

УДК 531.01

Уравнения движения систем связанных твёрдых тел в канонических переменных

В. А. Шимановский, В. Н. Иванов

Пермский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 614990, Пермь, ул.Букирева, 15
e-mail: vlshim@psu.ru; тел. (342) 239-65-60

В статье представлена новая форма уравнений движения систем многих тел. В качестве независимых параметров, однозначно определяющих положение тел системы и распределение скоростей, взяты канонические переменные. Предложен метод разрешения уравнений движения относительно старших производных, ориентированный на использование ЭВМ.

Ключевые слова: система многих тел, динамика, канонические переменные.

Введение

Компьютерное моделирование динамики механических систем широко используется в современной инженерной практике. Оно позволяет существенно уменьшить объём натурных испытаний и, в конечном счёте, сократить время и стоимость новых разработок. При исследовании динамики механических систем в качестве математической модели часто используют систему связанных абсолютно твёрдых тел. Требование точности компьютерного моделирования заставляет увеличивать число тел, на которые разбивается механическая система. В то же время, с ростом размерности математической модели увеличивается и трудоёмкость моделирования. Особенно заметное время затрачивается на стадии проектирования технических устройств, когда приходится проводить многократные вычислительные эксперименты различных вариантов конструкции в различных условиях эксплуатации. Поэтому разработка методов, позволяющих ускорить процесс математического моделирования, является актуальной задачей.

В настоящей работе выводятся уравнения движения систем связанных твёрдых тел с использованием канонических переменных — обобщённых координат и обобщённых импульсов. Данная статья является продолжением статей [1, 2], посвящённых различным методам формирования уравнений движения систем многих тел.

1. Описание механической системы

Рассмотрим систему абсолютно твёрдых тел со структурой дерева. Пусть N — число тел в системе (не считая тела «0», движение которого относительно инерциальной системы координат $Oxyz$ задано функцией времени). Тогда количество шарниров всегда будет равно N , если учитывать шарнир между системой и телом «0». Под шарнирами будем понимать соединение между двумя смежными телами, возникающее вследствие как наличия кинематической связи между телами, так и взаимодействия посредством различных силовых полей. Будем предполагать, что кинематические связи, реализуемые в шарнирах, голономны и идеальны.

Пронумеруем тела и шарниры системы. Телам присвоим номера таким образом, чтобы для любого тела номер предшествующего ему тела был меньше. Шарниру, связывающему i -е тело с предшествующим, присвоим номер i . В этом случае для полного описания структуры взаимосвязей системы со структурой дерева достаточно одного целочисленного массива k длины N , на i -м месте которого расположен индекс тела, предшествующего i -му.

Кроме того, с каждым телом системы свяжем следующие множества: P_i — упорядоченное множество индексов шарниров, составляющих путь между нулевым и i -м телами; S_i — множество индексов шарниров, для которых i -е тело является предшествующим.

Для описания движения системы тел введем инерциальную систему координат, определяемую центром O и ортонормированными векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Положение и ориентация каждого тела системы относительно инерциальной системы координат будем определять с помощью радиус-вектора $\vec{r}_i = \overrightarrow{OO_i}$ фиксированной нём точки O_i и системы ортонормированных векторов $\vec{e}_1^{(i)}, \vec{e}_2^{(i)}, \vec{e}_3^{(i)}$, которые вместе с точкой O_i определяют координатную систему, неизменно связанную с телом. В качестве скалярных величин, определяющих положение тела, можно выбрать координаты вектора $\vec{r}_i$ в инерциальной системе координат (матрица-столбец r_i) и элементы матрицы направляющих косинусов G_0^i между этими системами.

Используем метод относительного описания положения тел системы. При таком подходе положение системы твёрдых тел в инерциальном пространстве определено однозначно, если положение тел относительно друг друга известно для всех соединений и, кроме того, известно положение подвижной системы координат, связанной с нулевым телом.

2. Кинематика системы. Матрицы кинематической структуры

Движение нулевого тела, которое принимаем заданным, определяется функциями $\vec{r}_0(t)$, $G_0(t)$ и производными от них функциями $\vec{v}_0(t)$, $\vec{\omega}_0(t)$.

Положение i -го тела относительно связанной с базовым (несущим) для него телом системой координат однозначно определяется

радиус-вектором $\vec{r}_i = \overrightarrow{O_{k_i}O_i}$ и ортонормированными векторами $\vec{e}_1^{(i)}, \vec{e}_2^{(i)}, \vec{e}_3^{(i)}$. В качестве скалярных величин, определяющих положение тела s_i , выберем координаты ρ_i вектора $\vec{r}_i$ в системе координат, связанной с телом номер k_i , и элементы матрицы $G_{k_i}^i \equiv G_i$ направляющих косинусов (перехода) между базисными векторами, связанными с телами. Таким образом, если тело свободно, множество $\mathcal{M}_i$ его положений является шестимерным многообразием [3], которое будем называть многообразием относительного положения тела.

Предположим, что физическая связь в шарнире с достаточной степенью адекватности моделируется системой $m_i \leq 6$ идеальных голономных связей

$$\xi_i(x_i, t) = 0, \quad (1)$$

где ξ_i — m_i -мерная дифференцируемая вектор-функция, x_i — шестимерный вектор квазиординат, параметризующий пространство $\mathcal{M}_i$.

Связи (1) определяют в пространстве $\mathcal{M}_i$ некоторое многообразие $\mathcal{S}_i$. Будем предполагать, что ранг матрицы $Z_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i^T}$ равен m_i . Тогда $\mathcal{S}_i$ является конфигурационным многообразием размерности $n_i = 6 - m_i$.

Уравнения n_i -мерного многообразия $\mathcal{S}_i$ в пространстве $\mathcal{M}_i$ можно записать в параметрической форме, введя n_i -мерный вектор $q_i = (q_i^1, \dots, q_i^{n_i})$ криволинейных координат его текущей точки:

$$\rho_i = \rho_i(q_i, t), \quad G_i = G_i(q_i, t). \quad (2)$$

В качестве обобщённых параметров системы примем совокупность криволинейных координат q_i . Задание вектора $q = \{q_i\}_N$ как функции времени позволяет однозначно определить в любой момент взаимное положение тел и их движение относительно абсолютной системы координат.

С помощью формул (2) запишем рекуррентную формулу для вычисления координат радиус-векторов $\vec{r}_i$ в инерциальной системе координат

$$r_i = r_{k_i} + G_0^{iT} \rho_i,$$

где r_i и r_{k_i} — координаты векторов $\vec{r}_i$ и $\vec{r}_{k_i}$ в инерциальной системе координат, а матрица перехода G_0^i из инерциальной системы координат в систему координат, связанную с i -м телом. Эта матрица может быть вычислена с помощью рекуррентной формулы

$$G_0^i = G_{k_i}^i G_0^{k_i}.$$

Для проекций поступательной $\vec{v}_i$ и угловой $\vec{\omega}_i$ скоростей i -го тела на оси связанной с ним системой координат можно записать

$$v_i = G_0^i \dot{r}_i = G_0^i \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial r_i}{\partial t} \right),$$

$$\tilde{\omega}_i = G_0^i \dot{G}_0^{i^T} = G_0^i \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial G_0^{i^T}}{\partial q_k} \dot{q}_k + G_0^i \frac{\partial G_0^{i^T}}{\partial t} \right)$$

или в матричной форме

$$v = B\dot{q} + \varphi, \quad (3)$$

где $v = (v_1, \omega_1, \dots, v_N, \omega_N)$,

$$B = \begin{pmatrix} b_{11}^v & \dots & b_{1n}^v \\ b_{11}^\omega & \dots & b_{1n}^\omega \\ \vdots & & \vdots \\ b_{N1}^v & \dots & b_{Nn}^v \\ b_{N1}^\omega & \dots & b_{Nn}^\omega \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} b_{10}^v \\ b_{10}^\omega \\ \vdots \\ b_{N0}^v \\ b_{N0}^\omega \end{pmatrix},$$

$$b_{ik}^v = G_0^i \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \quad (k = \overline{1, n}), \quad b_{i0}^v = G_0^i \frac{\partial r_i}{\partial t},$$

$$\tilde{b}_{ik}^\omega = G_0^i \frac{\partial G_0^{i^T}}{\partial q_k} \quad (k = \overline{1, n}), \quad \tilde{b}_{i0}^\omega = G_0^i \frac{\partial G_0^{i^T}}{\partial t}.$$

Символ « $\sim$ » используется для обозначения косимметричной матрицы (матричная запись векторного произведения [4]).

С другой стороны, принимая движение предшествующего тела переносным, а рассматриваемого тела — относительным, в соответствии с правилом сложения скоростей можно записать рекуррентные формулы для вычисления линейной v_i и угловой ω_i скоростей тел механической системы [1]

$$v_i = C_i v_{k_i} + A_i \dot{q}_i + v_i^*, \quad (4)$$

где

$$C_i = \begin{pmatrix} G_i & -G_i \tilde{\rho}_i \\ 0 & G_i \end{pmatrix},$$

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{i1}^v & \dots & a_{in_i}^v \\ a_{i1}^\omega & \dots & a_{in_i}^\omega \end{pmatrix}, \quad v_i^* = \begin{pmatrix} a_{i0}^v \\ a_{i0}^\omega \end{pmatrix},$$

$$a_{ik}^v = G_i \frac{\partial \rho_i}{\partial q_k} \quad (k = \overline{1, n_i}), \quad a_{i0}^v = G_i \frac{\partial \rho_i}{\partial t},$$

$$\tilde{a}_{ik}^\omega = G_i \frac{\partial G_i^T}{\partial q_k} \quad (k = \overline{1, n_i}), \quad \tilde{a}_{i0}^\omega = G_i \frac{\partial G_i^T}{\partial t}.$$

Данные рекуррентные формулы можно записать в виде явных выражений

$$v = T(A\dot{q} + v^*), \quad (5)$$

где $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_N)$, а матрица T является блочной $6N \times 6N$ матрицей, подматрицы

которой могут быть вычислены по рекуррентным формулам:

$$T_{ij} = \begin{cases} E_6, & j = i, \\ C_i T_{k_i j}, & j \in P_i, \quad i, j = \overline{1, N}. \\ 0_{6 \times 6}, & j \notin P_i, \end{cases} \quad (6)$$

Сравнивая формулы (3) и (5), получаем, что

$$B = TA, \quad \varphi = Tv^*.$$

Введём блочную $6N \times 6N$ матрицу S с квадратными подматрицами порядка 6 по следующей формуле:

$$S_{ij} = \begin{cases} E_6, & j = i, \\ -C_i, & j = k_i, \quad i, j = \overline{1, N}. \\ 0_{6 \times 6}, & j \neq i \vee k_i, \end{cases} \quad (7)$$

Заметим, что эта матрица для любой кинематической структуры содержит в каждой строке только два ненулевых блока E_6 и $-C_i$.

Поскольку матрица S содержит информацию как о топологической структуре системы, так и об относительном положении тел в системе, будем называть её матрицей кинематической структуры.

С использованием матрицы S , уравнение кинематики системы тел (4) можно записать следующим образом

$$Sv = A\dot{q} + v^*. \quad (8)$$

Таким образом, матрица S позволяет проектировать вектора из пространства абсолютных скоростей системы в пространство векторов относительных скоростей.

Из формул (5) и (8) следует, что матрица T является обратной для матрицы S , т. е.

$$TS = ST = E. \quad (9)$$

Кроме того, матрица T позволяет проектировать векторы из пространства относительных скоростей в пространство абсолютных скоростей.

Для дальнейшего изложения нам требуется формула производной от матрицы T . Для её вывода получим формулу для производной от матрицы C_i :

$$\begin{aligned}
 \dot{C}_i &= \begin{pmatrix} \dot{G}_i & -\dot{G}_i \tilde{\rho}_i - G_i \dot{\tilde{\rho}}_i \\ 0 & \dot{G}_i \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} -\tilde{\omega}_i^r G_i & \tilde{\omega}_i^r G_i \tilde{\rho}_i - \tilde{v}_i^r G_i \\ 0 & -\tilde{\omega}_i^r G_i \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} G_i \tilde{\omega}_{k_i} & G_i \tilde{v}_{k_i} - G_i \tilde{\rho}_i \tilde{\omega}_{k_i} \\ 0 & G_i \tilde{\omega}_{k_i} \end{pmatrix} - \\
 &- \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_i G_i & -\tilde{\omega}_i G_i \tilde{\rho}_i + \tilde{v}_i G_i \\ 0 & \tilde{\omega}_i G_i \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} G_i & -G_i \tilde{\rho}_i \\ 0 & G_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_{k_i} & \tilde{v}_{k_i} \\ 0 & \tilde{\omega}_{k_i} \end{pmatrix} - \\
 &- \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_i & \tilde{v}_i \\ 0 & \tilde{\omega}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_i & -G_i \tilde{\rho}_i \\ 0 & G_i \end{pmatrix} = \\
 &= \Omega_i^T C_i - C_i \Omega_{k_i}^T,
 \end{aligned}$$

где введено обозначение

$$\Omega_i = \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_i & 0 \\ \tilde{v}_i & \tilde{\omega}_i \end{pmatrix}.$$

Из этого равенства и формулы (7) следует

$$\dot{S} = \Omega^T S - S \Omega^T, \quad (10)$$

где

$$\Omega = \text{diag}(\Omega_1, \dots, \Omega_N).$$

Продифференцируем равенство (9) и из полученного выражения выразим $\dot{T}$. Тогда с учётом формулы (10) получим

$$\dot{T} = -T \dot{S} T = \Omega^T T - T \Omega^T. \quad (11)$$

3. Расширенная система уравнений движения

Для составления уравнений движения систем связанных твёрдых тел со структурой дерева будем использовать принцип освобождения от связей. В этом случае мысленно уничтожаем связи между телами, а движение системы, осуществляемое при наличии связей, обеспечим введением дополнительных сил — реакциями связей. Введение реакций связей позволяет записать дифференциальные уравнения движения любого тела в форме уравнений Эйлера—Лагранжа для свободного твёрдого тела [5]:

$$M_i \dot{v}_i + \Omega_i M_i v_i = F_i + R_i - \sum_{j \in S_i} C_j^T R_j, \quad (12)$$

со следующими матрицами:

$$\begin{aligned}
 M_i &= \begin{pmatrix} m_i E & -m_i \tilde{r}_i^c \\ m_i \tilde{r}_i^c & J_i \end{pmatrix}, \\
 F_i &= \begin{pmatrix} f_i \\ m_i \tilde{o}_i \end{pmatrix}, \quad R_j = \begin{pmatrix} \tau_j \\ \mu_j \tilde{o}_j \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

где m_i — масса i -го тела; J_i — тензор инерции i -го тела; r_i^c — проекции радиус-вектора центра масс i -го тела на оси связанной с ним системы координат; $\vec{f}_i$ — главный вектор активных сил, действующих на i -е тело; $\vec{m}_i^{O_i}$ — главный момент активных сил, действующих на i -е тело; $\vec{\tau}_j$ — главный вектор реакций связей в j -м шарнире; $\vec{\mu}_j^{O_i}$ — главный момент реакций связей в j -м шарнире относительно точки O_i .

С использованием матрицы кинематической структуры S уравнение (12) запишем в краткой матричной форме:

$$M \dot{v} + \Omega M v = F + S^T R \quad (13)$$

со следующими матрицами:

$$M = \text{diag}(M_1, \dots, M_N),$$

$$F = (F_1, \dots, F_N),$$

$$R = (R_1, \dots, R_N).$$

Декартовым импульсом системы назовём $6N$ -мерный вектор

$$p^r = M v. \quad (14)$$

Представление вектора p^r в касательном базисе B , n -мерный вектор

$$p = B^T p^r \quad (15)$$

назовём обобщённым импульсом.

С учётом (14), уравнение динамики (13) можно записать в виде

$$\dot{p}^r + \Omega p^r = F + S^T R. \quad (16)$$

Получим выражение для производной от обобщённого импульса $\dot{p}$. Для этого спроектируем уравнение (16) на касательное подпространство, умножив его слева на B^T . Получим

$$B^T \dot{p}^r + B^T \Omega p^r = B^T F$$

или

$$\dot{p} = (\dot{B}^T - B^T \Omega) p^r + Q. \quad (17)$$

Здесь было учтено равенство

$$B^T S^T R = A^T T^T S^T R = A^T R = 0,$$

отражающее то обстоятельство, что в случае идеальности связей реакции в шарнирах являются ортогональными к конфигурационному многообразию $\mathfrak{S}_i$, определяемому параметрами q_i .

Уравнения (8), (17) совместно с равенствами (14), (15) образуют замкнутую систему $12N + 2n$ дифференциальных и алгебраических уравнений относительно неизвестных величин q , p , v и p^r .

Преобразуем выражение $(\dot{B}^T - B^T \Omega)p^r$ с учётом формулы (11):

$$\begin{aligned} (\dot{B}^T - B^T \Omega)p^r &= \\ &= (\dot{A}^T T^T + A^T \dot{T}^T - A^T T^T \Omega)S^T \mu = \\ &= (\dot{A}^T + A^T(T^T \Omega - \Omega T^T)S^T - A^T T^T \Omega S^T)\mu = \\ &= (\dot{A}^T - A^T \Omega)\mu, \end{aligned}$$

где введено обозначение $\mu = T^T p^r$.

В результате получим следующую расширенную систему уравнений движения:

$$\begin{cases} Mv - S^T \mu = 0, \\ -Sv + A\dot{q} = -v^*, \\ A^T \mu = p, \\ \dot{p} = (\dot{A}^T - A^T \Omega)\mu + Q. \end{cases} \quad (18)$$

Особенность системы уравнений (18) состоит в том, что она разрешена относительно производных от обобщённых импульсов $\dot{p}$. Первые три уравнения образуют линейную систему с симметричной, блочной трёхдиагональной, разреженной матрицей коэффициентов относительно скоростей v , $\dot{q}$ и множителей Лагранжа μ .

Расширенная система (18) может быть непосредственно использована для моделирования систем многих тел. С другой стороны, она служит основой для получения других (в том числе известных) форм записи уравнений динамики систем тел со структурой дерева.

4. Решение расширенной системы уравнений движения методом «прогонки»

Учитывая формулы (6) и (7), систему уравнений (18) запишем в следующем виде

$$\mu_i = M_i v_i + \sum_{j \in S_i} C_j^T \mu_j, \quad (19)$$

$$v_i = C_i v_{k_i} + A_i \dot{q}_i + v_i^*, \quad (20)$$

$$A_i^T \mu_i = p_i. \quad (21)$$

$$\dot{p}_i = (\dot{A}_i^T - A_i^T \Omega_i)\mu_i + A_i^T F_i^*, \quad (22)$$

где

$$F_i^* = F_i + \sum_{j \in S_i} C_j^T F_j^*. \quad (23)$$

Найдём из этой системы рекуррентные формулы для вычисления обобщённых скоростей $\dot{q}$ и производных от обобщённых импульсов $\dot{p}$.

Докажем, что для каждого тела системы импульс μ_i может быть представлен в виде

$$\mu_i = M_i^* v_i + \varphi_i^*. \quad (24)$$

Нетрудно видеть, что для концевых тел системы это выполняется:

$$M_i^* = M_i, \quad \varphi_i^* = 0.$$

Предположим, что формула (24) справедлива для всех номеров $j \in S_i$. Покажем, что она справедлива и для номера i .

С помощью формулы (20) исключим из (24) вектор v_i :

$$\mu_i = M_i^* C_i v_{k_i} + M_i^* A_i \dot{q}_i + M_i^* v_i^* + \varphi_i^*. \quad (25)$$

Подставим полученное равенство в уравнение (21) и выразим из него вектор $\dot{q}_i$:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= (A_i^T M_i^* A_i)^{-1} \times \\ &\times (p_i - A_i^T (\varphi_i^* + M_i^* (C_i v_{k_i} + v_i^*))). \end{aligned} \quad (26)$$

С помощью формул (25), (26) из уравнения (19) исключим множители μ_j , $j \in S_i$ несомых тел:

$$\begin{aligned} \mu_i &= M_i v_i + \sum_{j \in S_i} C_j^T [M_j^* C_j v_j + \\ &+ M_j^* A_j (A_j^T M_j^* A_j)^{-1} \times \\ &\times (p_j - A_j^T (\varphi_j^* + M_j^* (C_j v_j + v_j^*))) + \\ &+ M_j^* v_j^* + \varphi_j^*]. \end{aligned}$$

Собирая в полученном равенстве коэффициент перед v_i , преобразуем его к виду (24), где

$$\begin{aligned} M_i^* &= M_i + \sum_{j \in S_i} [C_j^T M_j^* C_j - \\ &- C_j^T M_j^* A_j (A_j^T M_j^* A_j)^{-1} A_j^T M_j^* C_j], \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \varphi_i^* &= \sum_{j \in S_i} C_j^T [M_j^* A_j (A_j^T M_j^* A_j)^{-1} p_j + \\ &+ (E - M_j^* A_j (A_j^T M_j^* A_j)^{-1} A_j^T) \times \\ &\times (M_j^* v_j^* + \varphi_j^*)]. \end{aligned} \quad (28)$$

Таким образом, процесс вычисления обобщённых скоростей и производной от обобщённых импульсов состоит из двух этапов. На первом этапе по формулам (27), (28) и (23) вычисляются матрицы M_i^* и векторы φ_i^* , F_i^* начиная с концевых тел и заканчивая корневым. На втором этапе начиная с корневого тела с помощью формул (26), (20), (24) и (22) вычисляются обобщённые скорости $\dot{q}_i$ и производные от обобщённых импульсов $\dot{p}_i$, при этом учитывается, что скорость нулевого тела известна.

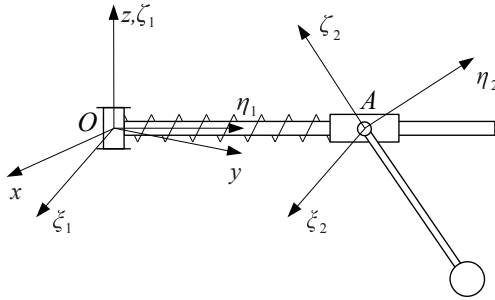
Данный метод является одним из самых эффективных методов численного моделирования систем с длинными кинематическими цепочками. Трудоемкость решения системы

уравнений (18) данным алгоритмом растёт по линейному закону в зависимости от числа тел в механической системе. В нём требуется обращение лишь матриц $A_i^T M_i^* A_i$, порядок которых равен числу степеней свободы в i -м шарнире. Они симметричны, положительно определены. И поскольку их порядок всегда мал (не превышает шести), то этим и обусловлена эффективность этого метода.

Выписанный алгоритм аналогичен методу Верещагина А. Ф., предложенному в работах [6, 7] для решения относительно ускорений общих уравнений динамики цепочки твёрдых тел.

5. Пример составления уравнений движения системы тел

Для иллюстрации техники составления уравнений движения (18), а также определения всех входящих в них параметров выведем уравнения движения для механической системы, изображённой на рисунке.



Введём неподвижную $Oxyz$ и связанные с телами $O\xi_1\eta_1\zeta_1$, $A\xi_2\eta_2\zeta_2$ системы координат как показано на рисунке.

Система состоит из двух тел с массами m_1 и m_2 и осевыми моментами инерции J_{1x} , J_{1y} , J_{1z} и J_{2x} , J_{2y} , J_{2z} .

Предположим, что в точке O цилиндрический шарнир обеспечивает вращение OA вокруг оси Oz . Точка A может перемещаться вдоль оси $O\eta_1$ и кроме того, шарнир в этой точке обеспечивает вращение второго тела сначала вокруг оси $O\eta_1$, а затем вокруг оси $O\xi_2$.

На тела системы действует сила тяжести, кроме того, точки O и A связаны пружиной.

Рассматриваемая система имеет четыре степени свободы. В качестве обобщённых координат выберем угол γ_1 — угол поворота первого тела вокруг оси Oz , изменяющуюся длину $OA = y_2$, а также углы β_2 и α_2 поворота

второго тела вокруг осей $O\eta_1$ и $O\xi_2$ соответственно.

Подготовим элементы уравнений движения (18).

Координаты точек O и A в системах координат $Oxyz$ и $O\xi_1\eta_1\zeta_1$ соответственно равны

$$\rho_1 = (0, 0, 0), \quad \rho_2 = (0, y_2, 0).$$

Матрицы направляющих косинусов между системами координат имеют вид

$$G_1 = \begin{pmatrix} c_{\gamma_1} & s_{\gamma_1} & 0 \\ -s_{\gamma_1} & c_{\gamma_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} c_{\beta_2} & s_{\alpha_2}s_{\beta_2} & -c_{\alpha_2}s_{\beta_2} \\ 0 & c_{\alpha_2} & s_{\alpha_2} \\ s_{\beta_2} & -s_{\alpha_2}c_{\beta_2} & c_{\alpha_2}c_{\beta_2} \end{pmatrix},$$

где

$$c_{\gamma_1} = \cos \gamma_1, \quad c_{\alpha_2} = \cos \alpha_2, \quad c_{\beta_2} = \cos \beta_2, \\ s_{\gamma_1} = \sin \gamma_1, \quad s_{\alpha_2} = \sin \alpha_2, \quad s_{\beta_2} = \sin \beta_2.$$

Для матриц масс тел системы получаем

$$M = \text{diag}(M_1, M_2),$$

где

$$M_1 = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m_1 y_{c2} \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & m_1 y_{c2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 y_{c2} & J_{1x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{1y} & 0 \\ -m_1 y_{c2} & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{1z} \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} m_2 & 0 & 0 & 0 & m_2 z_{c2} & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & -m_2 z_{c2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m_2 z_{c2} & 0 & J_{2x} & 0 & 0 \\ m_2 z_{c2} & 0 & 0 & 0 & J_{2y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{2z} \end{pmatrix}.$$

Матрица кинематической структуры имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} E & 0 \\ -C_2 & E \end{pmatrix},$$

где

$$C_2 = \begin{pmatrix} G_2 & -G_2 \tilde{\rho}_2 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix}.$$

Матрица локальных касательных базисов имеет вид

$$A = \text{diag}(A_1, A_2),$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} s_{\alpha_2} s_{\beta_2} & 0 & 0 \\ c_{\alpha_2} & 0 & 0 \\ -s_{\alpha_2} c_{\beta_2} & 0 & 0 \\ 0 & c_{\beta_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & s_{\beta_2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как механическая система стационарна, то вектор $v^* = 0$.

Вектор обобщённых сил имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} k(\omega_0 - \dot{\gamma}_1) \\ c(y_{20} - y_2) \\ g m_2 z_{c2} s_{\alpha_2} c_{\beta_2} \\ g m_2 z_{c2} c_{\alpha_2} s_{\beta_2} \end{pmatrix},$$

где k — коэффициент усиления, ω_0 — угловая скорость вращения первого тела, c — коэффициент жёсткости пружины, y_{20} — длина ненапряжённого состояния пружины, g — ускорение свободного падения.

Производная от матрицы локальных касательных базисов равна

$$\dot{A} = \text{diag}(0_{6 \times 1}, \dot{A}_2),$$

где

$$\dot{A}_2 = \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_2 c_{\alpha_2} s_{\beta_2} + \dot{\beta}_2 s_{\alpha_2} c_{\beta_2} & 0 & 0 \\ -\dot{\alpha}_2 s_{\alpha_2} & 0 & 0 \\ \dot{\alpha}_2 c_{\alpha_2} c_{\beta_2} + \dot{\beta}_2 s_{\alpha_2} s_{\beta_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\beta}_2 s_{\beta_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\beta}_2 c_{\beta_2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь для получения уравнений движения в канонических переменных достаточно

подставить вычисленные значения в уравнения (18).

Список литературы

1. Шимановский В. А., Иванов В. Н. Формирование уравнений движения механических систем в обобщённых координатах // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. ун-т. Пермь, 2005. Вып. 37. С. 188–201.
2. Шимановский В. А., Иванов В. Н. Методы составления уравнений движения систем связанных твердых тел в декартовых координатах // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. ун-т. Пермь, 2007. Вып. 39. С. 248–262.
3. Лилов Л. К. Моделирование систем связанных тел. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1993. 272 с.
4. Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел. М.: Мир, 1980. 292 с.
5. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. 824 с.
6. Верещагин А. Ф. Метод моделирования на ЦВМ динамики сложных механизмов роботов-манипуляторов // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1974. № 6. С. 89–94.
7. Верещагин А. Ф. Принцип наименьшего принуждения Гаусса для моделирования на ЭВМ динамики роботов-манипуляторов // Докл. АН СССР. 1975. Т. 220, № 1. С. 51–53.

The equations of motion of rigid body systems in the canonical variables

V. A. Shimanovskiy, V. N. Ivanov

Perm State University, Russia, 614990, Perm, Bukireva st., 15
vlshim@psu.ru; +7 342 239 6560

The article introduces a new form of the multibody systems' equations of motion. Canonical variables are selected as the independent parameters uniquely identifies the configuration system and velocity distributions. The method of solution of the equations of motion for highest derivatives oriented on computers use is offered.

Key words: *multibody systems, dynamics, canonical variables.*