1} найдутся такие точки x, y из множества F_k, что $z \in [x,y]$, или

$$z = \alpha x + (1-\alpha)y, \quad x, y \in F_k, \quad \alpha \in [0,1].$$

По предположению индукции

$$x = \sum_{i=1}^{2^k} \alpha_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^{2^k} \beta_i y_i,$$

где

$$x_i, y_i \in F, \quad \alpha_i \geqslant 0, \quad \beta_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, 2^k, \quad \sum_{i=1}^{2^k} \alpha_i = \sum_{i=1}^{2^k} \beta_i = 1.$$

Таким образом,

$$z = \sum_{i=1}^{2^k} [\alpha\alpha_i] x_i + \sum_{i=1}^{2^k} [(1-\alpha)\beta_i] y_i,$$

где

$$x_i, y_i \in F, \quad \alpha\alpha_i \geqslant 0, \quad (1-\alpha)\beta_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, 2^k,$$
$$\sum_{i=1}^{2^k} (\alpha\alpha_i + (1-\alpha)\beta_i) = \alpha \sum_{i=1}^{2^k} \alpha_i + (1-\alpha) \sum_{i=1}^{2^k} \beta_i = 1,$$

откуда видно, что точка z представлена в виде выпуклой комбинации не более чем 2^{k+1} точек множества F. Таким образом, показано, что если точка $z \in F_{k+1}$, то она представима в виде выпуклой комбинации не более чем 2^{k+1} точек множества F.

Пусть теперь точка z является выпуклой комбинацией не более чем 2^{k+1} точек исходного множества F:

$$z = \sum_{i=1}^{2^k} \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^{2^k} \beta_i y_i, \tag{2}$$

где

$$x_i, y_i \in F, \quad \alpha_i \geqslant 0, \quad \beta_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, 2^k, \quad \sum_{i=1}^{2^k} (\alpha_i + \beta_i) = 1.$$

Покажем, что $z \in F_{k+1}$. Введем обозначение

$$\gamma = \sum_{i=1}^{2^k} \alpha_i.$$

Ясно, что параметр $\gamma \in [0, 1]$. Если γ равно нулю или единице, то, по предположению индукции, точка $z \in F_k$, что в силу включения $F_k \subset F_{k+1}$ влечет включение $z \in F_{k+1}$. Рассмотрим теперь случай $\gamma \in (0, 1)$. При этом соотношение (2) можно переписать в виде

$$z = \gamma x + (1-\gamma) y, \tag{3}$$

где

$$x = \sum_{i=1}^{2^k} \frac{\alpha_i}{\gamma} x_i, \quad y = \sum_{i=1}^{2^k} \frac{\beta_i}{1-\gamma} y_i.$$

Так как

$$\frac{\alpha_i}{\gamma} \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, 2^k, \quad \sum_{i=1}^{2^k} \frac{\alpha_i}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^{2^k} \alpha_i = 1$$

и

$$\frac{\beta_i}{1-\gamma} \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, 2^k, \quad \sum_{i=1}^{2^k} \frac{\beta_i}{1-\gamma} = \frac{1}{1-\gamma} \sum_{i=1}^{2^k} \beta_i = \frac{1}{1-\gamma} \left(1 - \sum_{i=1}^{2^k} \alpha_i\right) = 1,$$

то на основании предположения индукции выполняются включения

$$x \in F_k, \quad y \in F_k. \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует, что точка z как выпуклая комбинация двух точек x и y принадлежит отрезку $[x, y]$, а отрезок $[x, y]$ с концами (4) принадлежит множеству F_{k+1} по построению цепочки множеств (1). Включение $z \in F_{k+1}$ для точки (3) доказано. Индукционный шаг завершен. Лемма 4 доказана.

Теорема (о стабилизации цепочки множеств). *В n-мерном пространстве E^n цепочка множеств* (1) *стабилизируется, т. е. существует номер $s \equiv s(n, F)$, зависящий от размерности n пространства E^n и от множества F, такой, что*

$$F_s = F_{s+1} = \ldots = \operatorname{conv} F,$$

более того, для любого множества $F \subset E^n$ имеет место следующая оценка сверху для $s(n, F)$:

$$s(n, F) \leqslant S(n) \equiv [\log_2 n] + 1. \tag{5}$$

Здесь $[\xi]$ — целая часть числа ξ.

Доказательство. По построению для цепочки множеств (1) из леммы 3 имеем

$$F_m \subset \operatorname{conv} F \quad \forall m = 0, 1, 2, 3, \ldots . \tag{6}$$

Докажем, опираясь на лемму 4, что

$$F_s = \operatorname{conv} F \quad \text{при} \quad 2^s \geqslant n + 1. \tag{7}$$

Для этого достаточно проверить включение

$$\operatorname{conv} F \subset F_s \quad \text{при} \quad 2^s \geqslant n + 1. \tag{8}$$

Пусть x — произвольная точка множества $\operatorname{conv} F$; эта точка на основании теоремы Каратеодори может быть представлена в виде выпуклой комбинации

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i,$$

где

$$x_i \in F, \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n+1, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1.$$

При условии

$$n + 1 \leqslant 2^s \tag{9}$$

точка x представлена в виде выпуклой комбинации не более чем 2^s точек множества F, поэтому на основании леммы 4 имеет место включение $x \in F_s$, т. е. верно (8).

Включения (6) и (8) влекут равенство (7), которое означает, что последовательность множеств (1) стабилизируется не позднее чем на s-м шаге, где s — минимальное натуральное число, удовлетворяющее условию (9).

Неравенство (9) с натуральными числами s и n равносильно следующему:

$$s > \log_2 n. \tag{10}$$

Из (7) и (10) следует требуемая оценка (5). Теорема доказана.

Замечание. Очевидно, что

$$S(n) = k \quad \text{при} \quad 2^{k-1} \leqslant n \leqslant 2^k - 1, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Приведем для наглядности таблицу значений $S(n)$ для некоторых n.

n	1	2, 3	4, 5, 6, 7	$8, \ldots, 15$	$16, \ldots, 31$	$32, \ldots, 63$	$64, \ldots, 127$	$128, \ldots, 255$	$\ldots$
$S(n)$	1	2	3	4	5	6	7	8	$\ldots$

В заключение покажем, что оценка (5) является точной (в [1] сформулирована задача, в которой требуется доказать неравенство $s(n, F) \leqslant n$). Для множества

$$F = \bigcup_{i=0}^{n} \{x_i\},$$

где $x_i \in E^n$, $i = 0, 1, \ldots, n$, и векторы $x_1 - x_0, x_2 - x_0, \ldots, x_n - x_0$ линейно независимы, оценку (5) нельзя улучшить, т. е. стабилизация наступает в точности на шаге с номером $S(n)$, при этом $\operatorname{conv} F$ — полноразмерный симплекс в E^n. Действительно, докажем, что центр симплекса

$$x = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} x_i \tag{11}$$

не принадлежит множеству F_k, если $2^k \leqslant n$. Предположим противное, т. е. $x \in F_k$ и $2^k \leqslant n$. Используя результат леммы 4, представим центр симплекса в виде

$$x = \sum_{i=1}^{2^k} \alpha_i \bar{x}_i, \quad \bar{x}_i \in F, \quad \alpha_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, 2^k, \quad \sum_{i=1}^{2^k} \alpha_i = 1. \tag{12}$$

Учитывая справедливость неравенства $2^k \leqslant n$ и вид множества F, последнее равенство можно переписать в виде

$$x = \sum_{i=0}^{n} \beta_i x_i, \quad x_i \in F, \quad \beta_i \geqslant 0, \quad i = 0, \ldots, n, \quad \sum_{i=0}^{n} \beta_i = 1, \tag{13}$$

где $\beta_i = \alpha_i$, если x_i встречается в представлении (12), и $\beta_i = 0$, если соответствующее x_i отсутствует в представлении (12). Здесь, по крайней мере, один из коэффициентов β_i обязан равняться нулю, так как $2^k \leqslant n$. Приравнивая друг другу правые части соотношений (11), (13), получаем

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n} \beta_i x_i,$$

или

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_0) + x_0 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i (x_i - x_0) + x_0.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n+1} - \beta_i \right) (x_i - x_0) = 0.$$

Так как векторы $x_i - x_0$, $i = 1, \ldots, n$, линейно независимы, то последнее равенство влечет

$$\beta_i = \frac{1}{n+1}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

При этом $\beta_0 = 0$, так как среди всех коэффициентов β_i должен быть хотя бы один нулевой. Но тогда

$$\sum_{i=0}^{n} \beta_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i = \frac{n}{n+1} < 1.$$

Полученное противоречие (см. (13)) завершает доказательство того факта, что оценка (5) неулучшаема.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Киселёв Ю. Н. Оптимальное управление. М.: Изд-во МГУ, 1988.
2. Благодатских В. И. Введение в оптимальное управление. М.: Высшая школа, 2001.
3. Киселёв Ю. Н., Аввакумов С. Н., Орлов М. В. Оптимальное управление. Линейная теория и приложения: Учебное пособие. М.: МАКС Пресс, 2007.
4. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

Поступила в редакцию
29.06.10

ONE APPROACH TO THE CONSTRUCTION OF MINIMUM CONVEX HULL

Puchkova A. I., Kiselev Yu. N., Kulevsky A. V., Orlov M. V.

In the paper minimum convex hull of a finite-dimensional space set is constructed discretely: a new set contained a previous step set is constructed at every step. The process of the construction of the chain of sets contains obvious geometric structures. It is shown that this chain is stabilized, i.e. from some number all sets of the constructed chain coincides with minimum convex hull. The main result of the traditional approach to the construction of minimum convex hull (Caratheodory theorem) is used.

Keywords: convex combination of points, minimum convex hull of set.