УДК 621.316.98: 22.193

А.Н. Потапенко, Е.А. Канунникова, Т.А. Потапенко

ОСОБЕННОСТИ МЕТОДА ИНВЕРСИИ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ВНЕШНИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ, СВЯЗАННЫХ С ЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ ПОЛЯМИ В АТМОСФЕРЕ

При математических методах исследования от стержня Франклина до различного типа элементов систем молниезащит определяются электрические поля (ЭП) с учетом условий грозовой активности в атмосфере.

Исследуемые задачи относятся к классу внешних краевых задач. Несмотря на разнообразие способов решения этих задач при численных методах моделирования бесконечной области используются два основных подхода: во-первых, введение области расчета достаточно больших размеров с возможностью некоторого исключения влияния краевых эффектов на результаты расчетов; во-вторых, искусственное ограничение расчетной области путем введения в постановку задачи экранов и других приемов на основе применения граничного условия типа $\partial\psi/\partial n = 0$. При этом общим недостатком является снижение точности (например, при введении экранов) и эффективности численных расчетов (например, при задании расчетной области достаточно больших размеров).

Применительно для расчета ЭП в задачах, связанных с исследованиями молниеприемников стержневого типа систем молниезащит, используются *методы* конечных элементов (МКЭ) [1, 2], конечных разностей (МКР) [3, 4] и др. Среди развиваемых методов решения подобных задач необходимо отметить метод инверсии для полубезграничных сред (МИПБС) [4, 5], принятый за основу для численных расчетов в данной работе. При этом следует отметить, что МКР, в отличие от МКЭ, позволяет увеличить точность расчетов напряженности поля для различных типов угловых зон или стержней исследуемых объектов [5] с учетом применения алгоритма Брезенхэма.

Исследование [4] распределенной системы типа «плоскость-проводник» позволило выявить особенности краевого эффекта для заземленного стержня относительно облака, причем исследован идеальный вариант, в котором облако представлено в виде некоторого круга. Это связано с тем, что за основу для схемы моделирования данной работы с применением МИПБС приняты соотношения размеров как в [3] с возможностью сравнительного анализа полученных результатов и с учетом того, что основные подходы работы известны специалистам [6].

В рамках статьи исследуются особенности модифицированного метода инверсии на примере определения электрического поля относительно заземленного стержневого молниеприемника и с учетом облака и его граничной поверхности.

Постановка задачи. Для исследования особенностей МИПБС относительно к распределенной системе типа «плоскость-проводник» применяется по аналогии с [4] схема моделирования, показанная на рис. 1. Схема включает стержень Γ_4 на плоскости Γ_1 в виде поверхности земли $F(x, y)$ и облако $V(x, y)$ в виде плоскости Γ_6, находящейся в полубезграничной области относительно поверхности $F(x,y)$. В силу симметрии изучаемого объекта исследуется только часть некоторой полусферической области.

ЭП определяется относительно проводящей плоскости Γ_1 со стержнем Γ_4 (их потенциал ψ принимается равным нулю) и с учетом краевого эффекта от граничной поверхности облака Γ_6, являющейся частью круга. Считаем, что исследу-

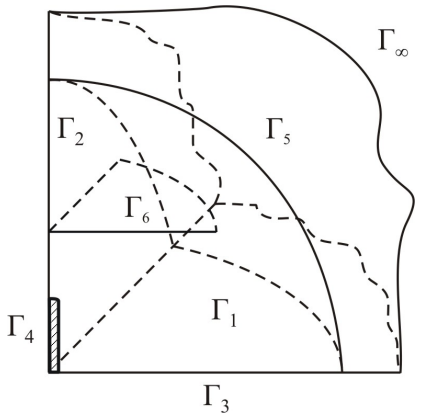


Рис 1. Схема моделирования молниеприемника стержневого типа

ется статический режим с учетом возникновения в некоторый момент времени на Γ_6 потенциала, равного ψ_{B0}. Эта постановка отличается от постановки задач [7, 8], в которых задается некоторое направление нисходящего стримера в воздухе, как правило, в виде проводника, причем в работе [7] не приводится конкретная математическая постановка задачи, а в [8] указывается, что моделирование поля потенциала осуществляется на основе уравнения Лапласа, но без указания граничных условий. Исходная постановка также отличается и от постановки задачи [3], в которой внешняя краевая задача сводится к внутренней путем задания граничных условий в исследуемой области в виде $\partial\psi/\partial n = 0$.

Поле распределения ψ подчиняется уравнению Лапласа, как в [4]:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=0;\ (x, y, z)\in D(x, y, z). \quad (1)$$

Граничные условия задачи следующие:

- на границах Γ_1 и Γ_4

$$\psi(x, y, z) = 0,\ (x, y, z)\in \Gamma_1, \Gamma_4; \quad (2)$$

- на границе Γ_∞

$$\psi(\infty) = 0; \quad (3)$$

- на поверхностях симметрии области, т. е. на границах Γ_2, Γ_3

$$\partial\psi/\partial n = 0,\ (x, y, z)\in \Gamma_2, \Gamma_3; \quad (4)$$

- на границе Γ_6

$$\psi(x, y, z) = \psi_{B0},\ (x, y, z)\in \Gamma_6, \quad (5)$$

где $D(x, y, z)$ – исследуемая область, ограниченная Γ_1–Γ_4, Γ_6 и Γ_∞; причем Γ_∞ – условная граница на бесконечности; Γ_5 – внутренняя граница в $D(x, y, z)$ (искусственно введенная граница [4]).

С учетом использования МИПБС считаем, что некоторая выделенная область $D'_m(x, y, z)$, входящая в состав области $D(x, y, z)$, имеет форму некоторой части полусферы с радиусом R_0 и с границами Γ_1–Γ_6 (эта область может быть представлена в виде куба, параллелепипеда и др., определяется видом области с исследуемым объектом, например [9]). Для реализации этого метода необходима дополнительная область $D^*_m(x, y, z)$, чтобы часть оставшейся области $D(x, y, z)$ между границами Γ_5 и Γ_∞ отобразилась на эту дополнительную область. Следует отметить, что составные области $D'_m(x, y, z)$ и $D^*_m(x, y, z)$ соприкасаются по внутренней поверхности Γ_5 в исходной области $D(x, y, z)$.

Особенности дискретной математической модели. Для краевой задачи с учетом уравнения (1) и граничных условий (2)–(5) уравнения в операторной форме для определения поля потенциала ψ в узлах (i, j, k) для дискретной области $D_d(x, y, z)$ имеют следующий вид:

$$L_h\psi^{(h)} \equiv \begin{cases} L_{xx}\psi_{ijk} + L_{yy}\psi_{ijk} + L_{zz}\psi_{ijk} = 0, \\ (x_i, y_j, z_k) \in D_d(x, y, z); \\ L_n\psi_{ijk} = 0,\ (x_i, y_j, z_k) \in \Gamma_2, \Gamma_3; \\ \psi_{ijk} = \psi_{B0},\ (x_i, y_j, z_k) \in \Gamma_6; \\ \psi_{ijk} = 0,\ (x_i, y_j, z_k) \in \Gamma_1, \Gamma_4, \Gamma_\infty. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь $L_{xx} = \partial^2/\partial x^2$, $L_{yy} = \partial^2/\partial y^2$, $L_{zz} = \partial^2/\partial z^2$, $L_n = \partial^2/\partial n^2$ – производные потенциала, которые представляются конечно-разностными аппроксимациями. Область $D_d(x, y, z)$, включающая $D'_{md}(x, y, z)$ и $D^*_{md}(x, y, z)$, является дискретной с регулярной прямоугольной сеткой. Для аппроксимации границ применяется алгоритм Брезенхэма. При расчетах не учитывается диаметр стержня, т. к. он пренебрежимо мал по сравнению с размерами $D_d(x, y, z)$ и шагом по x, y и z (аналогично как в [3]).

Так как во внутренних узлах сетки выполняется условие сходимости итерационного метода Гаусса–Зейделя, то во всех внутренних узлах области $D_d(x, y, z)$ потенциал $\psi_{i,j,k}$ рассчитывается с помощью численного метода, например, экстраполяционного метода Либмана [10] по формулам:

$$\psi_{i,j,k} = \frac{\psi_{i+1,j,k} + \psi_{i-1,j,k} + \psi_{i,j+1,k} + \psi_{i,j-1,k} + \psi_{i,j,k+1} + \psi_{i,j,k-1}}{6}, \quad (7)$$

$$\psi^S_{i,j,k} = \psi^{S-1}_{i,j,k} + \alpha(\psi^{S0}_{i,j,k} - \psi^{S-1}_{i,j,k}), \quad (8)$$

где α – ускоряющий коэффициент $(1 \le \alpha \le 2)$; $\psi^{S-1}_{i,j,k}$ – значение в узле $\psi_{i,j,k}$, вычисленное на предыдущей итерации; $\psi^{S0}_{i,j,k}$ – значение в узле $\psi_{i,j,k}$, вычисленное в текущей итерации согласно (8); $\psi^S_{i,j,k}$ – новое значение.

На границах Γ_2, Γ_3 потенциал $\psi_{i,j,k}$ рассчитывается с учетом конечно-разностных аппроксимаций и вида условия симметрии (4). Модуль E определяется как квадратный корень из суммы квадратов компонент вектора E_x^2, E_y^2, E_z^2.

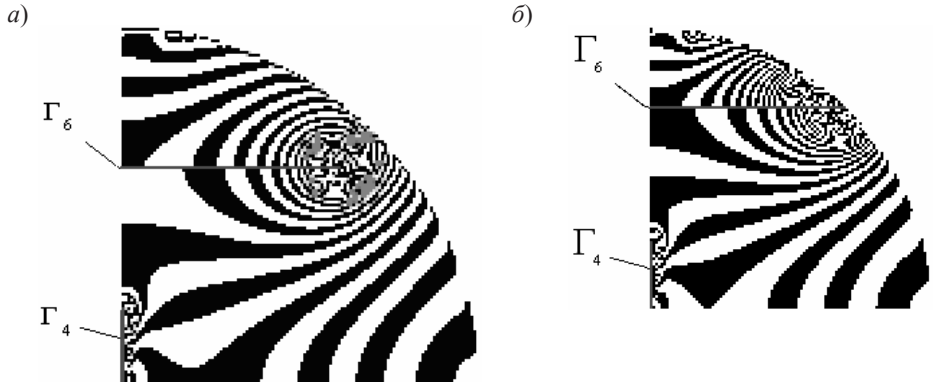


Рис. 2. Распределение поверхностей равных напряженностей поля с шагом ΔE^*:
а – для модели 1; *б* – модели 2

Согласно МИПБС граничные узлы $\psi_{i,j,k}$ на границе Γ_5 превращаются во внутренние узлы составной области $D'_{md}(x, y, z)$ и $D^*_{md}(x, y, z)$, причем в узлах на границе области $D'_{md}(x, y, z)$ расчет также ведется по формулам (7) и (8), а значения потенциалов в недостающих узлах берутся из дополнительной области $D^*_{md}(x, y, z)$, и наоборот.

Результаты численных расчетов. Результаты расчетов представляются в безразмерном виде для ψ и расстояний l как $\psi_{bi}^* = \psi_i / \psi_{B0}$, $l_i^* = l_i / h$ с учетом базовых значений потенциала ψ_{B0} на Γ_6 и высоты h стержня Γ_4, а остальные определяются аналогично или через ψ_{bi}^* и l_i^*. Для сравнения результатов с известными данными основные соотношения размеров приняты как в [3].

Исследуются два типа моделей по схеме как на рис. 1. Исходные условия следующие: считаем, что граница Γ_6 имеет радиус $r_1^* = 3$ и находится на высоте $H_k^* = 3$, а высота Γ_4 равна $h^* = 1$. Отличие заключается в том, что Γ_5 – внутренняя граница в $D(x, y, z)$ (искусственно введенная с учетом МИПБС) в первой модели находится на расстоянии δ^* от границы Γ_5, а во второй модели $\delta^* = 0$.

Результаты расчетов напряженности поля E^* относительно $F(x, y)$ и $V(x, y)$ для двух моделей показаны на рис. 2.

Из анализа результатов распределения поверхностей равных напряженностей поля следует, что на стержне Γ_4 и в окрестностях края границы Γ_6 наблюдается существенно неоднородное ЭП. Для оценки этих относительных величин рассмотрим результаты расчетов, показанные на рис. 3, причем кривые 1 и 2 – это характеристики $\psi_b^* = f(H_L^*)$ (рис. 3 *а*) и $E^* = f(H_L^*)$ (рис. 3 *б*), представляющие зависимости в вертикальных плоскостях относительно поверхности $F(x, y)$: по оси стержня и на расстоянии $S_{k1}^* = 3$, т. е. на границе облака $V(x, y)$.

Из анализа зависимостей $E^* = f(H_L^*)$ (см. рис. 3 *б*, кривые 1 и 2) следует, что модули максимальной напряженности поля E_m^* находятся как на стержне Γ_4, так и на краю облака $V(x, y)$, причем E_m^* на расстоянии $S_{k1}^* = 3$ больше, чем на стержне по его оси.

Рассмотрим результаты распределения относительных величин $\psi_b^* = f(H_L^*)$ (рис. 4 *а*) и $E^* = f(H_L^*)$ (рис. 4 *б*), показанные на рис. 4, причем кривые 1–4 – это характеристики, представляю-

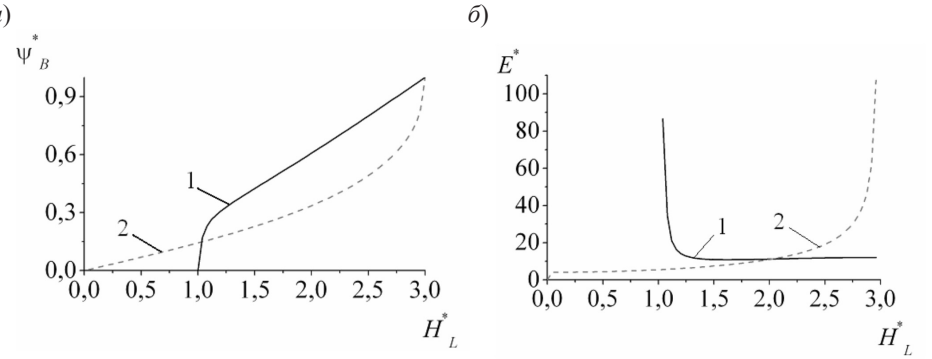


Рис. 3. Характеристики $\psi_b^* = f(H_L^*)$ (*а*) и $E^* = f(H_L^*)$ (*б*) в вертикальной плоскости:
1 – по оси стержня; 2 – на расстоянии $S_{k1}^* = 3$

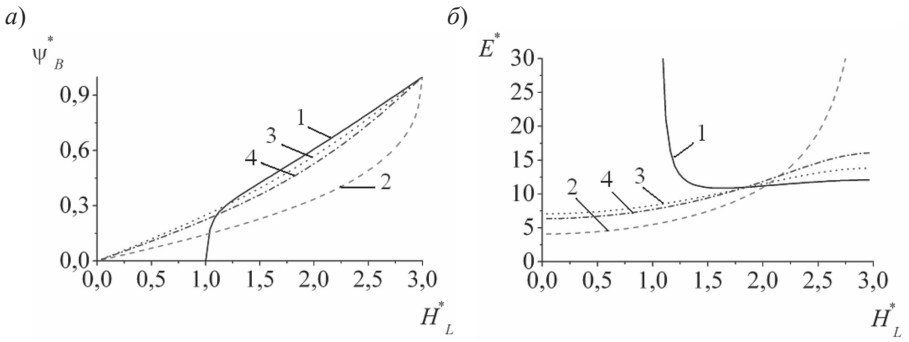


Рис. 4. Характеристики $\psi_b^* = f(H_L^*)$ (*а*) и $E^* = f(H_L^*)$ (*б*) для различных S_k:
1 – по оси схемы ($S_{k0} = 0$); 2 – $S_{k1}^* = 3$; 3 – $S_{k2}^* = 1{,}5$; 4 – $S_{k3}^* = 2$

щие зависимости в вертикальных плоскостях относительно поверхности $F(x, y)$: по оси ($S_{k0} = 0$) и на расстоянии $S_{k1}^* = 3$, а также в промежуточных точках от оси $S_{k2}^* = 1{,}5$ и $S_{k3}^* = 2$. Следует отметить, что кривые 1 и 2 $E^* = f(H_L^*)$ (см. рис. 4 *б*), в отличие от рис. 3 *б*, представлены только в окрестностях точек $S_{k0} = 0$ и $S_{k1}^* = 3$, чтобы отразить особенности изменения напряженности в промежуточных точках как на $F(x, y)$, так и на облаке.

Анализ зависимостей $E^* = f(H_L^*)$ на рис. 4 *б* показывает, что напряженность поля E^* по поверхности $F(x, y)$ под облаком максимальна вблизи заземленного стержня и убывает к точке S_{k1}^*, а напряженность поля E^* по поверхности $V(x, y)$, наоборот, на облаке, непосредственно под стержнем, минимальная, причем приблизительно на порядок меньше, чем E_m^* у края облака $V(x, y)$.

Результаты расчетов для моделей 1 и 2 (см. рис. 2) с учетом распределения относительных величин $\psi_b^* = f(H_L^*)$ (рис. 5 *а*) и $E^* = f(H_L^*)$ (рис. 5 *б*), показаны на рис. 5, причем кривые 1 и 2 – это характеристики, представляющие зависимости в вертикальных плоскостях относительно поверхности $F(x, y)$ на расстоянии $S_{k1}^* = 3$ для моделей 1 и 2.

Анализ зависимостей на рис. 5 показывает, что область $D'_m(x, y, z)$ с внутренней границей Γ_5 в методе МИПБС должна быть больше, чем максимальный размер исследуемого объекта, находящегося в этой области, т. к. при совпадении с границей Γ_5 наблюдается существенное завышение результатов расчета. В исследуемом случае установлено, что граница облака $V(x,y)$ должна быть на расстоянии не менее чем $\delta^*/2$ от границы Γ_5.

Сравнение результатов расчета проводилось с [3] в вертикальной плоскости на расстоянии $S_1 = 3{,}2$ м и до высоты $H_1 = 13$ м по распределению поля ψ и представлено в [4]. Сравнительный анализ показал, что отличия в расчетах в целом составляют менее 0,5 %.

Анализ исследования трехмерных ЭП относительно заземленного стержневого молниеприемника и с учетом граничной поверхности облака на основе модифицированного метода инверсии

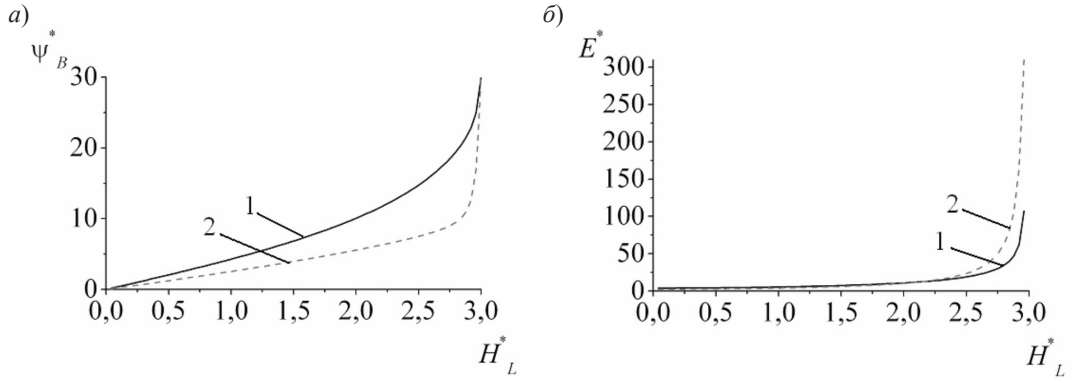


Рис. 5. Характеристики $\psi_b^* = f(H_L^*)$ (*а*) и $E^* = f(H_L^*)$ (*б*)
в вертикальной плоскости на расстоянии $S_{k1}^* = 3$ от оси стержня:
1 – для модели 1; 2 – для модели 2

показал, что имеется возможность определять напряженность поля в некоторой области и выявлять различные краевые эффекты. Например, установлено, что модули максимальной напряженности поля E_m^* находятся как на стержне молниеприемника E_{m1}^*, так и на краю облака E_{m2}^*, причем E_{m2}^* больше, чем на стержне по его оси.

Показано, что распределение напряженности поля E^* по поверхности земли под облаком убывает к периферии, а распределение напряженности поля E^* по поверхности облака, наоборот, существенно возрастает к периферии. При этом следует заметить, что полученные выводы определяются соотношениями размеров исследуемой системы и соответствующими допущениями при расчетах.

В результате исследований установлено, что в выделяемой области $D'_m(x, y, z)$ с некоторой внутренней границей Γ_5 с учетом применения МИПБС при определении влияния краевых эффектов исследуемого объекта (например, $V(x,y)$) он не должен соприкасаться с внутренней границей Γ_5, т. к. это приводит к завышению результатов расчета по Γ_5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **D'Alessandro, F.** Electric field modelling of structures under thunderstorm conditions [Текст] / F. D'Alessandro, J.R. Gumley // Proc. of the 24th International Conf. on Lightning Protection. –Birmingham, Britain, 1998. –P. 457–462.

2. **Ait-Amar, S.** A 3-D numerical model of negative lightning leader interception. Applications to the collection volume construction [Текст] / S. Ait-Amar, G. Berger // Proc. of the 27th International Conf. on Lightning Protection. –Avignon, France, 2004. –P. 357–362.

3. **Резинкина, М.М.** Расчет трехмерных электрических полей в системах, содержащих тонкие проволоки [Текст] / М.М. Резинкина // Электричество. –2005. –№ 1. –С. 44–49.

4. **Потапенко, А.Н.** Метод инверсии для численного расчета распределенных систем типа «плоскость-проводник» [Текст] / А.Н. Потапенко, Е.А. Канунникова, Т.А. Потапенко // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Сер. Информатика. Телекоммуникации. Управление. –2011. –№ 5. –С. 53–57.

5. **Потапенко, А.Н.** Численное моделирование электрических полей в системах «электрод – поверхность земли» для элементов молниезащит [Текст] / А.Н. Потапенко, Е.А. Канунникова, М.И. Дыльков // Изв. вузов. Проблемы энергетики. –2008. –№ 11–12. –С. 72–78.

6. **Rezinkina, M.M.** Software for determinantion of 3D electrical fields distribution in the vicinity of special installations ans systems with lightning rods during thunderstorm [Текст] / M.M. Rezinkina // Proc. of the 24th International Conf. on Lightning Protection. –Birmingham, Britain, 1998. –P. 924–928.

7. **D'Alessandro, F.** A 'Collection Volume Method' for the placement of air terminals for the protection of structures against lightning [Текст] / F. D'Alessandro, J.R. Gumley // J. of Electrostatics. –2001. –№ 50. –P. 279–302.

8. **Ait-Amar, S.** Attractive Radius of Elevated Building [Текст] / S. Ait-Amar, G. Berger // Proc. of the 28th International Conf. on Lightning Protection. –Kanasawa, Japan, 2006. –P. 602–607.

9. **Потапенко, А.Н.** Исследование распределенных элементов систем молниезащит на основе вычислительных экспериментов [Текст] / А.Н. Потапенко, А.И. Штифанов, Т.А. Потапенко // Изв. Самарского научного центра РАН. –2010. –Т 12. –№ 4 (3). –С. 591–595.

10. **Мак-Кракен, Д.** Численные методы и программирование на Фортране [Текст] / Д. Мак-Кракен, У. Дорн. –М.: Мир, 1977. –584 с.

УДК 519.711.3

В.И. Антонов, А.И. Загайнов, Ву ван Куанг

ДИНАМИЧЕСКИЙ ФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВАРИАБЕЛЬНОСТИ СЕРДЕЧНОГО РИТМА

В настоящей статье рассматриваются проблемы нелинейного исследования хаотических временных рядов вариабельности сердечного ритма (ВСР) – временных интервалов между последовательными нормальными QRS-комплексами электрокардиограммы (норма-норма или NN-интервалов). Благодаря рекомендациям научных сообществ США, Европы [3], Японии, Китая и