

УДК 629.735.33.015.3  
532.527

## ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СПУТНЫХ ВИХРЕЙ САМОЛЕТА У ЗЕМЛИ ПРИ ПОРЫВИСТОМ ГРАДИЕНТНОМ ВЕТРЕ

*А. Б. МИЛЛЕР, А. Л. СТАСЕНКО*

Поведение спутных вихрей тяжелого авиалайнера в окрестности аэропорта привлекает внимание исследователей как с точки зрения безопасности взлета/посадки следующих самолетов, так и оценки воздействия авиации на окружающую среду. В первом случае очевидным преимуществом обладают математические модели, позволяющие быстро предсказывать движение вихрей за авиалайнером и допускающие возможность непрерывной или дискретной коррекции их с учетом неожиданно изменяющихся погодных условий. В настоящей работе предложена и исследована модель, основанная на системе обыкновенных дифференциальных уравнений, дается сравнение ее численных решений с результатами летного эксперимента.

Прогнозирование перемещений мощных спутных вихрей тяжелых авиалайнеров в окрестности аэропорта представляет большой практический интерес для обеспечения безопасности взлета/посадки рейсовых самолетов с одновременным увеличением пропускной способности аэропорта [1]. Экспериментальные и теоретические исследования показывают, что пространственно-временная эволюция вихрей вблизи земли существенно отличается от их поведения на большой высоте. Отметим прежде всего основные черты и достигнутый уровень понимания рассматриваемых явлений.

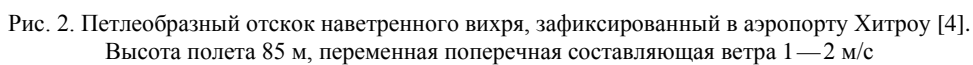
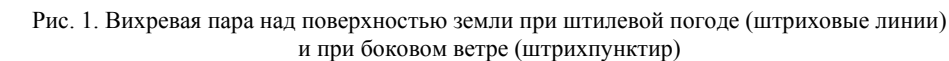
Двухвихревая система складывается за самолетом уже на расстоянии 6—7 размахов крыла даже при использовании взлетно-посадочной механизации крыла, порождающей первоначально многовихревую систему [2].

Близость земли можно учесть в рамках модели невязкой жидкости введением двух «подземных» мнимых вихрей с противоположным направлением вращения. Скорости, индуцируемые ими, приводят к разбеганию в стороны реальных вихрей (рис. 1), так что их влияние друг на друга ослабевает.

Однако, как показывает опыт, движение вблизи земли даже уединенного вихря может быть довольно сложным. Так, в аэропорту Хитроу при помощи лазерного измерителя скорости был обнаружен неожиданный эффект – возвращение вихря с почти начальной мощностью в область глиссады приблизительно через 70 с после прохождения самолета [3]. Петлеобразное движение оси вихря над землей наблюдалось над аэропортом [4] (рис. 2), а также получено численно, на базе уравнений динамики турбулентного газа, например в [5].

Другое важное явление, возникающее в результате взаимодействия с землей, определяется как «отскок» вихря (рис. 2, 3). Это явление широко исследовалось в различных странах [4], [6], [7] как экспериментально, так и теоретически при помощи методов численной газодинамики. В результате к настоящему времени достигнуто следующее понимание роли вязкости воздуха в возникновении «отскока» вихря. Вихревая пара самолета индуцирует у поверхности земли пограничный слой, после отрыва которого в окружающей атмосфере возникают вторичные вихри противоположного знака. При наличии поперечного ветра эти дополнительные вихри имеют тот же знак, что и вихри приземного (градиентного) ветра, что усиливает эффект отскока

4



Между тем, для решения поставленной проблемы достаточно иметь информацию о пространственно-временной эволюции осей спутных вихрей самолета.

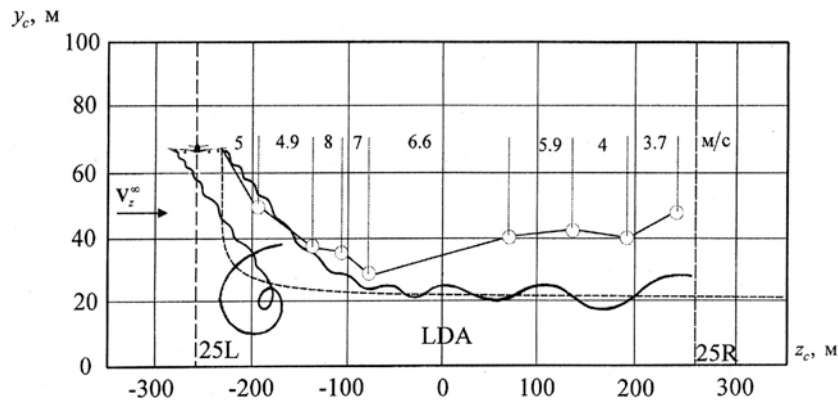


Рис. 3. Сравнение расчетов (сплошные линии) и результатов серии экспериментов (кружки, ломаная линия) в аэропорту Франкфурта-на-Майне. Расчетная траектория навстречного вихря близка к показанной на рис. 2. Штриховая кривая — аналитическое решение для штиля. Посередине между левой (25L) и правой (25R) взлетно-посадочными полосами находится лазерно-доплеровский анемометр (LDA)

Отметим ряд успешных инженерных подходов, развитых с целью заменить трудоемкие решения континуальных уравнений динамики вязкого турбулентного газа (в частных производных) интегрированием кинематических соотношений. В [8] методом дискретных вихрей исследовано поведение вихревой пары у земли при наличии стабильного поперечного ветра постоянной (по высоте) скорости. Реальный вторичный вихрь также представлен набором дискретных вихрей той же качественной структуры, что и спутные вихри самолета. Получена картина петлеобразного движения последних.

В работе [9] развита модель динамики вихревой пары при полете на большой высоте и вблизи земли, основанная на представлении о деформируемой вихревой нити, движение которой определяется суммой локальной индуцированной скорости, определяемой по закону Био — Савара — Лапласа, и местной скорости стохастического турбулентного движения атмосферы.

Монотонный отскок вихря на высоту  $h \approx l_v$ , качественно совпадающий с данными экспериментов [6], получен в работе [10] путем добавления в правую часть уравнения для вертикальной скорости вихря слагаемого, полученного на основе экспериментальных данных и численных результатов для самолетов B-747 и B-767.

Таким образом, накопленная полумпирическая информация и результаты продолжительных расчетов уравнений газодинамики вязкого газа позволяют в принципе прогнозировать перемещение вихрей над аэродромом в случае фиксированной ветровой обстановки. Однако в случае ее непредвиденных вариаций необходима более быстродействующая модель, которая позволила бы вносить регистрируемые приборами изменения и предсказывать пространственно-временную эволюцию спутных вихрей авиалайнера на ближайшие десятки секунд.

В настоящей работе вихрь представляется в виде вращающегося массивного гибкого жгута (медленно растущей погонной массы), сохраняющего свою «индивидуальность» в атмосфере и находящегося под действием суммы «внешних» сил: аэродинамической, Жуковского и «подъемной» силы, связанной с вертикальным градиентом горизонтальной скорости ветра. Описание динамики этого жгута в рамках системы обыкновенных дифференциальных уравнений позволяет без труда учесть и любые временные изменения ветровой обстановки.

Доплер-лидарные измерения переноса вихрей при наличии ветра над аэропортом Франкфурта-на-Майне (см. рис. 3) [6], имеющем две параллельные ВПП, привели к некоторым важным выводам:

помимо самоиндуцированной скорости, горизонтальное перемещение вихря у земли определяется, в основном, поперечной компонентой ветра;

при оценке движения вихря нужно использовать среднее значение этой компоненты, измеряемой в области между параллельными ВПП;

часто наблюдается значительный эффект отскока вихрей.

Отметим, кроме того, что в расчетной части цитируемой статьи горизонтальные компоненты самоиндуцированной скорости аддитивно складывались со скоростью ветра; радиус ядра вихря вычислялся по формуле  $r_c(t) = [r_c^2(0) + 5 \cdot 10^{-4} \Gamma_0 t]^{1/2}$ , что равносильно принятию для турбулентной вязкости значения  $\nu_t^\infty = 10^{-4} \cdot \Gamma_0$ . (Согласно экспериментальным данным, вязкость ядра вихря связана с циркуляцией соотношением  $\nu_c = \alpha_c \Gamma$ , где  $\alpha_c \approx 10^{-4} \div 10^{-5}$  [6], [11].) Эти предварительные соображения дают возможность построить более сложную модель динамики вихревого жгута над твердой поверхностью.

Представим вихрь в виде жгута радиуса  $r_c$  (ядро вихря), вращающегося как твердое тело (азимутальная скорость  $v_\phi = \omega r$ ,  $r < r_c$ ) и захватывающего с течением времени все большую массу, так что с учетом начального радиуса ядра вихря  $r_c(0)$ , как и в работе [6], имеем

$$r_c^2(t) = 4\nu_c t + r_c^2(0).$$

На основе имеющихся данных для различных авиалайнеров возможна простая линейная интерполяция, связывающая начальный радиус вихря с размахом крыла  $L$  или начальным расстоянием между вихрями  $l_V$ :  $r_c(0) \approx 0.043L \approx l_V/20$ .

Поскольку движение вихрей является в принципе ускоренным, необходимо учитывать их присоединенную массу. Коэффициент присоединенной массы для бесконечно длинного цилиндра, как известно [12], равен единице. В результате (в дополнительном предположении о несжимаемости воздуха,  $\rho_c \approx \rho_\infty$ ) масса участка вихря единичной длины равна

$$\Delta m_1 = 2\rho_\infty \pi r_c^2 = 2\rho_\infty \pi (4\nu_c t + r_c^2(0)).$$

Сила сопротивления при поперечном обдуве (в расчете на единицу длины цилиндра) равна

$$\mathbf{F}_1^{\text{aer}} = \frac{1}{2} c_D \rho_\infty 2r_c |\mathbf{V}_\Sigma - \mathbf{V}_c| (\mathbf{V}_\Sigma - \mathbf{V}_c),$$

где  $\mathbf{V}_\Sigma$  — скорость потока,  $\mathbf{V}_c$  — скорость цилиндра, измеряемые относительно неподвижной системы отсчета.

Коэффициент сопротивления аэродинамической силы, увлекающей вихрь, для цилиндра равен единице,  $c_D = 1$  (это верно в широком диапазоне чисел Рейнольдса  $\approx 10^2 \div 10^5$ , [12]).

Известно, что на сферическую частицу, вращающуюся с угловой скоростью  $\omega$  и движущуюся в покоящемся воздухе со скоростью  $\hat{\mathbf{V}}$ , действует сила Магнуса [13]

$$\mathbf{F}_{\text{Mag}}^{\text{Mag}} = \pi \hat{a}^3 \rho_\infty \times \hat{\mathbf{V}}.$$

На единицу длины вращающегося цилиндра будет действовать сила Жуковского

$$\mathbf{F}_J = \alpha_J \rho_\infty r_c^2 \hat{\mathbf{V}} \times (\hat{\mathbf{c}} - \hat{\mathbf{\Sigma}}),$$

где  $\alpha_J$  — постоянный множитель.

Кроме указанных выше сил, на тело, перемещающееся в сдвиговом слое параллельно твердой поверхности со скоростью  $(\mathbf{V} - \mathbf{V}_c)_z$ , действует «подъемная» сила, перпендикулярная поверхности. Для случая медленного (ползущего) движения сферы радиуса  $r_c$  эта сила была получена в работе [14] в виде

$$\mathbf{F}_{\text{Saf}} = 6.46\rho\nu r_c^2 (\mathbf{V} - \mathbf{V}_c)_z \left( \frac{1}{\nu} \left| \frac{\partial V_z}{\partial y} \right| \right)^{1/2} = F_z^{\text{St}} \cdot 0.343 r_c \left( \frac{1}{\nu} \left| \frac{\partial V_z}{\partial y} \right| \right)^{1/2}.$$

В последнем выражении мы выделили тангенциальную компоненту силы Стокса

$$\mathbf{F}^{\text{St}} = 6\pi\mu r_c (\mathbf{V} - \mathbf{V}_c).$$

Сконструируем аналогичную (квазисэффмановскую, верхний индекс qS) силу, действующую на обтекаемый цилиндр, предполагая, что она также должна зависеть от нормальной компоненты градиента тангенциальной скорости  $|\partial V_z / \partial y|$ , от вязкости (только теперь уже турбулентной), от характерного размера (радиуса) цилиндра  $r_c$  и, наконец, от тангенциальной компоненты силы сопротивления (только теперь это уже не сила Стокса, а сила аэродинамического сопротивления на единицу длины):

$$\mathbf{F}_1^{\text{qS}} = \mathbf{e}_y (\mathbf{F}_1^{\text{aer}} \cdot \mathbf{e}_z) \left( \frac{r_c}{\nu_\infty} \left| \frac{\partial V_z^\infty}{\partial y} \right| \right)^{1/2} \alpha^{\text{qS}},$$

где  $\alpha^{\text{qS}}$  — безразмерный подгоночный коэффициент, который можно получить из сравнения расчетных и экспериментальных данных.

Отметим, что близкое выражение для подъемной силы, обусловленной сдвигом ветра у поверхности земли, может быть получено из решения невязкой задачи для цилиндра, малого по сравнению с характерным масштабом изменения величины ветра. В этом случае «сдвиговая» подъемная сила равна по модулю

$$F_{\text{сдв}} = \rho_\infty |\mathbf{V}_\Sigma - \mathbf{V}_c| \Gamma_{\text{сдв}},$$

где  $\Gamma_{\text{сдв}}$  — циркуляция вокруг цилиндра, обусловленная сдвигом ветра:

$$\Gamma_{\text{сдв}} = \oint_{r=r_c} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{r \leq r_c} \text{rot} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\partial V_z}{\partial y} \pi r_c^2.$$

В результате получаем

$$F_{\text{сдв}} = \rho_\infty \pi r_c^2 |\mathbf{V}_\Sigma - \mathbf{V}_c| \frac{\partial V_z}{\partial y}.$$

Уравнения неустановившегося движения вихря с учетом нестационарности ветра примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_v}{dt} &= \mathbf{V}_c, \\ \frac{d\mathbf{V}_c}{dt} &= \frac{1}{2\pi r_c(t)} |\mathbf{V}_\Sigma - \mathbf{V}_c| (\mathbf{V}_\Sigma \mathbf{V} - \mathbf{V}_c \mathbf{V} - \mathbf{V}_\Sigma \mathbf{V}_c + \mathbf{V}_c \mathbf{V}_c) + \\ &+ \frac{\alpha^{\text{qS}}}{2\pi} |\mathbf{V}_\Sigma - \mathbf{V}_c| (V_{z\Sigma} - V_{zc}) \left( \frac{1}{\nu_\infty} \left| \frac{\partial V_z^\infty}{\partial y} \right| \right)^{1/2} \mathbf{e}_y + \frac{d\mathbf{V}_z^\infty}{dt}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathbf{r}_v(x_c, y_c, z_c)$  — точка на оси вихря,  $\omega = \Gamma / (2\pi r_c^2)$ ,  $\mathbf{V}_\Sigma$  — суммарная скорость «внешнего потока», индуцированная остальными тремя вихрями (см. рис. 1), и поперечного градиентного атмосферного ветра  $\mathbf{V}_z^\infty$ . Ниже выписаны компоненты  $\mathbf{V}_\Sigma$  для подветренного (правого) вихря:

$$\begin{aligned} (V_\Sigma)_z &= \frac{\Gamma}{2\pi} \left( \frac{y_{c1} - y_{c2}}{L^2 + (y_{c1} - y_{c2})^2} \left( 1 - \exp \left( -\frac{L^2 + (y_{c1} - y_{c2})^2}{4v_\infty t} \right) \right) - \frac{y_{c1} + y_{c2}}{L^2 + (y_{c1} + y_{c2})^2} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( 1 - \exp \left( -\frac{L^2 + (y_{c1} + y_{c2})^2}{4v_\infty t} \right) \right) \right) + \frac{\Gamma}{4\pi y_{c1}} \left( 1 - \exp \left( -\frac{y_{c1}^2}{4v_\infty t} \right) \right) + V_z^\infty, \\ (V_\Sigma)_y &= \frac{\Gamma L}{2\pi} \left( \frac{1 - \exp \left( -\frac{L^2 + (y_{c1} + y_{c2})^2}{4v_\infty t} \right)}{L^2 + (y_{c1} + y_{c2})^2} - \frac{1 - \exp \left( -\frac{L^2 + (y_{c1} - y_{c2})^2}{4v_\infty t} \right)}{L^2 + (y_{c1} - y_{c2})^2} \right), \\ L &= z_{c1} + z_{c2}; \end{aligned}$$

$z_{c1}, z_{c2}, y_{c1}, y_{c2}$  — координаты подветренного (индекс 1) и наветренного (индекс 2) вихрей.

Коэффициент  $\alpha_J$  положен равным  $2\pi$ , что соответствует решению задачи об обтекании невязкой жидкостью вращающегося бесконечного цилиндра. Действительно, в этом случае подъемная сила, действующая на единицу длины цилиндра, равна

$$\mathbf{F}_1^J = \rho_\infty (\mathbf{V}_\Sigma - \mathbf{V}_c) \times \mathbf{e}_x \cdot \Gamma = \rho_\infty (\mathbf{V}_\Sigma - \mathbf{V}_c) \times \cdot 2\pi r_c^2.$$

Принятое нами значение  $\alpha_J$  хорошо согласуется с наблюдаемой длиной волны синусоидальной неустойчивости дальнего следа ( $\approx 10^2$  м при скорости полета в диапазоне  $200 \div 300$  м/с). Наши расчеты, проведенные для большой высоты, дают тот же порядок длины волны при  $\alpha_J \approx 10$ . Теоретическое значение длины волны нарастающих колебаний вихревого жгута  $\lambda = 8.6l_v$  приведено в работе [15].

Использованное нами расслоение суммарной силы на аддитивные компоненты, разумеется, не имеет строгого обоснования, поскольку выражения для каждой из них получены в своей области параметров. Поэтому его нужно рассматривать как некоторое модельное описание, справедливое при асимптотическом переходе к малым числам Рейнольдса. Аналогичные гипотезы аддитивности сил различной природы принимались и ранее при моделировании динамики как шаровых частиц, так и самолетных струй [12], [16] — [18].

Еще одно замечание, принадлежащее рецензенту настоящей статьи, вынесено в Приложение.

Легко видеть, что уравнению (1) удовлетворяет тривиальный случай движения вихря с постоянной скоростью вдоль горизонтальной поверхности:  $d\mathbf{V}_c/dt = 0$  при  $\mathbf{V}_c = \mathbf{V}_\Sigma$ . Как известно, в этом случае сила притяжения пары противоположно вращающихся вихрей в точности уравновешивается силой Жуковского. Таким образом, второе слагаемое в приведенном выше уравнении является поправкой к силе Жуковского при  $\mathbf{V}_c \neq \mathbf{V}_\Sigma$ .

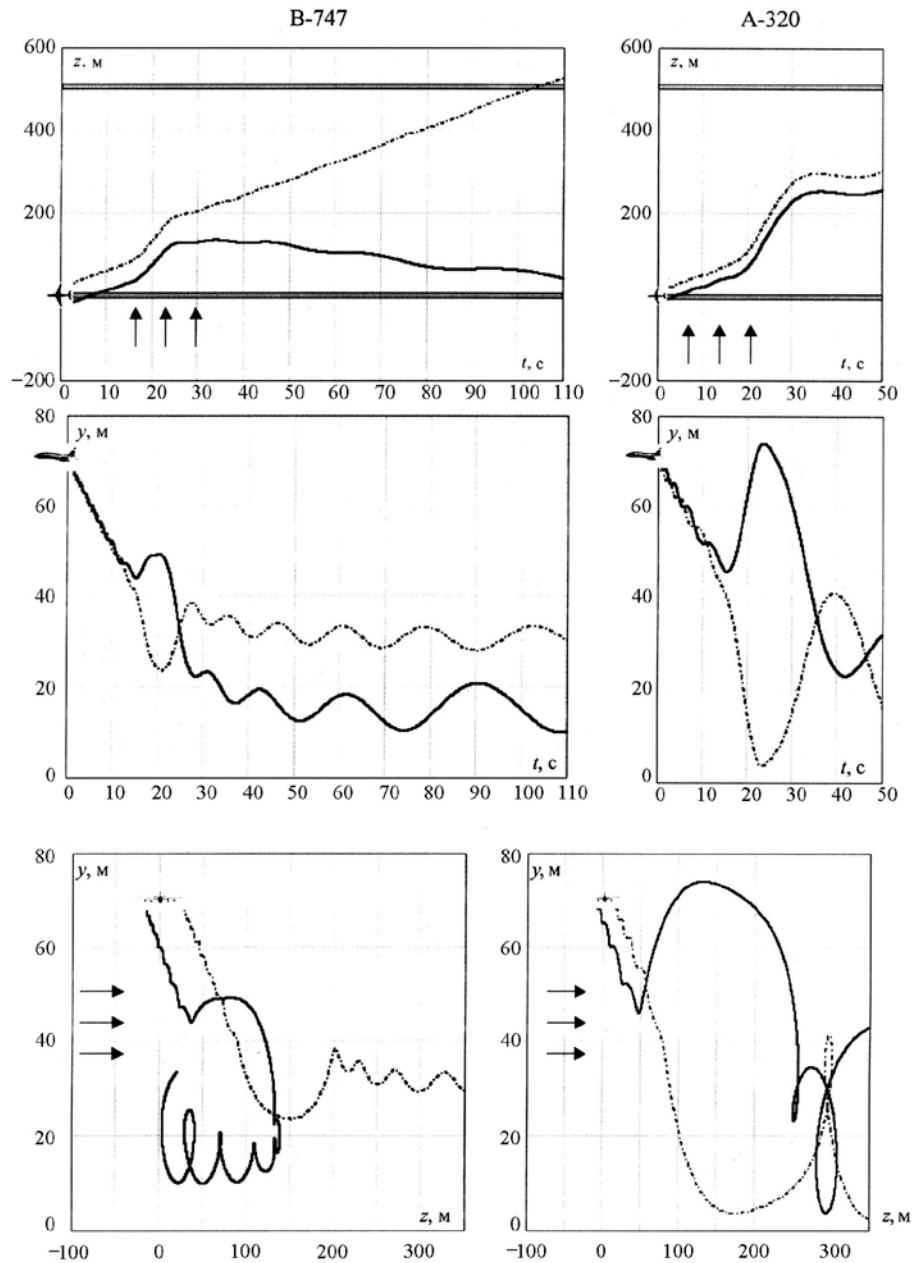


Рис. 4. Динамика вихревых жгутов за тяжелым (типа В-747, левая колонка) и средним (типа А-320, правая колонка) самолетами

На рис. 4 приведены результаты расчетов эволюции спутных вихрей самолетов двух классов: тяжелого (типа В-747), и среднего (типа А-320), — в трех проекциях (сверху, сбоку и сзади). Соответствующие значения размаха крыла и постоянной за самолетом циркуляции: 60 м, 641 м<sup>2</sup>/с; 34 м, 314 м<sup>2</sup>/с. Высота пролета обоих самолетов над левой взлетно-посадочной полосой одинакова:  $H=70$  м. Правая полоса параллельна левой на расстоянии 520 м. Скорость ветра линейно изменяется с высотой:  $V_z^\infty$  [м/с] =  $1 + 0.05y$  [м]; кроме того, на нее наложен постоянный по высоте «порыв» со скоростью  $\tilde{w}(t) = (V_z^{\infty(\max)} - V_z^{\infty(0)}) \exp(-\alpha_0(t - \tau)^2)$ . Принято  $V_z^{\infty(\max)} = 10$  м/с,  $V_z^{\infty(0)} = 1$  м/с; время  $\tau = 20$  соответствует максимуму порыва,  $\alpha_0 = 0.05 \text{ с}^{-2}$  — числовая постоянная, характеризующая его длительность; коэффициент квазисэффмановской силы  $\alpha^{\text{QS}} = 1$ , коэффициент при силе Жуковского  $\alpha_J = 2\pi$ ,  $v_\infty = 1$  м<sup>2</sup>/с.

Под действием порыва вихревая пара вначале сносится по ветру, причем вихри остаются параллельными при взгляде сверху. При этом наветренный вихрь уходит вверх, а подветренный «тонет», расхождение по высоте вихревых осей достигает 30 м. Заметим, что полученный поворот вихревой пары под действием ветра соответствует результатам расчетов [5], учитывающих приземный пограничный слой и образование вторичного вихря. В наших расчетах вторичный вихрь и обмен завихренностью между вихрями не принимались во внимание, однако учет сил Жуковского и Сэффмана приводит к правильному предсказанию поворота вихревой пары в плоскости, перпендикулярной их осям.

После прохождения максимума порыва подветренный вихрь «всплывает», а наветренный «падает» ниже него. Продолжая колебаться по высоте (подветренный с постоянной, а наветренный с нарастающей амплитудой), вихри «разбегаются» в разные стороны. Примечательно, что наветренный вихрь возвращается на левую полосу, а подветренный пересекает правую приблизительно в одно и то же время  $t=100\text{—}110$  с. Эта ситуация чрезвычайно важна для принятия решения о посадке следующего самолета.

Итак, видны следующие характерные явления: обычное разбегание вихрей в стороны из-за влияния близости земли; снос вихрей ветром (в результате при  $t \approx 100$  с вихри находятся в окрестности обеих полос); отскок вихрей от земли; при порыве — уход вверх наветренного и вниз — подветренного вихря, причем эти явления резче выражены для более легкого самолета.

Колебательный режим динамики вихревой пары (в том числе и нарастающие колебания вихрей на большой высоте) можно объяснить, заметив, что для одного вихря уравнение (1) без учета аэродинамической силы и силы Сэффмана математически тождественно уравнению движения заряженной частицы в скрещенных электрическом и магнитном полях. Роль магнитного поля играет вектор угловой частоты вращения вихря, роль электрического поля — вектор  $\mathbf{V}_{\text{вет}}$ , обусловленный наличием внешнего ветра. Известно, что в скрещенных полях частица движется по трохоиде — кривой, получающейся при движении точки, находящейся на некотором фиксированном радиусе вращающегося диска при параллельном переносе его центра. Такую же кривую описал бы и центр вихря в проекции на плоскость  $\{y, z\}$ , если бы можно было пренебречь действующей на него аэродинамической силой. Участки траектории вихря, соответствующие этому типу движения, хорошо видны на рис. 4 (средний самолет, вид сзади, петлеобразные участки в левом нижнем углу). Аналогичные траектории можно наблюдать и в демонстрациях с вращающимся цилиндром.

При рассмотрении пары вихрей получается система уравнений для пары связанных осцилляторов переменной массы, анализ которой выходит за рамки данной работы.

На рис. 2 и 3 показано сравнение расчетов и данных наземного эксперимента. Рис. 2 заимствован из сборника [4]. На нем приведены данные доплер-лидарных измерений положений вихревой пары самолета B-747-200. Высота полета 85 м, поперечная составляющая ветра 1—2 м/с, ветер переменный;  $z_c$  — поперечная координата, измеряемая от экспериментальной установки. Виден характерный отскок наветренного вихря на 37 с. Аналогичный, но происходящий позднее отскок получен в наших расчетах для высоты полета  $H=70$  м и сдвигового градиентного ветра  $V_z^\infty [\text{м/с}] = 1 + 0.05y [\text{м}]$  (условия аэродрома Франкфурта-на-Майне, см. рис. 3). Тонкие сплошные линии на рис. 3 — наш расчет, сплошная жирная линия — результат обработки серии доплер-лидарных измерений [6], штриховая линия — аналитическое решение для штиля.

Подчеркнем, что решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с выверенными экспериментом подгоночными коэффициентами теории (например,  $\alpha^{qS}$ ,  $\alpha_J$ ) для определения положения вихря обладает следующими преимуществами:

появляется возможность считать в режиме реального времени, в отличие от уравнений Навье — Стокса или их обрезанного (параболизованного) варианта, требующих создания баз данных, нейросетей и т. п.;

текущий ветер (метеоданные об изменении скорости ветра с высотой) мгновенно учитывается при решении ОДУ.



Предположим, например, что изменяющееся по сравнению с расчетным положение вихря фиксируется лазерной плоскостью и приемником рассеянного излучения; это новое измеренное положение вихрей может приниматься за новые начальные условия, и счет начинается снова. При решении уравнений Навье — Стокса такая коррекция, следующая почти мгновенно за начальными данными, вызывала бы серьезные затруднения.

**Выводы.** 1. Построена новая модель динамики вихревой пары самолета, учитывающая близость земли и градиентный порывистый приземный ветер, основанная на системе обыкновенных дифференциальных уравнений и представлении о силах, действующих на вихрь, дающая хорошее согласование с результатами наземных и летных экспериментов.

2. Модель дает возможность производить расчет в режиме реального времени с учетом коррекции положения вихрей и меняющейся ветровой обстановки, что позволяет использовать ее при разработке системы обеспечения вихревой безопасности взлета/посадки.

3. Представление о силе Жуковского, действующей на единицу длины вихря, дает возможность объяснить различные колебательные режимы вихревых жгутов.

**Приложение.** Авторы считают целесообразным привести ценное замечание рецензента настоящей статьи Г. Г. Судакова, позволяющее подтвердить «сконструированную» ими физическую модель методами классической гидродинамики:

«...уравнения, предложенные в данной работе, могут быть получены с помощью формальной процедуры, описанной в книге Л. И. Седова «Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики». — М.: Наука.— 1966. На стр. 27 этой книги дана формула, описывающая силы, действующие на жидкий контур  $C$ , произвольно движущийся в жидкости в инерциальной системе отсчета. Течение вне контура  $C$  (но не внутри!) предполагается потенциальным. Эта формула имеет вид (здесь выброшен член, ответственный за изменение циркуляции):

$$X + iY = \frac{i\rho}{2} \int_C \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 dz + \rho \frac{d^2(Sz^*)}{dt^2} + i\rho \int_C \frac{d}{dt} \left( z \frac{dw}{dz} \right) dz,$$

где  $\rho$  — плотность жидкости;  $i$  — мнимая единица;  $X + iY$  — сила, действующая на контур;  $z^*(t)$  — координата центра тяжести контура  $C$  (в данном случае — недеформируемого, но движущегося),  $S$  — площадь контура  $C$ ;  $z$  — комплексная координата;  $w$  — комплексный потенциал;  $t$  — время. В общем случае вне контура  $C$  разложение для комплексной скорости имеет вид

$$\frac{dw}{dz} = V + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z - z^*} + \frac{p}{2\pi i} \frac{1}{(z - z^*)^2} + \dots,$$

где  $p(t)$  — дипольный момент,  $V$  — скорость потока жидкости,  $\Gamma$  — циркуляция скорости по контуру  $C$ . Подставляя последнюю формулу в формулу Седова и беря интегралы с помощью вычетов по бесконечно удаленному контуру, получим основную формулу для сил, действующих на контур  $C$ :

$$X + iY = -i\rho \left( V - \frac{dz^*}{dt} \right) \Gamma + \rho S \frac{d^2 z^*}{dt^2} + i\rho \frac{dp}{dt}.$$

Как показано в книге Л. И. Седова, в случае движения твердого тела в покоящейся (на бесконечности) жидкости дипольный момент, вызванный взаимодействием твердых стенок тела с жидкостью, имеет вид

$$p = (\lambda_1 + i\lambda_2) \frac{dz^*}{dt}.$$

Коэффициенты  $\lambda_1, \lambda_2$  называются коэффициентами присоединенных масс. **В рассматриваемой задаче появление дипольного момента может быть вызвано нелинейным взаимодействием течения внутри ядра вихря с внешним потоком, т. е.**  $p = p\left(\frac{dz^*}{dt} - V, \frac{dV}{dz}\right)$ ,

где  $V$  — скорость ветра. Тогда в первом приближении

$$p = \lambda S \left( \frac{dz^*}{dt} - V \right) + \gamma \frac{dV}{dz}, \quad \frac{dp}{dt} = \lambda S \frac{d^2 z^*}{dt^2} - \lambda S \frac{dV}{dt} + \gamma' \frac{dV}{dz},$$

и мы формально получаем уравнения, приведенные в статье. Разумеется, функциональный вид коэффициентов  $\lambda, \gamma$  остается при этом неопределенным, но он может быть выписан, например по аналогии с движением твердого тела, как и указано в статье. В любом случае, правильность модели проверяется лишь путем сравнения результатов расчета с результатами расчета по 2D RANS или другими аналогичными моделями. Следует отметить, что при данном выводе совершенно неважно, каким образом порожден дипольный момент — взаимодействием жидкости с твердыми стенками тела или другим механизмом».

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вышинский В. В., Стасенко А. Л. Струйно-вихревой след самолета: проблемы экологии и безопасности полета. Математическое моделирование // РАН. — 1999. Т. 11, № 4.
2. Soudakov G. G. Engineering model of the wake behind the aircraft // Trudy TsAGI. — 1999. Vol. 2641.
3. Корнеева Т. Лидары. Новые возможности для атмосферных исследований // Электроника: наука, технология, бизнес. — 1998, № 3—4.
4. Vaughan J. M., Brown D. W., Constant G., Facock J. R., Foord R. Structure, trajectory and strenght of B-747 aircraft wake vortices measured by laser // AGARD-CP-584. — 1996.
5. Pakin A. Application of a modified  $q-\omega$  turbulence model to simulation of two-dimensional vortex gas motion // Trudy TsAGI. — 1997. Vol. 2627.
6. Köpp F. Doppler lidar investigation of wake vortex transport between closely spaced parallel runways // AIAA J. — 1994. Vol. 32. N 4.
7. Hinton D. A. Wake vortex data collection // Memphis International Airport. — 1995. d.a.hinton@larc.nasa.gov.
8. Белоцерковский Ал. С., Гиневский А. С., Погребная Т. В., Шипилов С. Д. Моделирование дальнего вихревого следа магистральных самолетов Ту-204 и Ил-96 на взлетно-посадочных режимах // ТВФ. — 2002, № 6.
9. Soudakov V. G. Nonlinear asymptotic model of the far vortex wake behind an aircraft flying through the turbulent air // Trudy TsAGI. — 1999. Vol. 2641.
10. Bobylev A. V., Kuzmin V. P., Yaroshevsky V. A. Mathematical simulation of the wake vortices effect on aircraft motion during automatic landing // Trudy TsAGI. — 1997. Vol. 2627.
11. El-Ramly. Aircraft trailing vortices, a survey of the problem // Carleton Univ., Ottawa, Canada, Nov. 1972. Report No. ME/A 72-1.
12. Birkhoff G. Hydrodynamics.— Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press. — 1960.
13. Соу С. Гидродинамика многофазных систем. — М.: Мир. — 1971.
14. Saffman P. G. Lift on a small sphere in a slow shear flow // J. Fluid Mech. — 1965. Vol. 22; Corrigendum 1968. Vol. 31.
15. Crow S. C. Stability theory for a pair of trailing vortices // AIAA J. — 1970. Vol. 8, N 2172.
16. Jacquín L., Garnier F. On the dynamics of engine jets behind a transport aircraft. In: The Characterization and Modification of Wake from Lifting Vehicles in Fluids. — Trondheim, Norway, 1996, May 20—23.
17. Гринац Э. С., Стасенко А. Л. Модели струй двигателей самолета в поле спутных вихрей // Ученые записки ЦАГИ. — 1996. Т. XXVII, № 1—2.
18. Стасенко А. Л., Толстых А. И., Ширококов Д. А. Динамика деформируемых капель у поверхности крыла в вязком воздухе // Изв. РАН, МЖГ. — 2002, № 5.

---

*Рукопись поступила 4/III 2004 г.*