

ЛИНЕЙНАЯ УНИФИЦИРОВАННАЯ СИСТЕМА СТИМУЛИРОВАНИЯ В УПРАВЛЕНИИ СТРОИТЕЛЬНЫМ ПРОЕКТОМ

Р.В. Калугин, Р.П. Ещенко, А.П. Сычев

В работе рассматривается задача построения оптимальной линейной унифицированной системы стимулирования сокращения продолжительности проекта

Ключевые слова: вознаграждение, проект, стимулирование

Система стимулирования определяет зависимость вознаграждения исполнителя (агента), получаемого им от центра, от выбираемых действий.* Исследование моделей стимулирования в рамках теории управления началось практически одновременно и независимо примерно в конце 60-х годов прошлого века.

Основными научными школами по этому направлению являются теория активных систем (научный центр - Институт проблем управления РАН) [1], теория иерархических игр, (научный центр - Вычислительный центр РАН) [2] и теория контрактов, развиваемая в основном зарубежными учеными [3]. В настоящее время в рамках теории активных систем разработаны базовые механизмы стимулирования: компенсаторные (K -типа), скачкообразные (C -типа), линейные (L -типа), основанные на перераспределении дохода (D -типа) [2]. Различают два вида систем стимулирования - персонифицированные (индивидуальные), и унифицированные. В унифицированных системах зависимость вознаграждения от тех или иных параметров одинакова для всех агентов. На основе базовых систем стимулирования можно строить более сложные системы [3]. Особенностью систем стимулирования в управлении проектами является технологическая зависимость между работами проекта, определяемая сетевым графиком. В работе рассматривается задача построения оптимальной линейной унифицированной системы стимулирования сокращения продолжительности проекта.

Задан проект из n операций (работ), зависимости между которыми определяются сетевым графиком. Для каждой операции определена зависимость

$$Z_{ij} = K_{ij} \tau_{ij} \quad (1)$$

затрат Z_{ij} , требуемых на сокращение продолжительности операции на время τ_{ij} . Унифицированная линейная система стимулирования определяется функцией стимулирования

$$S_i(\tau_{ij}) = \lambda \tau_{ij} \quad (2)$$

определяющей вознаграждение исполнителям операции (i, j) при сокращении ее продолжительности на время τ_{ij} .

Очевидно, что исполнители согласны на сокращение продолжительности операции на время $\tau_{ij} > 0$, если

$$\lambda \geq K_{ij} \quad (3)$$

Суммарные выплаты вознаграждения равны

$$S(\lambda, \tau) = \sum_{i,j} \lambda \tau_{ij} = \lambda \sum_{i,j} \tau_{ij} \quad (4)$$

Задача. Определить λ и $\{\tau_{ij}\}$, такие что продолжительность проекта уменьшилась на величину $\Delta > 0$, а суммарное вознаграждение (премия) (4.2.4) минимально.

Для решения поставленной задачи сначала рассмотрим вспомогательную задачу о разрезе минимальной мощности.

Рассмотрим $(n+1)$ -вершинную сеть с входом 0 и выходом n . Обозначим $K_{ij} > 0$ пропускную способность дуги $(i, j) \in U$ (U - множество дуг сети). Обозначим через μ - путь в сети, соединяющей вход 0 с выходом n .

Определение 1. Пропускной способностью пути μ называется минимальная из пропускных способностей дуг пути

$$C(\mu) = \min_{(i,j) \in \mu} K_{ij}$$

Определение 2. Мощностью разреза $q(V)$ называется максимальная пропускная способность дуг, заходящих в разрез

$$q(V) = \min_{(i,j) \in W(V)} K_{ij}$$

где $W(V)$ - множество дуг заходящих в разрез.

Заметим, что пропускная способность любого пути не превышает мощности любого разреза.

Действительно, для любого пути μ и любого разреза V найдется дуга $(i, j) \in \mu$ заходящая в разрез V . Имеем

$$C(\mu) \leq K_{ij} \leq q(V)$$

Поэтому, если найдется путь μ и разрез V , такие что

$$C(\mu) = q(V),$$

то путь μ имеет максимальную пропускную способность, а разрез V имеет минимальную мощность.

Задача 1. Определить разрез минимальной мощности.

Калугин Роман Владимирович - ВГАСУ, аспирант, тел. (4732) 76-40-07

Ещенко Роман Петрович - ВГАСУ, аспирант, тел. (4732) 76-40-07

Сычев Андрей Павлович - ВГАСУ, канд. техн. наук, профессор, тел. (4732) 76-40-07

Теорема 1. (двойственности) Минимальная мощность разрезов равна максимальной пропускной способности путей.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы Форда-Фалкерсона [1], доказательство проведем конструктивно. Пометим вершину 0 индексом 0, а остальные вершины индексом

$$\lambda_i = M$$

где M – большое положительное число ($M > \max K_{ij}$).

k -ый шаг. Рассматриваем все дуги сети. Для каждой вершины j проверяем условие

$$\lambda_j \leq \max_{i \in U_j} \min(\lambda_i, K_{ij})$$

где U_j – множество дуг, заходящих в вершину j .

Если это условие нарушено, то заменяем индекс λ_j на меньший

$$\lambda_j = \max_{i \in U_j} \min(\lambda_i, K_{ij})$$

В противном случае оставляем индекс λ_j – без изменений. За конечное число шагов индексы установятся. Действительно, последовательность индексов является невозрастающей, причем на каждой итерации уменьшение, если оно происходит, то на конечную величину.

Докажем, что установившиеся индексы λ_i равны максимальной пропускной способности путей из входа в вершину i . Это справедливо для $n=1$. Пусть это справедливо для сети из n вершин. Докажем, что тогда это справедливо и для $(n+1)$ вершин. Покажем, что

$$\lambda_n \leq \max_{i \in U_n} \min(\lambda_i, K_{in})$$

является максимальной пропускной способностью путей сети. Заметим, что $\min(\lambda_i, K_{in})$ определяет максимальную пропускную способность всех путей, содержащих дугу (i, n) . Следовательно (4) определяет максимальную пропускную способность путей в сети. Теорема доказана.

Для определения разреза минимальной мощности удалим из сети все дуги, такие что $K_{ij} \leq \lambda_n$. Пометим вершину 0 индексом (+). Пусть Q – множество помеченных вершин. Помечаем индексом (+) вершину j , если $(i, j) \in U$, и $i \in Q$, а $j \notin Q$. Покажем, что множество непомеченных вершин является разрезом V сети мощность которого равна λ_n . Во-первых, это разрез сети, поскольку выход $n \notin V$, а вход $0 \in V$. Далее для всех дуг, заходящих в разрез имеет место $K_{ij} \leq \lambda_n$ (в противном случае вершина f была бы помечена), причем существует хотя бы одна дуга $(i, j) \in V$, такая что $K_{ij} = \lambda_n$.

Пример 1. Рассмотрим сеть рис. 1.

1 шаг. Индексы вершин $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 3, \lambda_5 = 3$

2 шаг. $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 3, \lambda_5 = 3$ индексы установились. Поэтому

$$\max_{\mu} C(\mu) = 3$$

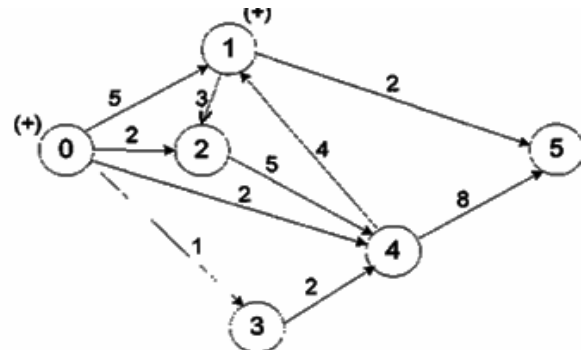


Рис. 1

Для определения пути с максимальной пропускной способностью удаляем из сети все дуги с $K_{ij} < \lambda_n$. Все оставшиеся пути имеют пропускную способность, равную λ_n (рис. 2).

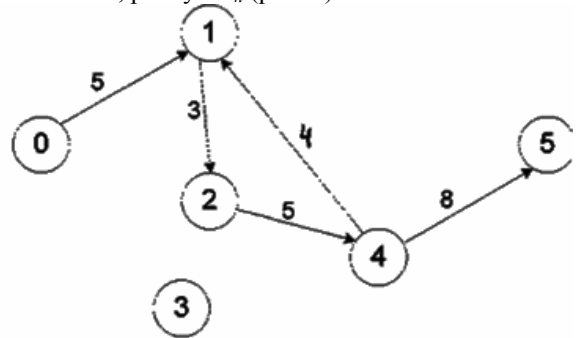


Рис. 2

Для определения разреза минимальной мощности помечаем вершины 0,1. Множество вершин 2, 3, 4, 5 образует разрез сети, а множество дуг $(0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 2), (1, 5)$ – это множество дуг, заходящих в разрез. Мощность разреза, очевидно, равна 3. Если сеть не имеет контуров и вершины имеют правильную нумерацию, то алгоритм существенно упрощается.

1 шаг. Определяем

$$\lambda_1 = K_{01}$$

k -ый шаг. Определяем

$$\lambda_k \leq \max_{i < k} \min(\lambda_i, K_{ik})$$

n -ый шаг. Определяем

$$\lambda_n \leq \max_{i < n} \min(\lambda_i, K_{in})$$

Пример 2. Рассмотрим сеть рис. 3.

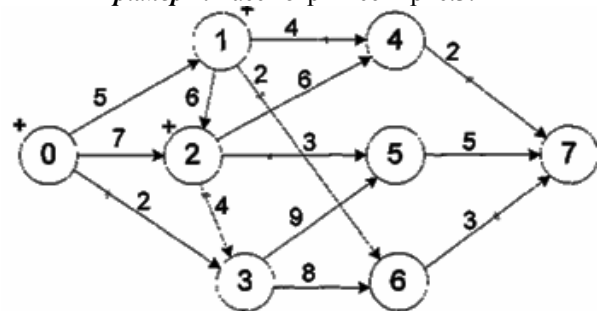


Рис. 3

Вычисляем

$$\lambda_1 = 5,$$

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= \max[\min(5;6);7] = 7, \\ \lambda_3 &= \max[\min(7;4);2] = 4, \\ \lambda_4 &= \max[\min(5;4); \min(7;6)] = 6, \\ \lambda_5 &= \max[\min(7;3); \min(4;9)] = 4, \\ \lambda_6 &= \max[\min(5;2); \min(4;8)] = 4, \\ \lambda_7 &= \max[\min(6;2); \min(4;5); \min(4;3)] = 4\end{aligned}$$

Итак, максимальная пропускная способность путей равна 4. После удаления всех дуг, у которых $K_{ij} < 4$, получаем два пути:

$$\mu_1 = (0, 1, 2, 3, 5, 7), \quad \mu_2 = (0, 2, 3, 5, 7)$$

максимальной пропускной способности. $C(\mu_1) = C(\mu_2) = 4$, а после удаления всех дуг, у которых $K_{ij} \leq 4$ и индексации вершин получаем разрез $V = (3, 5, 6, 7)$.

Дуги, заходящие в разрез $W = (0, 3), (1, 6), (4, 7), (2, 5), (2, 3)$, мощность которого $q(V) = 4$.

Перейдем к описанию алгоритма синтеза оптимальной унифицированной линейной системы стимулирования. Обозначим D_{ij} - нормативные продолжительности операций.

1 шаг. Полагаем продолжительности всех операций равными D_{ij} .

2 шаг. Определяем сеть критических путей.

3 шаг. Для сети критических путей решаем задачу определения разреза минимальной мощности q_{ij} .

Полагаем $\lambda_1 = q_1$ фиксируем продолжительности на уровне D_{ij} для всех операций, таких что $K_{ij} > q_1$, а также для тех, у которых $d_{ij} = D_{ij}$ и определяем разрез сети V_1 с минимальным числом дуг. Дело в том, что при заданном λ задача минимизации фонда стимулирования сводится к задаче минимизации суммарного сокращения продолжительностей операций. Пусть число дуг разреза равно m_1 . В этом случае сокращение продолжительности проекта на 1 требует величины фонда стимулирования $q_1 m_1$.

Увеличим q до q_2 , при котором, число критических операций таких, что $K_{ij} < q_2$ увеличивается и снова определяем разрез с минимальным числом заходящих дуг m_2 .

Если, $q_2 m_2 < q_1 m_1$, то очевидно, что норматив q_2 выгоднее, чем q_1 , хотя $q_2 > q_1$. Продолжаем увеличивать q до тех пор, пока на некотором шаге S

$$q_s = \max_{(i,j) \in M} K_{ij}$$

где M - множество критических операций. Определяем τ , такое что

$$q_\tau m_\tau = \min_j q_j m_j$$

Сокращаем продолжительности дуг, заходящих в разрез V_τ до тех пор, пока в сети не появится новый критический путь либо пока продолжительность, хотя бы одной дуги, заходящей в разрез, не будет равна минимальной. Далее возвращаемся к шагу 2. Алгоритм заканчивается, когда в сети появляется хотя бы один критический путь, у которого продолжительности всех работ равны минимальным.

Пример 3. Рассмотрим сеть рис. 4 с данными таблице

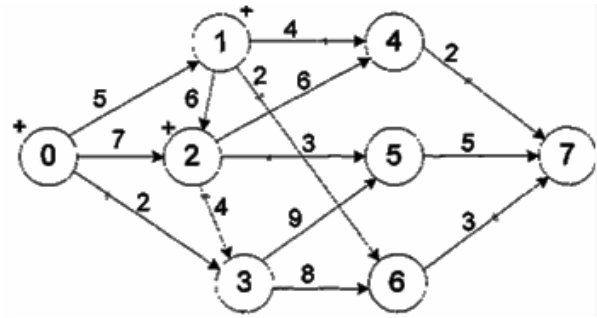


Рис. 4

Данные о параметрах d_i , D_i , и K_i приведены в таблице.

(i,j)	(0,1)	(0,2)	(1,3)	(1,4)	(2,3)	(2,4)	(3,5)	(4,5)
d_i	2	1	4	1	2	3	2	4
D_i	6	3	7	5	3	7	5	7
K_i	4	5	3	1	3	2	6	7

1 шаг. На рис. 5. приведена сеть, состоящая из критических операций

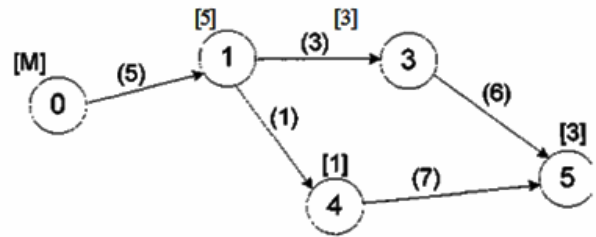


Рис. 5

Числа у дуг в скобках равны пропускным способностям K_{ij} . Числа в квадратных скобках у вершин равны максимальным пропускным способностям путей из входа в соответствующую вершину. Минимальная мощность разрезов равна 3, полагаем $q_1 = 3$.

Для определения разреза с минимальным числом заходящих дуг, таких что $K_{ij} < q_1$, полагаем пропускные способности дуг с $K_{ij} < q_1$ равными 1, а пропускные способности дуг с $K_{ij} > q_1$, равными M (M - большое число) и определяем максимальный поток и минимальный разрез в полученной сети. В данном случае решение очевидно. В минимальный разрез v_i заходят дуги (1, 3) (1, 4), число которых равно $m_1 = 2$.

Берем следующее значение $q_2 = 5$. Теперь в минимальный разрез заходит всего одна дуга (0, 1), то есть $m_2 = 1$. Так как

$$q_1 m_1 = 6 > q_2 m_2 = 5,$$

то сокращаем продолжительность операции (0, 1) на $\Delta = 1$. Больше нельзя, так как при $\Delta = 1$ в сети появляется новый критический путь (0, 2, 4, 5). Продолжительность проекта равна 17, фонд стимулирования равен 4.

2 шаг. Сеть критических операций приведена ниже

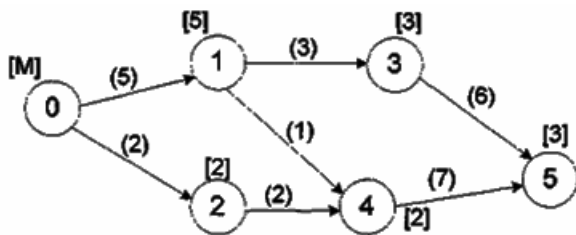


Рис. 6

Минимальная мощность разреза равна 3. Множество дуг, заходящих в разрез: (0, 2); (1, 3); (1, 4). Берем $q_1 = 3$ и определяем разрез с минимальным числом дуг. В этот разрез заходят дуги (0, 2); (1, 3); (1, 4), то есть $m_1 = 3$. Следующее значение $q_2 = 5$. Минимальное число дуг, заходящих в разрез, равно $m_2 = 2$. Дальнейшее увеличение q нецелесообразно, так как нет ни одного разреза с числом заходящих дуг меньше 2. Так как

$$q_1 m_1 = 9 < q_2 m_2 = 10,$$

то сокращаем продолжительности дуг (0, 2); (1, 3); (1, 4) на $\Delta = 2$. Больше нельзя, так как при $\Delta = 2$ продолжительность операции (0, 2) равна минимальной. Продолжительность проекта равна $T = 15$, фонд стимулирования увеличился на $\Delta \Phi = 18$.

3 шаг. Сеть критических операций приведена на рис. 7.

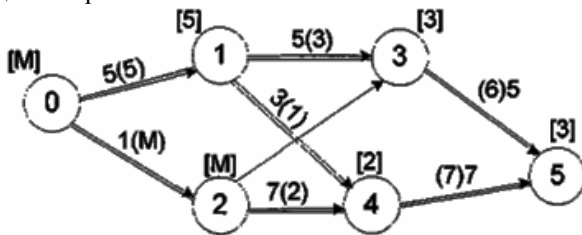


Рис. 7

Минимальная мощность разрезов по-прежнему равна 3. Берем $q_1 = 3$ и определяем разрез с минимальным числом заходящих дуг. Это дуги (1,3); (1,4); (2, 4), $m_1 = 3$. Увеличение q и $q_2 = 5$

не дает выигрыша как в предыдущем случае. Сокращаем продолжительности операций на $\Delta = 1$. Больше нельзя, поскольку при $\Delta = 1$ продолжительность операции (1,3) равна минимальной. Продолжительность проекта равна 14, фонд стимулирования увеличился на $\Delta \Phi = 9$.

4 шаг. Сеть критических путей не изменилась. Полагаем $K_{13} = M$ и определяем минимальную мощность разрезов. В данном случае она равна 5. Полагаем $q_1 = 5$. Минимальное число заходящих дуг равно $m_2 = 2$. Это дуги (0, 1) и (2, 4). Сокращаем продолжительности операций (0, 1) и (2, 4) на $\Delta = 3$. Больше нельзя, так как их продолжительности становятся равными минимальным. Продолжительность проекта равна $T = 11$, фонд стимулирования увеличился на $\Delta \Phi = 30$.

5 шаг. Сеть критических путей не изменилась, однако, $K_{01} = K_{24} = M$ (рис 8).

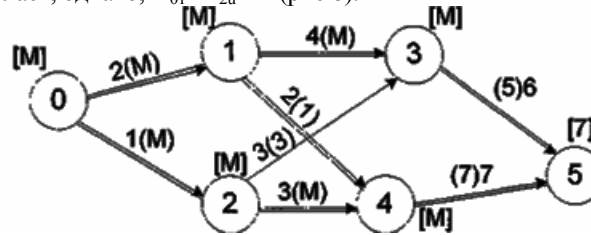


Рис. 8

Литература

1. Новиков Д.А. Теория управления организационными системами. М.: МПСИ, 2005. – 584 с.
2. Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976. – 327 с.
3. Hart O.D., Holmstrom B. Theory of contracts // Advances in economic theory. 5-th World Congress. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987. P. 71 – 155.

Воронежский государственный архитектурно - строительный университет

THE LINEAR UNIFIED SYSTEM OF STIMULATION IN MANAGEMENT OF THE BUILDING PROJECT

R.V. Kalugin, R.P. Eshenko, A.P. Sychev

In work the problem of construction of the optimum linear unified system of stimulation of reduction of duration of the project is considered

Key words: compensation, the project, stimulation