

УДК 004.4:62.503.5

Дата подачи статьи: 02.12.14

DOI: 10.15827/0236-235X.109.087-091

## **ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ ПРОЦЕССА ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОРБИТ СПУТНИКОВОЙ СИСТЕМЫ**

А.Н. Доронкина, аспирант, [annadoronkina@bk.ru](mailto:annadoronkina@bk.ru)

(Тверской государственной университет, ул. Желябова, 33, г. Тверь, 170100, Россия)

В работе предложен подход к моделированию эллиптических орбит спутниковой системы непрерывного обзора поверхности Земли для оптимизации их параметров. С этой целью анализируются варианты решения задачи оптимизации такого обзора спутниковой системой с орбитами эллиптического типа, описываются условия, характеризующие модель движения данной спутниковой системы. Рассматривается кеплеровская модель движения спутника в декартовой (гринвичской) системе координат с началом в центре Земли. При этом для нахождения истинной аномалии используется алгоритм, включающий решение уравнения Кеплера методом последовательных приближений. Дается обоснование критерия оптимальности параметров орбит спутников, системы ограничений оптимизационной задачи. Определяются геоцентрический угловой радиус, изменяющийся с течением времени при полете искусственного спутника Земли от своего перигея к апогею, и угол обзора спутника. Выбрана критериальная функция, представляющая собой геоцентрическое угловое расстояние между радиус-векторами спутников и текущей точкой земной поверхности в текущий момент времени. Обоснован выбор параметров оптимизации. Учитывая то, что система состоит из групп спутников, движущихся по одной орбите, размерность задачи может быть существенно снижена. Сформулирована в явном виде оптимизационная задача. Проведено моделирование движения спутников в исследуемой спутниковой системе с использованием среды программирования MathCAD2014. В качестве примера на фоне карты Земли построены траектории движения подспутниковых точек трех искусственных спутников Земли с характеристиками, соответствующими характеристикам известной спутниковой системы. Получены зависимости изменения геоцентрической широты и долготы подспутниковых точек от времени, а также визуализировано их движение.

**Ключевые слова:** моделирование, среда программирования, спутниковая система, эллиптическая орбита, непрерывный обзор поверхности Земли, критерий оптимальности, оптимизация.

В настоящее время *спутниковые системы* (СС) используются во многих областях: в связи, радио- и телевидении, навигации, метеорологии, контроле за движением транспорта и др. Для рациональной организации движения *искусственных спутников Земли* (ИСЗ) требуется решать задачи оптимизации параметров этого движения. Существует много работ на данную тему [1–7 и др.], но они в основном посвящены движению СС по круговым орбитам. Возможности систем с некруговыми (эллиптическими) орбитами недостаточно изучены. В то же время большинство СС (в частности СС непрерывного обзора Земли) используют ИСЗ именно на эллиптических орбитах [8], что обусловлено физическими принципами построения аппаратуры наблюдения.

В работе [9] исследована возможность применения теории групп для решения данной задачи. В связи с этим актуальны задачи оптимизации движения СС с орбитами эллиптического типа. И первым шагом является формирование критерия оптимальности СС [10].

Модель движения СС, параметры которого подлежат оптимизации в задаче непрерывного обзора поверхности Земли СС с *орбитами эллиптического типа* (ОЭТ), должна отвечать следующим условиям:

– система состоит из  $N$  ИСЗ, которые движутся по  $m$  орбитам по  $n$  спутников на каждой,  $N = m \times n$ ;

– все спутники движутся по ОЭТ с периодом  $T_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ ;

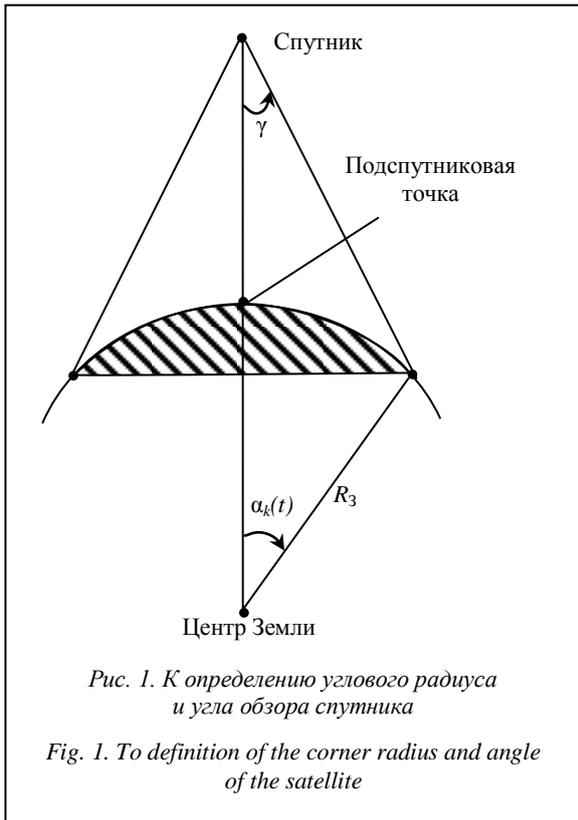
– движение ИСЗ невозмущенное;

– сопротивление атмосферы, нецентральность поля тяготения Земли, влияние Луны, Солнца, давление солнечного света и другие подобные факторы, оказывающие существенное воздействие на движение спутников, не учитываются;

– поверхность Земли является сферой радиуса  $R_3$ .

Каждый  $k$ -й ИСЗ ( $k = \overline{1, N}$ ) в любой момент «видит» на поверхности Земли сферический круг некоторого углового радиуса  $a_k(t)$  с центром в подспутниковой точке (рис. 1), изменяющийся с течением времени при полете ИСЗ от своего перигея к апогею. Кроме этого, каждый спутник имеет свой угол обзора. Допустим, что угол обзора любого спутника системы данной задачи один и тот же и равен  $2\gamma$  (рис. 1). Система ИСЗ обеспечивает непрерывный обзор Земли, если любая точка поверхности в любой момент видна хотя бы с одного из спутников [1].

Орбита каждого  $k$ -го ИСЗ ( $k = \overline{1, N}$ ) системы характеризуется шестью независимыми кеплеровскими элементами [11]:  $i_k$  – наклонение,  $\Omega_k$  – долгота восходящего узла,  $a_k$  – большая полуось,  $e_k$  – эксцентриситет,  $\omega_k$  – аргумент перигея,  $\tau_k$  – время прохождения перигея.



Таким образом, структура всей системы ИСЗ определяется  $6 \times N$  кеплеровскими элементами.

Пусть  $P_{орбk}$  – множество кеплеровских параметров орбиты  $k$ -го ИСЗ  $\{a_k, e_k, i_k, \Omega_k, \omega_k, \tau_k\}$ , которые имеют следующее множество допустимых значений  $G_k$ :

$$G_k = \left\{ \begin{array}{l} a_{\min k} \leq a_k \leq a_{\max k}, \\ 0 < e_k < 1, \\ 0 \leq i_k \leq \pi, \\ 0 \leq \Omega_k < 2\pi, \\ 0 \leq \omega_k < 2\pi, \\ \tau_{\min k} \leq \tau_k \leq \tau_{\max k} \end{array} \right\}.$$

Обозначим  $r_k$  радиус-вектор, направленный из центра масс Земли на  $k$ -й ИСЗ в момент времени  $t$  (рис. 2). Выберем на поверхности Земли произвольную точку  $A$  с радиус-вектором  $r_A$ . Геоцентрическое угловое расстояние  $f$  между этой точкой и  $k$ -м спутником в момент времени  $t$  определяется параметрами  $r_k, r_A$  и  $t$ . Обозначим соответствующую зависимость через  $f(r_k, r_A, t)$ . Тогда

$$f(r_k, r_A, t) = \arccos \frac{(r_k, r_A)}{|r_k| \cdot |r_A|}, \quad (1)$$

где  $(*, *)$  – операция скалярного произведения векторов;  $|*|$  – длина вектора.

Пусть  $Oxuz$  – декартова (гринвичская) система координат с началом в центре Земли, ось  $Ox$  которой лежит в плоскости экватора и проходит через гринвичский меридиан, ось  $Oz$  направлена вдоль

оси вращения Земли в сторону Северного полюса, а ось  $Oy$  дополняет систему до правой.

Пусть радиус-вектор  $r_A$  имеет координаты  $(x_A, y_A, z_A)$ . Координаты  $(x_k, y_k, z_k)$  радиус-вектора  $r_k$  вычисляются по следующим формулам [11]:

$$x_k = r_k (\cos \Omega_k \cos u_k - \sin \Omega_k \cos i_k \sin u_k),$$

$$y_k = r_k (\sin \Omega_k \cos u_k + \cos \Omega_k \cos i_k \sin u_k),$$

$$z_k = r_k \sin i_k \sin u_k, \quad r_k = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta_k}, \quad u_k = \vartheta_k + \omega_k,$$

где  $u_k$  – аргумент широты ИСЗ;  $\vartheta_k$  – истинная аномалия заданной точки на орбите.

Для нахождения истинной аномалии используем следующий алгоритм [12].

1. Вычисляем период обращения ИСЗ по эллиптической орбите  $T_k = 2\pi \sqrt{\frac{a_k^3}{\mu}}$ , где  $\mu$  – гравитационная постоянная, равная  $398620 \text{ км}^3/\text{с}^2$ , и его геоцентрическую угловую скорость:

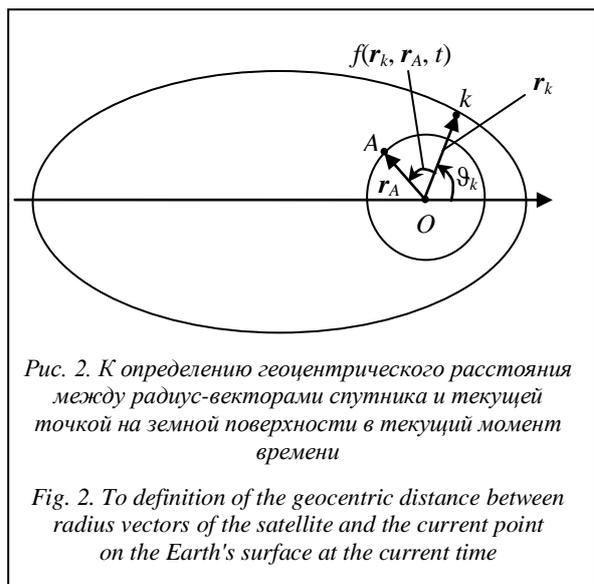
$$n_k = \frac{2\pi}{T_k} = \frac{2\pi}{2\pi \sqrt{\frac{a_k^3}{\mu}}} = \sqrt{\frac{\mu}{a_k^3}}.$$

2. Определяем среднюю аномалию, соответствующую истинной аномалии  $\vartheta_k$  в момент времени  $t$ :  $M_k = n_k(t - \tau_k)$ .

3. Решаем уравнение Кеплера:  $E_k = e_k \sin E_k + M_k$  и находим эксцентрическую аномалию  $E_k$ . Уравнение Кеплера целесообразно решать методом последовательных приближений.

4. Используя формулу  $\text{tg} \frac{\vartheta_k}{2} = \text{tg} \frac{E_k}{2} \cdot \sqrt{\frac{1+e_k}{1-e_k}}$ , вычисляем истинную аномалию  $\vartheta_k$ :

$$\vartheta_k = 2 \arctg \left( \text{tg} \frac{E_k}{2} \cdot \sqrt{\frac{1+e_k}{1-e_k}} \right).$$



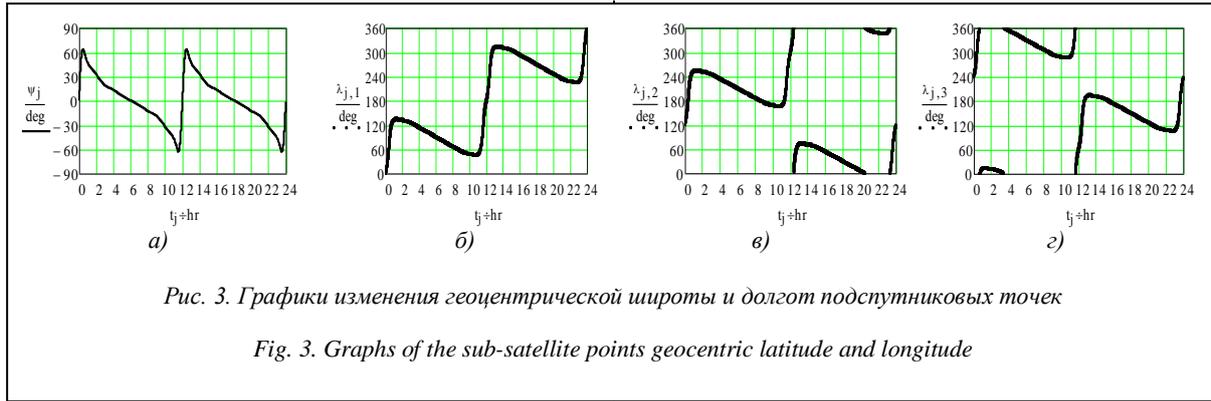


Рис. 3. Графики изменения геоцентрической широты и долгот подспутниковых точек

Fig. 3. Graphs of the sub-satellite points geocentric latitude and longitude

Тогда (1) можно переписать следующим образом:  $f(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_A, t) = \arccos \frac{x_k x_A + y_k y_A + z_k z_A}{|\mathbf{r}_k| \cdot R_3} =$   
 $= \arccos \frac{1}{r_k \cdot R_3} (r_k (\cos \Omega_k \cos u_k - \sin \Omega_k \cos i_k \sin u_k) x_A +$   
 $+ r_k (\sin \Omega_k \cos u_k + \cos \Omega_k \cos i_k \sin u_k) y_A + r_k \sin i_k \sin u_k z_A) =$   
 $= \arccos \frac{1}{R_3} ((\cos \Omega_k \cos u_k - \sin \Omega_k \cos i_k \sin u_k) x_A +$   
 $+ (\sin \Omega_k \cos u_k + \cos \Omega_k \cos i_k \sin u_k) y_A + \sin i_k \sin u_k z_A).$

Выбранная точка  $A$  на поверхности Земли будет видна в момент времени  $t$  по крайней мере одним из спутников системы тогда и только тогда, когда минимальное из чисел  $f(r_1, r_A, t), f(r_2, r_A, t), \dots, f(r_N, r_A, t)$  не превышает  $\min_k \alpha_k(t_{opt})$ . Поэтому для того, чтобы система осуществляла непрерывный обзор Земли, необходимо и достаточно [1] выполнения неравенства

$$\min_k \max_{r_A \in S, t \in [0, T_k]} \{f(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_A, t)\} \leq \min_k \alpha_k(t_{opt}), \quad (2)$$

где  $S$  – множество точек поверхности Земли;  $t_{opt}$  – момент времени, когда достигает оптимума левая часть (2).

Геоцентрический угловой радиус  $\alpha_k(t)$  в момент времени  $t$  определяется по формуле (рис. 1):

$$\alpha_k(t) = \arcsin \left( \frac{r_k(t) \cdot tg \gamma}{R_3} - tg \gamma \right).$$

Поскольку  $r_k$  полностью выражается через параметры орбиты  $P_{orbk}$ , то (2) можно переписать в виде:

$$\min_k \max_{r_A \in S, t \in [0, T_k]} \{f(P_{orbk}, r_A, t)\} \leq \min_k \alpha_k(t_{opt}). \quad (3)$$

Обозначим через  $f(P_{orb}, r_A, t)$  левую часть неравенства (3). Наша задача такова: найти минимум функции

$$f(P_{orb}, r_A, t) = \min_k \max_{r_A \in S, t \in [0, T_k]} \{f(P_{orbk}, r_A, t)\},$$

определенной на множестве  $P_{orb} = \{P_{orbk}\}_{k=1}^N$ , то есть решить задачу

$$\min_k \max_{r_A \in S, t \in [0, T_k]} \{f(P_{orbk}, r_A, t)\} \xrightarrow{P_{orb}} \min,$$

затем проверить выполнение условия (3).

Обратим внимание на то, что параметры  $a_k, e_k, i_k, \Omega_k, \omega_k$  у спутников одной орбиты одинаковы. Значит,  $5+n$  параметров имеют спутники одной орбиты, а вся спутниковая система имеет  $(5+n) \cdot m = 5m+N$  параметров. Поэтому число параметров нашей задачи сокращается с  $6N$  до  $5m+N$ .

Каждому моменту времени  $t_j$  для каждого спутника (индекс  $k$  опускаем) при заданных элементах орбиты соответствует подспутниковая точка с долготой  $\lambda_j$  и геоцентрической широтой  $\psi_j$ , которые вычисляются [11] по следующим формулам:  $\psi_j = \arcsin(\sin u_j \cdot \sin i),$

$$\lambda_j = \lambda_{\Omega} \pm \Delta \lambda_j - \omega_3 (t_j - t_{\Omega}), \quad \Delta \lambda_j = \arccos \frac{\cos u_j}{\cos \psi_j},$$

$\lambda_{\Omega} = \Omega - S_{\Omega}$ , где  $t_{\Omega}$  – время прохождения ИСЗ экватора в восходящем узле орбиты;  $\omega_3$  – угловая скорость вращения Земли, равная  $7,29211 \cdot 10^{-5}$  1/с;  $S_{\Omega}$  – звездное время по Гринвичу в момент прохождения ИСЗ восходящего узла орбиты.

Геометрическое место подспутниковых точек называется трассой ИСЗ [10].

Наглядно представить полученные при реализации описанного в данной статье научно-методического аппарата трассы ИСЗ можно с помощью среды программирования MathCAD2014.

В качестве примера рассмотрим трассы трех ИСЗ, распределенных по трем орбитальным плоскостям с высотой перигея 500 км, высотой апогея 40 000 км, с наклоном 63,4°, разнесенных по экватору на 120°.

На рисунке 3а изображен график изменения геоцентрической широты (одинаковой для всех трех спутников) подспутниковой точки в зависимости от времени  $t_j$ , на рисунках 3б, в, г – графики изменения долготы подспутниковой точки для долгот восходящих узлов 0°, 120°, 240° соответственно.

На рисунке 4 приведены траектории движения подспутниковых точек на фоне карты Земли.

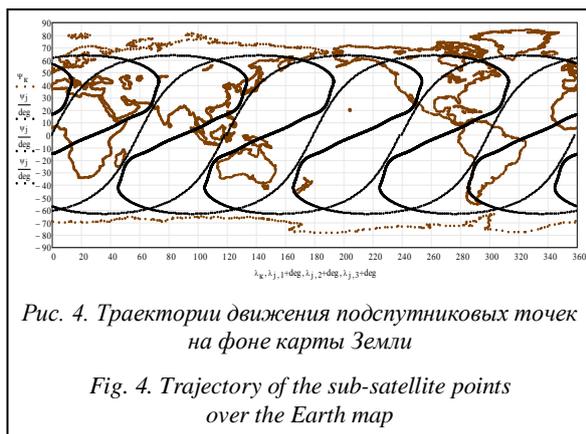


Рис. 4. Траектории движения подспутниковых точек на фоне карты Земли

Fig. 4. Trajectory of the sub-satellite points over the Earth map

Полученные результаты дают основание для вывода о том, что приведенный выше научно-методический аппарат работоспособен и позволяет получить за приемлемое время при использовании разумных вычислительных ресурсов результаты по построению орбитальной группировки на эллиптических орбитах для изменяющихся в широких пределах (1÷10) количества орбит и спутников (1÷10) на каждой орбите.

Таким образом, использование обоснованного в работе подхода к моделированию процесса оптимизации параметров эллиптических орбит спутниковой системы непрерывного обзора поверхности Земли на основе выбранного критерия оптимальности параметров орбит позволит получить оптимальные значения параметров орбит. Одним из вариантов достижения этого результата может быть решение сформулированной в работе опти-

мизационной задачи с привлечением современных компьютерных вычислительных методов.

#### Литература

1. Можаяев Г.В. Синтез орбитальных структур спутниковых систем (теоретико-групповой подход). М.: Машиностроение, 1989. 304 с.
2. Можаяев Г.В. Проблемы оптимизации движения спутниковых систем: состояние исследований и перспективы // Труды МАИ. 2009. Вып. 34; URL: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=7434> (дата обращения: 12.11.2014).
3. Галиев Ш.И., Заботин В.И. О непрерывном обзоре поверхности Земли // Исследование Земли из космоса. 1983. № 1. С. 117–120.
4. Заботин В.И. Модели спутниковых систем глобальной связи на эллиптических орбитах // Исследование Земли из космоса. 1994. № 5. С. 70–76.
5. Горбулин В.И. Оптимизация орбитального построения глобальных космических систем наблюдения. СПб: Изд-во МО РФ, 2001. 171 с.
6. Горбулин В.И. Новый способ оптимизации орбитального построения глобальных спутниковых систем // Полет. 2001. № 12. С. 20–26.
7. Решетников В.Н. Космические телекоммуникации (Начала). Тверь: Изд-во НИИ ЦПС, 2009. 128 с.
8. Тарасенко М.В. Военные аспекты советской космонавтики. М.: Агентство российской печати. ТОО «Николь», 1992. 164 с.
9. Арпин Ю.И., Доронкина А.Н. Теоретико-групповой подход к решению задачи синтеза орбитальных группировок космических аппаратов на орбитах эллиптического типа // 43 воен.-науч. конф. ВА ВКО им. Г.К. Жукова: науч.-методич. сб., секция № 2. Тверь, 2014.
10. Рейзлин В.И. Численные методы оптимизации. Томск: Изд-во Том-ПИ, 2011. 105 с.
11. Баринов К.Н., Бурдаев М.Н., Мамон П.А. Динамика и принципы построения орбитальных систем космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1975. 270 с.
12. Эльясберг П.Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1965.

DOI: 10.15827/0236-235X.109.087-091

Received 02.12.14

#### AN APPROACH TO MODELING OF PARAMETERS OPTIMIZATION FOR SATELLITE SYSTEM ELLIPTICAL ORBITS

*Doronkina A.N., Postgraduate Student, [annadoronkina@bk.ru](mailto:annadoronkina@bk.ru)  
(Tver State University, Zhelyabova St., 33, Tver, 170100, Russian Federation)*

**Abstract.** This paper proposes an approach to modeling elliptical orbits of the Earth's surface continuous review satellite system to optimize their parameters. For this purpose the author suggests an analysis of options for solving the problem of optimization of such review by a satellite system with elliptic orbits. There are descriptions of the conditions that characterize the motion model of a considered satellite system. The author considers Kepler model of satellite motion in Cartesian (Greenwich) coordinate system with the origin at the center of the Earth.

To find the true anomaly the author uses an algorithm that includes a solution of Kepler's equation using a method of successive approximations. The paper shows justifying of parameters optimality criterion for satellites orbits, the system of optimization problem constraints. The author determines geocentric angular radius which changes over time when Earth artificial satellite goes from its perigee to apogee, as well as a satellite viewing angle. The author has selected a criterion function which is a geocentric angular distance between the radius vectors of the satellites and the current point on the Earth's surface at the current time. The choice of optimization parameters is proven. Taking into account the condition that the system consists of satellites groups and satellites in each group are moving along the same orbit, the problem dimension can be reduced. An optimization problem is stated clearly. The paper shows a satellites motion simulation in the satellite system under research using MathCAD2014 environment. As an example, the paper shows the trajectories of the sub-satellite points for three artificial satellites on the Earth map with characteristics corresponding to the characteristics of a known satellite system. The author presents the dependencies of changing the geocentric latitude and longitude of the sub-satellite points from time and visualizes their movement.

**Keywords:** modeling, programming environment, satellite system, elliptical orbit, continuous review of the Earth's surface, the optimality criterion, optimization.

**References**

1. Mozhaev G.V. *Sintez orbitalnykh struktur sputnikovykh sistem (teoretiko-grupповой podkhod)* [A synthesis of satellite systems orbital structures (group-theoretic approach)]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1989, 304 p.
2. Mozhaev G.V. The Problems of Optimization of Satellite Systems Motion: State of Research and Prospects. *Trudy MAI* [Proc. of MAI], 2009, iss. 34, available at: <http://www.mai.ru/science/trudy/eng/published.php?ID=8227&eng=Y> (accessed November 12, 2015).
3. Galiev Sh.I., Zabotin V.I. On continuous review of the Earth's surface. *Issledovanie Zemli iz kosmosa* [The Study of the Earth from Space]. 1983, no. 1, pp. 117–120 (in Russ.).
4. Zabotin V.I. Models of global communication satellite systems in elliptical orbits. *Issledovanie Zemli iz kosmosa* [The Study of the Earth from Space]. 1994, no. 5, pp. 70–76 (in Russ.).
5. Gorbunin V.I. *Optimizatsiya orbitalnogo postroeniya globalnykh kosmicheskikh sistem nablyudeniya* [Orbital Construction Optimization of global Satellite Surveillance Systems]. St. Petersburg, RF Ministry of Defense Publ., 2001, 171 p.
6. Gorbunin V.I. A new method of optimizing the orbital construction of global satellite systems. *Polet* [Flight]. 2001, no. 12, pp. 20–26 (in Russ.).
7. Reshetnikov V.N. *Kosmicheskie telekommunikatsii (Nachala)* [Space Telecommunications (beginning)]. Tver: Publ Research Institute CPS, 2009, 128 p.
8. Tarasenko M.V. *Voennye aspekty sovetskoй kosmonavtiki* [Military Aspects of the Soviet Space Program]. Moscow, Russian press agency, TOO “Nicole” Publ., 1992, 164 p.
9. Arepin Y.I., Doronkina A.N. The group-theoretic approach to the problem of synthesis of orbital groups of spacecrafts in elliptic type orbits. *Nauchno-metodicheskiy sbornik 43 Voenno-nauchnoy konferentsii VA VKO im. G.K. Zhukova* [Scientific-Methodical Proc. of the 43th Military-Scientific Conf. G.K. Zhukov VA EKR]. Tver, 2014 (in Russ.).
10. Reylin V.I. *Chislennyye metody optimizatsii* [Numerical Optimization Techniques]. Tomsk, Tom PI Publ., 2011, 105 p.
11. Barinov K.N., Burdaev M.N., Mamon P.A. *Dinamika i printsipy postroeniya orbitalnykh sistem kosmicheskikh apparatov* [Dynamics and Principles of Orbital Spacecraft Systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1975, 270 p.
12. Elyasberg P.E. *Vvedenie v teoriyu poleta iskusstvennykh sputnikov Zemli* [Introduction to the Theory of Artificial Satellites Flight]. Moscow, Nauka Publ., 1965.

Реклама

**НИИ «ЦЕНТРОПРОГРАММСИСТЕМ»****Создание комплексных систем защиты информации**

Предлагаем комплексные решения по созданию систем защиты информации для существующих и разрабатываемых автоматизированных (информационных) систем:

- системы защиты конфиденциальной информации;
- системы защиты персональных данных до уровня К1;
- системы защиты информации от несанкционированного доступа и иностранных технических разведок, позволяющие обрабатывать информацию, отнесенную к государственной тайне с грифом до «совершенно секретно» включительно;
- аппаратно-программные модули доверенной загрузки;
- аппаратно-программные комплексы защиты информации.

Разработка ведется строго в соответствии с требованиями российского законодательства, руководящих документов ФСТЭК России, ФСБ России, нормативных документов МО РФ и других ведомств.

Правомочность выполнения работ подтверждается действующими лицензиями ФСБ, ФСТЭК и Минобороны России.

Опыт работы НИИ «Центрпрограммсистем» в области защиты информации (информационной безопасности) – более 20 лет.

Подробности на сайте [www.szi-cps.ru](http://www.szi-cps.ru)  
Телефон: (4822) 68-06-36