УДК 681.325.5 – 181.48(075.8)

О.Н.Пьявченко

ИНТЕГРИРОВАНИЕ НА НАЧАЛЬНОМ УЧАСТКЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО ЭКСТРАПОЛЯЦИОННОЙ ФОРМУЛЕ ТРАПЕЦИИ С КВАДРАТИЧНОЙ ЭКСТРАПОЛЯЦИЕЙ ЗНАЧЕНИЙ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Среди прикладных задач наблюдения за состояниями динамических объектов (транспортных средств, производственного и бытового оборудования, технологических процессов и т.п.) и управления этими состояниями важное место занимает решение обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом на технические и экономические характеристики микрокомпьютерных устройств и систем существенное влияние оказывает выбор численных методов, способных обеспечить требуемую точность при минимальных затратах на вычисления в реальном масштабе времени. В качестве таких методов могут найти широкое применение конечно-разностные экстраполяционно-интерполяционные методы, обеспечивающие более высокую точность вычислений, чем экстраполяционные методы, при близкой к ним трудоемкости [1]. Однако для этого необходимо устранить проблему обеспечения вычислений необходимой информацией на начальном участке решения задач наблюдения и управления.

В данной работе предлагается и исследуется схема организации решения при интегрировании по интерполяционной формуле трапеции с квадратичной экстраполяцией значений подынтегральной функции, обеспечивающая на начальном участке сохранение точности и сложности вычислений. Для простоты изложения оценки выполняются при решении обыкновенного дифференциального уравнения

$$y' = f(x,y), \tag{1}$$

с начальным условием

$$y_0 = y(x_0), \tag{2}$$

поскольку, как известно [2], полученные результаты могут быть легко распространены на систему дифференциальных уравнений. В процессе анализа используются формулы численного интегрирования по прямоугольникам (n=0) и интерполяционная формула трапеции (n=1) (табл.1), а также линейная (r=1) и квадратичная (r=2) формулы экстраполяции значений подынтегральной функции (табл.2).

Таблица 1

k	n	Формулы интегрирования	Погрешность метода на шаге
1	0	$y_{(i+1)}=y_i+hf_i$	$\nabla\mu^*_{(i+1)}=\frac{h^2}{2}\,f'(\xi)$
2	0	$y_{(i+1)}=y_i+hf_{(i+1)}$	$\nabla\mu_{(i+1)}=-\frac{h^2}{2}f'(\xi)$
3	1	$y_{(i+1)}=y_i+\frac{h}{2}(f_{(i+1)}+f_i)$	$\nabla\mu_{(i+1)}=-\frac{h^3}{12}f''(\xi)$

Таблица 2

r	Формулы экстраполяции значений переменных	Погрешности формул
1	$f^*_{(i+1)}=2f_i-f_{(i-1)}$	$\varepsilon^*_{(i+1)}=h^2f''(\xi),\ \xi\in[x_{i-1},x_i]$
2	$f^*_{(i+1)}=3(f_i-f_{(i-1)})+f_{(i-2)}$	$\varepsilon^*_{(i+1)}=h^3f'''(\xi),\ \xi\in[x_{i-2},x_i]$

Для начала решения дифференциального уравнения (1) рассматриваемым экстраполяционно-интерполяционным методом должны быть известны значения функции $y_k(x)$ не только в точке x_0 (2), но и в точках x_j (j=-1, -2). Для организации вычислений предлагается аппроксимировать функцию y(x) на интервале $[x_{-2}, x_0]$ горизонтальной прямой. Реализация этого способа сводится к загрузке в память микрокомпьютера до начала вычислений значения переменной y_0 вместо y_j (j=-1, -2).

Вычисления строятся по схеме

$$\left.\begin{aligned} f^*_{(i+1)} &= 3(f_i - f_{(i-1)}) + f_{(i-2)}, \\ y_{(i+1)} &= y_i + \frac{h}{2}(f^*_{(i+1)} + f_i), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

с начальными значениями $y_0=y(x_0)$, $y_{-2}=y_{-1}=y_0$.

Так как в начале каждого шага решения рассчитывается значение $f_i=f(x_i, y_i)$, то, строя схемы вычислений, для простоты будем полагать, что в i-том шаге f_i известно.

1 шаг (i=1)

Известны: x_0, y_0, $y_{-2}=y_{-1}=y_0$, $f_{-2}=f_{-1}=f_0=f(x_0,y_0)$. Определим значение

$$f_1^*=3(f_0-f_0)+f_0=f_0,$$

подставим его в формулу численного интегрирования

$$y_1=y_0+\frac{h}{2}(f_1^*+f_0)$$

и получим формулу интегрирования по прямоугольнику (таб.1, n=0, k=1)

$$y_1 = y_0 + hf_0. \tag{4}$$

Таким образом интегрирование на первом шаге производится с погрешностью

$$\chi_1 = \nabla\mu_1^{(0)} + \nabla\mu_1^{(1)} = -\frac{h^2}{2} f'(\xi_1) - \frac{h^3}{12} f''(\xi_1). \qquad (5)$$

2 шаг (i=1)

Известны: x_1,y_1, $f_1=f(x_1,y_1)$, $f_0=f_{-1}$. После подстановки этих значений, преобразуем (3) в схему интегрирования по прямоугольнику (таб.1, n=0, k=2) с линейной экстраполяцией значения подынтегральной функции (таб.2, r=1)

$$\left.\begin{aligned} f_2^* &= 2f_1 - f_0, \\ y_2 &= y_1 + hf_2^*, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

имеющую погрешность

$$\chi_2 = \chi_1 + \nu_1 + \nu_2^* + \nabla\mu_2^{(0)} + \nabla\mu_2^{(1)}, \qquad (7)$$

где ν_1 – трансформированная (5) в формулу интегрирования (6) при использовании в вычислениях f_1 погрешность χ_1, ν_2^* – трансформированная погрешность экстраполяции ε_2^*, $(\nabla\mu_2^{(0)} + \nabla\mu_2^{(1)})$ – представленная с повышенной точностью погрешность метода интегрирования (табл. 1, n=0, k=1; n=1, k=3). Так как

$$\nabla\mu_1^{(0)} + \nabla\mu_2^{(0)} = \frac{h^2}{2} f'(\xi_1) - \frac{h^2}{2} f'(\xi_2) = -\frac{h^3}{2} f''(\xi_2), \qquad (8)$$

то преобразуем выражение (7) к виду

$$\chi_2 = \nu_1 + \nu_2^* - \frac{h^2}{2} f''(\xi_2) + \sum_{j=1}^{2} \nabla\mu_j^{(1)} = 2hf'_{y1}\chi_1 + h\varepsilon_2^* - \frac{h^2}{2} f''(\xi_2) + \sum_{j=1}^{2} \nabla\mu_j\,. \qquad (9)$$

После подстановки в это выражение χ_1 (5), ε_2^* (таб.2, r=1) и $\nabla\mu_j^{(1)}$ (таб.1, n=1), а затем упрощения за счет отбрасывания членов более высокого порядка малости, чем h^3, найдем

$$\chi_2 = h^3 f'_{y1} f'(\xi_1) + \frac{1}{2} h^3 f''(\xi_2) - \frac{1}{12} h^3 \sum_{j=1}^{2} f''(\xi_j). \qquad (10)$$

Из этого выражения следует, что при задании перед началом вычислений $y_{-2}=y_{-1}=y_0$ экстраполяционно-интерполяционный метод первой степени уже на втором шаге имеет вычислительную погрешность χ_2 порядка h^3.

3 шаг (i=2)

Известны: x_2,y_2, $f_2=f(x_2,y_2)$, f_1, f_0. Вычисления строятся по схеме

$$\left.\begin{aligned} f_3^* &= 3(f_2 - f_1) + f_0, \\ y_3 &= y_2 + \frac{h}{2}(f_3^* + f_2) \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Погрешность вычисления f_3^* описывается выражением

$$\chi_3^* = \nu_2^* - \nu_1^* + \varepsilon_3^*, \tag{12}$$

в котором ν_2^* è ν_1^* – погрешности, вызванные трансформированием соответственно погрешностей χ_2 (10), χ_1 (5), а ε_3^* – погрешность экстраполяции значения f_3^* (табл. 2, r=2). Раскрывая ν_2^* , ν_1^*, ε_3^*, получим

$$\begin{aligned}\chi_3^* &= 3h^3\left[f''_{y2}f'_{y1}f'(\xi_1) + \frac{1}{2}f'_{y1}f''(\xi_1)\right] - \frac{3}{2}h^2 f'_{y1}f'(\xi_1) + h^3 f'''(\xi_2) \approx \\ &\approx -\frac{3}{2}h^2 f'_{y1}f'(\xi_1).\end{aligned} \tag{13}$$

Значение интеграла y_3 (11) рассчитывается с погрешностью

$$\chi_3 = \chi_2 + \nu_3 + \nu_2 + \nabla\mu_3^{(1)}, \tag{14}$$

где ν_3, ν_2 – погрешности трансформирования соответственно погрешностей χ_3^* (13), χ_2 (10), а $\nabla\mu_3^{(1)}$ – методическая погрешность численного интегрирования по интерполяционной формуле трапеции (n=1) на этом шаге. Раскрывая $\nu_3=\frac{h}{2}\chi_3^*$ и $\nu_2=\frac{h}{2}f'_{y2}\chi_2$, подставляя χ_3^* (13), χ_2^* (10), $\nabla\mu_3$ (табл.1, n=1, i=2) и отбрасывая члены порядка малости h^4, найдем выражение погрешности вычисления y_3 на 3-м шаге

$$\chi_3 = \frac{1}{4}h^3 f'_{y1}f'(\xi_1) + \frac{1}{2}h^3 f''(\xi_2) - \frac{1}{12}h^3\sum_{j=1}^{3}f''(\xi_j). \tag{15}$$

Сравнивая погрешность χ_3 (15) с χ_2 (10), заметим, что внесенные на втором шаге погрешности, представленные первым и вторым слагаемыми, почти не изменились, в то время как методическая погрешность возросла на $\nabla\mu_3$.

Для того, чтобы убедиться, что выявленная схема формирования погрешности сохраняется, оценим погрешность вычисления y_4 на 4-м шаге.

4 шаг (i=3)

Известны: x_3, y_3, $f_3=f(x_3,y_3)$, f_2, f_1. Вычисления строятся по схеме

$$\left.\begin{aligned} f_4^* &= 3(f_3 - f_2) + f_1, \\ y_4 &= y_3 + \frac{h}{2}(f_4^* + f_3). \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

При этом погрешность f_4^* составляет

$$\chi_4^* = \nu_3^* - \nu_2^* + \nu_1^* + \varepsilon_4^*, \tag{17}$$

где $\nu_3^*, \nu_2^*, \nu_1^*$– погрешности, вызванные трансформированием χ_1 (5), χ_2 (10), χ_3 (15), а ε_4^* – погрешность метода экстраполирования (табл. 2, r=2). Так как трансформируемая погрешность χ_1 имеет порядок h^2, а остальные погрешности χ_2, χ_3 и ε_4^* – порядок h^3, то последними можно пренебречь и погрешность (17) представить в виде

$$\chi_4^* = \nu_1^* = -\frac{1}{2}h^2 f'_{y1} f'(\xi_1). \qquad (18)$$

Погрешность y_4 описывается выражением

$$\chi_4 = \chi_3 + \nu_4 + \nu_3 + \nabla\mu_4^{(1)}, \qquad (19)$$

в котором ν_4 и ν_3 – погрешности трансформирования соответственно χ_4^* (18) и χ_3 (15), а $\nabla\mu_4^{(1)}$ – погрешность интегрирования на четвертом шаге. После подстановки значений слагаемых получим

$$\chi_4 = \frac{1}{2}h^3 f'_{y1} f'(\xi_1) + \frac{1}{2}h^3 f''(\xi_2) - \frac{1}{12}h^3 \sum_{j=1}^{4} f''(\xi_j). \qquad (20)$$

Констатируем, что начиная с 4-го шага, схема формирования погрешности окончательно стабилизируется. Поэтому погрешность вычисления значения интеграла $y_{(i+1)}$ на (i+1)-м шаге ($i \geq 2$) составит

$$\chi_{i+1} = \frac{1}{2}h^3 [f'_{y1} f'(\xi_1) - f''(\xi_2)] - \frac{1}{12}h^3 \sum_{j=1}^{i+1} f''(\xi_j)$$

или

$$\chi_{i+1} = \frac{1}{2}h^3 [f'_{y1} f'(\xi_1) - f''(\xi_2)] - \frac{1}{12}h^2 [f'(\xi_{i+1}) - f'(\xi_1)]. \qquad (21)$$

Из формулы (21) следует, что внесенная на начальном участке погрешность не превышает суммарную методическую погрешность при выборе шага

$$h \leq \frac{|f'(\xi_{i+1}) - f'(\xi_1)|}{6|f'_{y1} f'(\xi_1) - f''(\xi_2)|}. \qquad (22)$$

Очевидно, что с уменьшением h вычислительная погрешность $\chi_{(i+1)}$ будет полностью определяться методической погрешностью.

Из проведенных оценок следует, что благодаря взаимной компенсации методических погрешностей интегрирования по прямоугольникам, полученных на первом и втором шагах вычислений, конечно-разностная схема (5.31) может практически обеспечить точность, определенную интерполяционной формулой трапеции. Поэтому экстраполяционно-интерполяционный метод, реализованный по схеме (3), может быть рекомендован для практического применения при решении на микрокомпьютерах задач управления и наблюдения в реальном масштабе времени.

Литература

1. Пьявченко О.Н. Алгоритмические основы выполнения математических операций в микрокомпьютерах: Учебное пособие. Таганрог: ТРТУ, 1998–190с.: ил.

2. Бахвалов Н.С. Численные методы. Т1 – М.: Наука, 1973 – 632 с.: ил.