

8. *Fomenko A. T., Konyaev A. Yu.* New approach to symmetries and singularities in integrable Hamiltonian systems // *Topol. and its Appl.* 2012. **159**. 1964–1975.
9. *Болсинов А. А., Фоменко А. Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Т. 1, 2. Ижевск: Изд. дом “Удмуртский университет”, 1999.
10. *Williamson J.* On the algebraic problem concerning the normal forms of linear dynamical systems // *Amer. J. Math.* 1936. **58**, N 1. 141–163.
11. *Williamson J.* On the normal forms of linear canonical transformations in dynamics // *Amer. J. Math.* 1937. **59**, N 1. 599–617.
12. *Тужилин М. А.* Инварианты четырехмерных и трехмерных особенностей интегрируемых систем // *Докл. РАН.* 2016. **467**, № 4. 385–388.
13. *Nguyen Tien Zung.* Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems, I: Arnold–Liouville with singularities // *Compositio Mathematica.* 1996. **101**. 179–215.
14. *Ошемков А. А.* Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей // *Тр. Матем. ин-та РАН.* 1994. **205**. 131–140.
15. *Кудрявцева Е. А., Никонов И. М., Фоменко А. Т.* Максимально симметричные клеточные разбиения поверхностей и их накрытия // *Матем. сб.* 2008. **199**, № 9. 3–96.

Поступила в редакцию
22.04.2016

УДК 517.518

ОБ УСЛОВИИ СХОДИМОСТИ ПОЧТИ ВСЮДУ ОРТОРЕКУРСИВНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

В. В. Галатенко¹, Т. П. Лукашенко², В. А. Садовничий³

Получено условие сходимости почти всюду с множителем Вейля $W(n) = \sqrt{n}$ для орторекурсивного разложения функции, сходящегося к ней по норме.

Ключевые слова: орторекурсивные разложения функций, множитель Вейля сходимости почти всюду.

An almost everywhere convergence condition with Weyl multiplier $W(n) = \sqrt{n}$ is obtained for orthorecursive expansions that converge to the expanded function in L^2 .

Key words: orthorecursive expansions, Weyl multiplier of almost everywhere convergence.

Орторекурсивные разложения по последовательности элементов, обобщения ортогональных разложений были введены в 1999 г. в публикациях [1, 2], подробная информация представлена в работе [3], вышедшей в 2001 г.

Пусть H — гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, а $\{e_k\}$ — конечная или счетная система нормированных элементов H , последовательно занумерованная натуральными числами $1, \dots, K$ или всеми натуральными числами.

Определение 1. Орторекурсивное разложение (ОРР) элемента $f \in H$ по последовательности элементов $\{e_k\}$ осуществляется следующим образом:

- 1) положим $r_0 = f$;
- 2) если заданы остаток приближения $r_{n-1} \in H$, $n \in \mathbb{N}$, и элемент e_n , то полагаем

$$\hat{f}_n = (r_{n-1}, e_n), \quad r_n = r_{n-1} - \hat{f}_n e_n.$$

Назовем $\hat{f}_k$ орторекурсивными коэффициентами Фурье элемента $f \in H$ по системе $\{e_k\}$, а ряд $\sigma(f) = \sum_k \hat{f}_k e_k$ орторекурсивным рядом Фурье элемента $f \in H$ по системе $\{e_k\}$.

¹Галатенко Владимир Владимирович — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. математического анализа мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: vgalat@imscs.msu.ru.

²Лукашенко Тарас Павлович — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. математического анализа мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: lukashenko@mail.ru.

³Садовничий Виктор Антонович — акад. РАН, зав. каф. математического анализа мех.-мат. ф-та МГУ, ректор МГУ, e-mail: info@rector.msu.ru.

Легко видеть, что $r_n(f) = f - \sum_{k \leq n} \hat{f}_k e_k$ и для ортонормированной системы $\{e_k\}$ рекурсивные коэффициенты Фурье являются обычными коэффициентами Фурье, а орторекурсивный ряд Фурье — обычным рядом Фурье, и (независимо от ортогональности системы) выполняется равенство Пифагора

$$\|r_{n-1}\|^2 = \|r_n\|^2 + |\hat{f}_n|^2.$$

Понятие орторекурсивного разложения по подпространствам появилось в 2012 г. в работе [4]. Орторекурсивные разложения по последовательности подпространств являются обобщением определенных в [1–3] орторекурсивных разложений по последовательности элементов и определенных в [5] рекурсивных (точнее, орторекурсивных) разложений по цепочке систем.

Пусть H — гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, далее под подпространством H понимается замкнутое подпространство.

Определение 2. Орторекурсивное разложение (ОРР) элемента $f \in H$ по последовательности подпространств $\{H_n\}$ осуществляется следующим образом:

- 1) положим $r_0 = f$;
- 2) если заданы остаток приближения $r_{n-1} \in H$, $n \in \mathbb{N}$, и подпространство $H_n \subset H$, то полагаем

$$\begin{aligned} \tilde{f}_n & \text{— ортогональная проекция } r_{n-1} \text{ на } H_n, \\ r_n & = r_{n-1} - \tilde{f}_n \text{— ортогональная проекция } r_{n-1} \text{ на } H_n^\perp, \end{aligned} \quad (1)$$

где $H_n^\perp$ — ортогональное дополнение H_n в H (об ортогональной проекции (разложении) см. [6, с. 224] или [7, с. 172]).

В силу свойств ортогональной проекции выполняется равенство Пифагора

$$\|r_{n-1}\|^2 = \|r_n\|^2 + \|\tilde{f}_n\|^2. \quad (2)$$

Назовем $\tilde{f}_n$ *элементами разложения* f по последовательности подпространств $\{H_n\}$, ряд $\sigma(f) = \sum_n \tilde{f}_n$ *рекурсивным рядом* элемента $f \in H$ по последовательности подпространств $\{H_n\}$; *частичной суммой рекурсивного ряда* с номером N считаем сумму $S_N(f) = \sum_{n=1}^N \tilde{f}_n = f - r_N(f)$.

Суммируя по n равенство (2), получим аналог тождества Бесселя

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^N \|\tilde{f}_n\|^2 + \|r_N(f)\|^2 = \|f - S_N(f)\|^2 + \sum_{n=1}^N \|\tilde{f}_n\|^2. \quad (3)$$

Из (1)–(3) следуют аналогии неравенства Бесселя

$$\|f\|^2 \geq \sum_k \|\tilde{f}_k\|^2 \quad \text{и} \quad \|r_m\|^2 \geq \sum_{k>m} \|\tilde{f}_k\|^2, \quad m \geq 0,$$

а также эквивалентность следующих четырех утверждений, из которых первые два говорят о схожести орторекурсивного разложения в гильбертовом пространстве, а два последних — аналогии равенства Парсеваля:

$$\begin{aligned} f & = \sum_{k \geq 1} \tilde{f}_k, \quad r_m = \sum_{k>m} \tilde{f}_k, \quad m \geq 0, \\ \|f\|^2 & = \sum_{k \geq 1} \|\tilde{f}_k\|^2, \quad \|r_m\|^2 = \sum_{k>m} \|\tilde{f}_k\|^2, \quad m \geq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Если последовательность одномерных подпространств задается последовательностью нормированных элементов, то ОРР по последовательности одномерных подпространств совпадает с ОРР по задающей подпространства последовательности элементов.

В теории ортогональных разложений функций неубывающую последовательность положительных чисел $W(n)$ называют *множителем Вейля сходимости почти всюду* рядов по ортонормированной системе $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$, если сходимость ряда $\sum_{n=1}^\infty |a_n|^2 W(n)$ влечет сходимость почти всюду ряда $\sum_{n=1}^\infty a_n \varphi_n(x)$ (см. [8, гл. 9, § 1, с. 335]). А. Вейль показал, что для любой ортонормированной

системы можно брать $W(n) = \sqrt{n}$. Этот результат неоднократно обобщался. Наилучший для всех ортонормированных систем результат получили Д.Е. Меньшов и Г. Радемахер: $W(n) = \ln^2(n+1)$ (см. [8, гл. 9, § 1; 9, гл. 5, § 3; 10, гл. 2, § 3]). При рассмотрении ОРР наибольший интерес представляют разложения, сходящиеся по норме к разлагаемому элементу. В настоящей работе будет получено условие, обеспечивающее сходимость почти всюду функционального ОРР, сходящегося по норме к разлагаемой функции в пространстве Лебега $L^2(\Omega)$, где Ω — пространство с мерой μ . Это условие аналогично условию Вейля с $W(n) = \sqrt{n}$. Без предположения о сходимости орторекурсивного разложения по норме к разлагаемой функции получаются другие результаты (см. [11]).

Лемма 1. Пусть функция $f \in L^2(\Omega)$ и ее орторекурсивное разложение по последовательности подпространств $H_k \subset L^2(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, сходится к f (в $L^2(\Omega)$). Пусть для $n \in \mathbb{Z}^+$

$$S_n^*(f; x) = \max_{0 \leq K \leq n} \left| f(x) - \sum_{k=1}^K \tilde{f}_k(x) \right| = \max_{0 \leq K \leq n} |f(x) - S_K(f; x)| = \max_{0 \leq K \leq n} |r_K(x)|.$$

Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ верна оценка

$$\|S_{m^2}^*(f; x)\|^2 = \int_{\Omega} (S_{m^2}^*(f; x))^2 d\mu(x) \leq 4m \sum_{j=1}^{\infty} \|\tilde{f}_j\|^2.$$

Доказательство. Если $(p-1)m < n \leq pm$, $1 \leq p \leq m$, то

$$|f(x) - S_n(f; x)| \leq |f(x) - S_{pm}(f; x)| + \left| \sum_{j=n+1}^{pm} \tilde{f}_j(x) \right|.$$

Используя (4), оценим норму максимума первого члена правой части последнего неравенства:

$$\begin{aligned} \left\| \max_p |f(x) - S_{pm}(f; x)| \right\|^2 &\leq \sum_{p=1}^m \|f(x) - S_{pm}(f; x)\|^2 = \sum_{p=1}^m \|r_{pm}(f; x)\|^2 = \\ &= \sum_{p=1}^m \sum_{j=pm+1}^{\infty} \|\tilde{f}_j\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \min\{k, m\} \sum_{j=km+1}^{(k+1)m} \|\tilde{f}_j\|^2 \leq m \sum_{j=m+1}^{\infty} \|\tilde{f}_j\|^2. \end{aligned}$$

Оценим максимум второго члена правой части неравенства. Так как

$$\max_{(p-1)m < n \leq pm} \left| \sum_{j=n+1}^{pm} \tilde{f}_j(x) \right| \leq \sum_{j=(p-1)m+1}^{pm} |\tilde{f}_j(x)|,$$

то, используя неравенство Коши–Буняковского, имеем

$$\left\| \max_{(p-1)m < n \leq pm} \sum_{j=n+1}^{pm} \tilde{f}_j(x) \right\| \leq \sum_{j=(p-1)m+1}^{pm} \|\tilde{f}_j(x)\| \leq \sqrt{m} \left(\sum_{j=(p-1)m+1}^{pm} \|\tilde{f}_j(x)\|^2 \right)^{1/2},$$

откуда

$$\sum_{p=1}^m \left\| \max_{(p-1)m < n \leq pm} \sum_{j=n+1}^{pm} \tilde{f}_j(x) \right\|^2 \leq m \sum_{j=1}^{m^2} \|\tilde{f}_j\|^2.$$

В итоге получим

$$\|S_{m^2}^*(f; x)\|^2 \leq 2 \left(m \sum_{j=m+1}^{\infty} \|\tilde{f}_j\|^2 + m \sum_{j=1}^{m^2} \|\tilde{f}_j\|^2 \right) \leq 4m \sum_{j=1}^{\infty} \|\tilde{f}_j\|^2.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть функция $f \in L^2(\Omega)$ и ее орторекурсивное разложение по последовательности подпространств $H_k \subset L^2(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, сходится к f (в $L^2(\Omega)$). Пусть $m_0 = 0$, $m_k = \sum_{j=0}^{k-1} 4^j = \frac{1}{3}(4^k - 1)$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда из сходимости ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \sum_{j=m_k+1}^{\infty} \|\tilde{f}_j\|^2 < \infty \quad (5)$$

следует оценка

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|S_{4^k}^*(r_{m_k}; x)\|^2 \leq 4 \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \sum_{j=m_k+1}^{\infty} \|\tilde{f}_j\|^2 < \infty \quad (6)$$

(здесь мажоранты $S_{4^k}^*(r_{m_k}; x)$ берутся по последовательности подпространств $\{H_n\}_{n>m_k}$).

Доказательство. Если орторекурсивное разложение функции $f \in L^2(\Omega)$ по последовательности подпространств $H_k \subset L^2(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, сходится к f (в $L^2(\Omega)$), то согласно (4) орторекурсивное разложение любого остатка $r_n(f)$ по последовательности $\{H_k\}_{k>n}$ сходится к $r_n(f)$ (в $L^2(\Omega)$). Поэтому, пользуясь леммой 1, имеем оценку

$$\|S_{4^k}^*(r_{m_k}; x)\|^2 \leq 2^{k+2} \sum_{j=m_k+1}^{\infty} \|\tilde{f}_j\|^2.$$

Значит, из оценки (5) следует оценка (6). Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть $m_0 = 0$, $m_k = \sum_{j=0}^{k-1} 4^j = \frac{1}{3}(4^k - 1)$, $k \in \mathbb{N}$, а $\alpha_j \geq 0$, $j \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \sum_{j=m_k+1}^{\infty} \alpha_j = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \sum_{m_k < j} 2^k \leq 2\sqrt{3} \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{j} \alpha_j.$$

Доказательство. Самый большой элемент в множестве натуральных чисел $E = \{k : m_k = \frac{1}{3}(4^k - 1) < j\}$ не больше $\log_4 3j = \frac{1}{2} \log_2 3j$, поэтому $\sum_{k \in E} 2^k \leq 2\sqrt{3}j$. Лемма доказана.

Теорема. Если орторекурсивное разложение функции $f \in L^2(\Omega)$ по последовательности подпространств $H_k \subset L^2(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, сходится к f (в $L^2(\Omega)$) и сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} \|\tilde{f}_k(x)\|^2,$$

то орторекурсивный ряд Фурье $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}_k(x)$ сходится к $f(x)$ почти всюду на Ω и

$$\left\| \sup_K \left| f(x) - \sum_{k=1}^K \tilde{f}_k(x) \right| \right\|^2 \leq 32\sqrt{3} \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} \|\tilde{f}_k\|^2.$$

Доказательство. Пусть $m_0 = 0$, $m_k = \sum_{j=0}^{k-1} 4^j = \frac{1}{3}(4^k - 1)$, $k \in \mathbb{N}$. Докажем сначала, что подпоследовательность частичных сумм $S_{m_k}(f, x)$ сходится к $f(x)$ почти всюду на Ω . Так как

$$|f(x) - S_{m_k}(f, x)| = |r_{m_k}(f, x)| \leq |S_{4^k}^*(r_{m_k}; x)|,$$

то по леммам 2 и 3

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|f(x) - S_{m_k}(f, x)\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|S_{4^k}^*(r_{m_k}; x)\|^2 \leq 4 \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \sum_{j=m_k+1}^{\infty} \|\tilde{f}_j(x)\|^2 \leq 8 \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{3j} \|\tilde{f}_j(x)\|^2 < \infty \quad (7)$$

(по условию теоремы). Согласно теореме Б. Леви (см. [6, с. 136] или [7, с. 305]) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |f(x) - S_{m_k}(f, x)|^2$ сходится почти всюду, а значит, почти всюду

$$|f(x) - S_{m_k}(f, x)| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0. \quad (8)$$

При этом

$$\left\| \sup_k |f(x) - S_{m_k}(f, x)| \right\|^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|f(x) - S_{m_k}(f, x)\|^2 \leq 8 \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{3j} \|\tilde{f}_j(x)\|^2 < \infty. \quad (9)$$

Если $m_k \leq l < m_{k+1}$, то

$$|f(x) - S_l(f, x)| \leq |f(x) - S_{m_k}(f, x)| + |S_{m_k}(f, x) - S_l(f, x)|, \quad (10)$$

где $|S_{m_k}(f, x) - S_l(f, x)| \leq |S_{4^k}^*(r_{m_k}; x)|$.

Из (7) и теоремы Б. Леви следует, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |S_{4^k}^*(r_{m_k}; x)|^2$ сходится почти всюду, а значит, почти всюду $|S_{4^k}^*(r_{m_k}; x)| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$. Отсюда и из (8), (10) получаем, что почти всюду

$$f(x) - S_l(f, x) \xrightarrow[l \rightarrow \infty]{} 0.$$

На основании (10) заключаем, что

$$\sup_l |f(x) - S_l(f, x)| \leq \sup_k |f(x) - S_{m_k}(f, x)| + \sup_k |S_{4^k}^*(r_{m_k}; x)|.$$

Так как согласно (9) и (7)

$$\begin{aligned} \left\| \sup_k |f(x) - S_{m_k}(f, x)| \right\|^2 &\leq 8 \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{3j} \|\tilde{f}_j(x)\|^2, \\ \left\| \sup_k |S_{4^k}^*(r_{m_k}; x)| \right\|^2 &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \|S_{4^k}^*(r_{m_k}; x)\|^2 \leq 8 \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{3j} \|\tilde{f}_j(x)\|^2, \end{aligned}$$

то

$$\left\| \sup_l |f(x) - S_l(f, x)| \right\|^2 \leq 2 \left\| \sup_k |f(x) - S_{m_k}(f, x)| \right\|^2 + 2 \left\| \sup_k |S_{4^k}^*(r_{m_k}; x)| \right\|^2 \leq 32\sqrt{3} \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{j} \|\tilde{f}_j\|^2.$$

Теорема доказана.

Как отмечалось, ОРР по последовательности одномерных подпространств совпадает с ОРР по задающей подпространства последовательности нормированных элементов. Поэтому из теоремы получаем

Следствие. Если орторекурсивное разложение функции $f \in L^2(\Omega)$ по последовательности нормированных элементов $\{e_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, сходится к f (в $L^2(\Omega)$) и сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} |\hat{f}_k|^2,$$

то орторекурсивный ряд Фурье $\sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_k e_k(x)$ сходится к $f(x)$ почти всюду на Ω и

$$\left\| \sup_K \left| f(x) - \sum_{k=1}^K \hat{f}_k e_k(x) \right| \right\|^2 \leq 32\sqrt{3} \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} |\hat{f}_k|^2.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00417) и программы НШ-7461.2016.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лукашенко Т.П.* Рекурсивные разложения, подобные ортогональным // VII Междунар. конф. “Математика. Экономика. Экология. Образование”. Междунар. симпозиум “Ряды Фурье и их приложения” (26 мая–1 июня 1999 г.): Тез. докл. Ростов н/Д. Ростов н/Д: РГЭА, 1999. 331.
2. *Лукашенко Т.П.* Об орторекурсивных разложениях по характеристическим функциям промежутков // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: Мат-лы школы-конф., посв. 130-летию со дня рождения Д. Ф. Егорова. Казань: Изд-во Казан. мат. о-ва, 1999. 142–143.
3. *Лукашенко Т.П.* О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2001. № 1. 6–10.
4. *Лукашенко Т.П., Садовничий В.А.* Орторекурсивные разложения по подпространствам // Докл. РАН. 2012. **445**, № 2. 135–138.
5. *Лукашенко Т.П., Садовничий В.А.* О рекурсивных разложениях по цепочке систем // Докл. РАН. 2009. **425**, № 6. 1–6.
6. *Богачев В.И., Смолянов О.Г.* Действительный и функциональный анализ. Университетский курс. М.; Ижевск: НИЦ РХД, 2009.
7. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2004.
8. *Кашин Б.С., Саакян А.А.* Ортогональные ряды. М.: Изд-во АФЦ, 1999.
9. *Качмаж С., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов. М.: ГИФМЛ, 1958.
10. *Алексич Г.* Проблемы сходимости ортогональных рядов. М.: Наука, 1984.
11. *Галатенко В.В., Лукашенко Т.П., Садовничий В.А.* Об условии сходимости орторекурсивных разложений функций почти всюду // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: Мат-лы Двенадцатой междунар. Казанской летней научной школы-конф. (Казань, 27 июня–4 июля 2015 г.). Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. 2015. **51**. 135–141.

Поступила в редакцию
25.03.2016