УДК 528.4Т
*И.Т. Антипов*
СГГА, Новосибирск

## ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ СИСТЕМ УГЛОВОЙ ОРИЕНТИРОВКИ СНИМКОВ

В большинстве фотограмметрических задач (как аналитических, так и цифровых) приходится оперировать с элементами внешнего ориентирования снимков. Они характеризуют положение системы координат съемочной камеры $x_c y_c z_c$ относительно внешней системы координат местности или изображенного на снимке объекта $X_M Y_M Z_M$. Пусть $XYZ$ – вспомогательная прямоугольная система координат снимка, оси которой параллельны осям внешней системы $X_M Y_M Z_M$. Тогда угловую ориентировку связки проектирующих лучей можно задать тремя углами, на которые необходимо последовательно повернуть систему координат $XYZ$, чтобы совместить ее с системой камеры $x_c y_c z_c$. В практике наиболее часто угловая ориентировка выражается двояко [1, 3]. В одном случае – через элементы $\alpha, \omega, \kappa$, причем продольный угол $\alpha$ лежит в плоскости $XZ$, т.е. первый поворот осуществляется вокруг оси $Y$. В другом случае – через элементы $\omega', \varphi, \kappa'$ с первым поперечным наклоном $\omega'$, осуществляемым вокруг оси $X$, т.е. лежащим в плоскости $YZ$.

Обе совокупности ($\alpha, \omega, \kappa$ и $\omega', \varphi, \kappa'$) представляют углы Эйлера и позволяют подсчитать направляющие косинусы

$$\Pi = \Pi_{\alpha\omega\kappa} = \Pi_{\omega'\varphi\kappa'} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad (1)$$

т.е. косинусы углов между всеми сочетаниями осей систем $XYZ$ и $x_c y_c z_c$. При этом [2, 4]:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \cos\alpha\cos\kappa - \sin\alpha\sin\omega\sin\kappa = \cos\varphi\cos\kappa';\\
a_2 &= -\cos\alpha\sin\kappa - \sin\alpha\sin\omega\cos\kappa = \cos\varphi\sin\kappa';\\
a_3 &= -\sin\alpha\cos\omega = -\sin\varphi;\\
b_1 &= \cos\omega\sin\kappa = \cos\omega'\sin\kappa' - \sin\omega'\sin\varphi\cos\kappa';\\
b_2 &= \cos\omega\cos\kappa = \cos\omega'\cos\kappa' + \sin\omega'\sin\varphi\sin\kappa';\\
&\quad (2)\\
b_3 &= -\sin\omega = -\sin\omega'\cos\varphi;\\
c_1 &= \sin\alpha\cos\kappa + \cos\alpha\sin\omega\sin\kappa = \sin\omega'\sin\kappa' + \cos\omega'\sin\varphi\cos\kappa';\\
c_2 &= -\sin\alpha\sin\kappa + \cos\alpha\sin\omega\cos\kappa = \sin\omega'\cos\kappa' - \cos\omega'\sin\varphi\sin\kappa';\\
c_3 &= \cos\alpha\cos\omega = \cos\omega'\cos\varphi.
\end{aligned}$$

В ходе вычислительной обработки приходится находить углы наклона по направляющим косинусам. Соответствующие формулы имеют вид:

$$tg\,\alpha = -\frac{a_3}{c_3},\ sin\omega = -b_3,\ tg\,\kappa = \frac{b_1}{b_2};\quad tg\omega' = -\frac{b_3}{c_3},\ sin\varphi = -a_3,\ tg\kappa' = -\frac{a_2}{a_1}.$$
(3)

При плановой съемке, когда продольные и поперечные углы наклона снимков малы, а ось $Z_M$ внешней системы координат местности $X_M Y_M Z_M$ примерно совпадает с отвесной линией в центре тяжести блока (маршрута, стереопары или снимка), оба варианта угловых элементов внешнего ориентирования равноценны. При решении всех фотограмметрических задач они дают результаты, совпадающие с точностью до ошибок округления. Поэтому нет необходимости отдавать предпочтение какой-то из систем углового ориентирования. Но в последние годы наметилась тенденция принимать непосредственно геоцентрическую систему координат земного эллипсоида $X_E Y_E Z_E$ за внешнюю систему $X_M Y_M Z_M$. В таком случае в зависимости от местоположения участка съемки на эллипсоиде угловые элементы ориентирования могут лежать в пределах от 0 до 360°. Возможны и другие случаи, когда угловые элементы оказываются большими. Например, при обработке наземных снимков зданий и сооружений с целью передачи текстуры их в 3D-модель местности, если вычисления ведутся в системе координат соответствующего участка местности. В подобных случаях выбор системы может оказаться решающим.

При углах наклона, равных 90°, возникают осложнения. Если $\omega = 90°$, то

$$a_3 = b_1 = b_2 = c_3 = 0, \qquad (4)$$

и при подсчете углов $\alpha$ и $\kappa$ по формулам (3) возникает неопределенность. Аналогичная неопределенность имеет место для углов $\omega'$ и $\kappa'$, когда $\varphi = 90°$.

К сожалению, направляющие косинусы не обладают свойством однозначности, на что прямо указано во многих справочниках по математике. Поэтому значения направляющих косинусов сохраняются, если один из углов заменить его дополнением до $\pi$, а к двум другим углам добавить по $\pi$. Это означает, что по направляющим косинусам невозможно определить четверти, в которых лежат углы наклона снимка. При плановой съемке и ограниченных размерах фотограмметрического построения обычно по умолчанию считают, что угол $\omega$ (или $\varphi$) по абсолютной величине меньше 90°. Тогда косинус этого угла положителен и отмеченная здесь неоднозначность решения не проявляется. Но в общем случае для правильного определения угловых элементов внешнего ориентирования снимка по формулам (3) необходимо либо заранее знать знак косинуса угла $\omega$ (или $\varphi$), либо каким-то образом контролировать правильность подсчета углов (например, через элементы взаимного ориентирования).

Важнейшей математической зависимостью в фотограмметрии является условие коллинеарности. Задача внешнего ориентирования снимка по условиям коллинеарности сводится к решению системы уравнений поправок

$$a\delta\alpha + b\delta\omega + c\delta\kappa + d\delta X_S + e\delta Y_S + f\delta Z_S + l_x = V_x;$$
$$a'\delta\alpha + b'\delta\omega + c'\delta\kappa + d'\delta X_S + e'\delta Y_S + f'\delta Z_S + l_y = V_y. \qquad (5)$$

Здесь $\delta\alpha, \delta\omega, \delta\kappa, \delta X_S, \delta Y_S, \delta Z_S$ – приращения к приближённым значениям элементов внешнего ориентирования снимка $\alpha, \omega, \kappa, X_S, Y_S, Z_S$. Через $l_x, l_y$ обозначены свободные члены, а $V_x, V_y$ – вероятнейшие поправки уравнивания. Коэффициенты $a, b, \ldots f, a', b', \ldots f'$ выражаются через измеренные координаты точки снимка и другие величины, подсчитанные по приближенным значениям неизвестных, в том числе и через направляющие косинусы. Ниже приведены формулы для коэффициентов уравнений поправок, относящиеся к искомым углам наклона снимка. Все обозначения в них общеприняты и не нуждаются в пояснениях.

Для углов $\alpha, \omega$ [2]:

$$a = \frac{\partial x}{\partial \alpha} = \frac{f_k}{Z^*}\left[c_1(X_M - X_S) - a_1(Z_M - Z_S)\right] + \frac{x}{Z^*}\left[c_3(X_M - X_S) - a_3(Z_M - Z_S)\right]$$

;

$$b = \frac{\partial x}{\partial \omega} = -f_k \sin\alpha + \frac{x}{\cos\omega}\left[\sin\omega + \frac{(Y_M - Y_S)}{Z^*}\right];$$

$$a' = \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \frac{f}{Z^*}\left[c_2(X_M - X_S) - a_2(Z_M - Z_S)\right] + \frac{y}{Z^*}\left[c_3(X_M - X_S) - a_3(Z_M - Z_S)\right]$$

;

$$b' = \frac{\partial y}{\partial \omega} = -f_k \cos\alpha + \frac{y}{\cos\omega}\left[\sin\omega + \frac{(Y_M - Y_S)}{Z^*}\right]. \qquad (6)$$

Для углов $\omega', \varphi$ вид уравнений поправок (5) останется прежним, если заменить $\alpha$ на $\varphi$, а $\omega$ на $\omega'$. Тогда [4]:

$$a = \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{x}{Z^*}\left\{(X_M - X_S)\cos\varphi + a_3\left[(Y_M - Y_S)\sin\omega' - (Z_M - Z_S)\cos\omega'\right]\right\} - f_k \cos\kappa'$$

;

$$b = \frac{\partial x}{\partial \omega'} = \frac{f}{Z^*}\left[c_1(Y_M - Y_S) - b_1(Z_M - Z_S)\right] + \frac{x}{Z^*}\left[c_3(Y_M - Y_S) - b_3(Z_M - Z_S)\right]$$

;

$$a' = \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{y}{Z^*}\left\{(X_M - X_S)\cos\varphi + a_3\left[(Y_M - Y_S)\sin\omega' - (Z_M - Z_S)\cos\omega'\right]\right\} + f_k \sin\kappa'$$

;

$$b' = \frac{\partial y}{\partial \omega'} = \frac{f}{Z^*}\left[c_2\left(Y_M - Y_S\right) - b_2\left(Z_M - Z_S\right)\right] + \frac{y}{Z^*}\left[c_3\left(Y_M - Y_S\right) - b_3\left(Z_M - Z_S\right)\right].$$

(7)

Выражения для прочих коэффициентов одинаковы в обеих системах углового ориентирования. Приведем только формулы коэффициентов при поправке к углу разворота снимка вокруг главного луча связки:

$$c = \frac{\partial x}{\partial \kappa} = \frac{\partial x}{\partial \kappa'} = y; \qquad c' = \frac{\partial y}{\partial \kappa} = \frac{\partial y}{\partial \kappa'} = -x. \qquad (8)$$

В группе (6) обращают на себя внимание формулы для $b$ и $b'$. Ясно, что при $\omega = 90°$ эти величины становятся бесконечно большими, а значит решить задачу в таком случае не представляется возможным. Правда, экспериментальная проверка показывает, что если угол $\omega$ отличается от прямого хотя бы на десятую долю секунды, то решение в принципе возможно. Действительно, если $\omega$ близок к 90°, то будем иметь: $a_3 \approx 0,\ \ c_3 \approx 0$ и $b_3 \approx -1$. Следовательно

$$Z^* = a_3\left(X_M - X_S\right) + b_3\left(Y_M - Y_S\right) + c_3\left(Z_M - Z_S\right) \approx -\left(Y_M - Y_S\right). \qquad (9)$$

В результате в прямых скобках второй и четвертой формул из группы (6) оказывается очень малая величина, сопоставимая по порядку со значением $\cos\omega$. Поэтому фактически катастрофический рост коэффициентов $b$ и $b'$ не наблюдается. Но дает о себе знать другая неприятная особенность, связанная с тем, что при $\omega = 90°$ снимок параллелен плоскости $X_M Z_M$. Если два другие угла малы, то направляющие косинусы $a_1 \approx c_2 \approx 1$, и с учетом выражений (4) и (9) можно записать:

$$a \approx f\,\frac{Z_M - Z_S}{Y_M - Y_S} \approx y, \qquad a' \approx -f\,\frac{X_M - X_S}{Y_M - Y_S} \approx -x. \qquad (10)$$

В итоге получается, что в уравнениях поправок (5) коэффициенты при первом и третьем неизвестном примерно равны, и матрица нормальных уравнений вырождается, поскольку в ней возникает пропорциональность между соответствующими строками и столбцами. Экспериментальная проверка показывает, что при углах $\omega$, лежащих в пределах от 89° до 91°, в обращенной матрице коэффициенты пропорциональности названных строк и столбцов отличаются по абсолютной величине от единицы лишь в третьей-четвертой цифре после запятой.

Применительно к системе углов $\omega', \varphi, \kappa'$ по формулам группы (7) не видно, чтобы какие-то коэффициенты уравнений поправок (5) могли достигать бесконечно больших значений. Но и эта система углов не гарантирует от вырождения матрицы нормальных уравнений. Такое происходит, когда $\varphi \approx 90°$, а $\omega'$ и $\kappa'$ малы. Этот вариант соответствует положению снимка примерно параллельно плоскости $Y_M Z_M$. Тогда

$$Z^* = -\left(X_M - X_S\right); \qquad b = -f\,\frac{Y_M - Y_S}{X_M - X_S} = -y; \qquad b' = f\,\frac{Z_M - Z_S}{X_M - X_S} = x. \qquad (11)$$

Сопоставление выражений (11) и (8) свидетельствует, что пропорциональны вторая и третья строки матрицы нормальных уравнений (а также соответствующие столбцы), и решение обратной фотограмметрической засечки не будет точным.

Для экспериментальной проверки смоделированы серии снимков, у которых один из углов ($\alpha/\varphi,\ \omega/\omega'$) менялся с шагом в одну минуту от 89° до 91°, а прочие задавались случайными числами, не превосходившими ±2°. В третьей, контрольной серии все углы были малы. Объект местности содержал 49 точек, расположенных с небольшими случайными уклонениями от вершин регулярной сетки по всем трем осям. В координаты точек макетных снимков введены случайные нормально распределенные погрешности со средним квадратическим значением 0.01 мм и нулевым математическим ожиданием. При решении по макетам обратной фотограмметрической задачи за приближенные значения неизвестных принимались величины, полученные путем ввода случайных искажений в истинные элементы ориентирования. Результаты решения, усредненные для серий, представлены в табл. 1. В ней строки «Вер.» соответствуют значениям, подсчитанным через весовые коэффициенты и среднюю квадратическую ошибку единицы веса, а строки «Ист.» – фактическим погрешностям определения углов.

Следует добавить, что для всех снимков, участвовавших в эксперименте, остаточные погрешности условий коллинеарности вполне отвечали указанной выше точности координат точек снимков, а средние квадратические ошибки единицы веса не выходили за 0.005-0.006 мм. В этих же пределах оказались также значения как вероятных, так и фактических ошибок определения координат центров проектирования, выраженных в масштабе снимков. Наглядную картину дает табл. 2. В ней показаны истинные и уравненные элементы внешнего ориентирования одного из снимков, а также усредненная оценка остаточных погрешностей условий коллинеарности.

Таблица 1. Ошибки определения угловых элементов внешнего ориентирования

| Снимок параллелен Плоскости | Система Углов | Вид ошибок | Значения ошибок (в секундах) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $\delta\alpha/\delta\varphi$ | | $\delta\omega/\delta\omega'$ | | $\delta\kappa/\delta\kappa'$ | |
| | | | Средн. | Макс. | Средн. | Макс. | Средн. | Макс. |
| XZ $\omega \approx \omega' \approx 90°$, другие углы малы | $\alpha,\omega,\kappa$ | Вер. | 1410 | 21486 | 4.9 | 5.4 | 1410 | 21486 |
| | | Ист. | 1469 | 22290 | 3.7 | 15.3 | 1468 | 22286 |
| | $\omega',\varphi,\kappa'$ | Вер. | 4.9 | 5.6 | 4.9 | 5.6 | 1.9 | 2.2 |
| | | Ист. | 3.5 | 10.4 | 4.1 | 13.3 | 1.7 | 5.5 |
| YZ $\alpha \approx \varphi \approx 90°$, другие углы малы | $\alpha,\omega,\kappa$ | Вер. | 4.9 | 5.5 | 4.9 | 5.5 | 1.9 | 2.2 |
| | | Ист. | 4.0 | 13.4 | 3.7 | 10.7 | 1.6 | 6.1 |
| | $\omega',\varphi,\kappa'$ | Вер. | 4.9 | 5.5 | 1406 | 21419 | 1406 | 21419 |
| | | Ист. | 3.6 | 14.0 | 838 | 13892 | 838 | 13889 |
| XY Все углы | $\alpha,\omega,\kappa$ | Вер. | 4.9 | 5.3 | 4.9 | 5.3 | 1.9 | 2.1 |
| | | Ист. | 3.8 | 15.9 | 3.7 | 13.1 | 1.5 | 5.3 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| малы | $\omega', \varphi, \kappa'$ | Вер. | 4.9 | 5.6 | 4.9 | 5.6 | 1.9 | 2.2 |
| | | Ист. | 3.5 | 14.5 | 3.8 | 12.0 | 1.4 | 6.6 |

Таблица 2. Остаточные погрешности условий коллинеарности

| | Элементы внешнего ориентирования (гр., мин., сек.; метры) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Истинные | | | Получено из уравнивания | | |
| $\alpha, \omega, \kappa$ | -1 36 41 | 90 01 00 | 0 43 04 | 2 33 07 | 90 00 57 | -3 26 45 |
| $X_S, Y_S, Z_S$ | 42.199 | 1599.496 | 0.496 | 42.147 | 1599.501 | 0.428 |
| Погрешности | Средн. | Ср.кв. | Макс. | Средн. | Ср.кв. | Макс. |
| $\delta x$ (мкм) | 4 | 5 | 10 | 4 | 5 | 10 |
| $\delta y$ (мкм) | 5 | 6 | 10 | 5 | 6 | 11 |

Казалось бы, что существенное различие истинных и уравненных углов, показанное в табл. 2, должно как-то отразиться на погрешностях условий коллинеарности. Однако этого не происходит, поскольку в рассматриваемом случае некоторые из направляющих косинусов очень малы, и они практически не влияют на решение задачи.

Таким образом, плохая обусловленность матриц нормальных уравнений, приводящая к существенным ошибкам углов, не обязательно отражается на соблюдении условий коллинеарности и позиционировании центров проектирования. Можно предположить, что прямые фотограмметрические засечки будут при этом давать правильные координаты точек местности.

Для проверки последнего предположения в программу построения и уравнивания фототриангуляции для цифровой фотограмметрической станции ЦНИИГАиК внесены дополнения, позволяющие указать, какую систему углов следует применить при вычислительной обработке. Потребовавшиеся исправления программы элементарно просты и свелись к изменению всего нескольких процедур, реализующих формулы (2), (3), (6) и (7). Экспериментальный счет выполнен по макетным снимкам, образующим замкнутые кольца, проложенные вокруг тела, имеющего размеры Земли. В каждом кольце – два витка, как бы блок из двух маршрутов, полученных с одной и той же орбиты. Масштаб фотографирования принят равным 1:3000000, фокусное расстояние камеры – 150мм, формат кадра 24x24 см. Количество снимков в маршруте – 151. Опорные точки расположены парами примерно через 10-15 базисов. Общее число опознаков в кольце – 24. В качестве твердых использованы также координаты центров проектирования. Вся опора задана непосредственно в геоцентрической системе координат. Исходным данным приданы случайные погрешности, соответствующие точности измерений снимков 0.01мм. Оценка точности фототриангуляции выполнена по вероятнейшим ошибкам и путем сравнения уравненных значений с истинными. Некоторые результаты экспериментов показаны в табл. 3.

Таблица 3. Оценка точности сгущения по координатам точек местности

| Орбита в | Система | Вид | Значения ошибок (в мм в масштабе снимков) |
|---|---|---|---|

| Плоскости: | Углов | оши-Бок | $\delta X_M$ | | $\delta Y_M$ | | $\delta Z_M$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Средн. | Макс. | Средн. | Макс. | Средн. | Макс. |
| Экватора | $\alpha,\omega,\kappa$ | Вер. | 0.011 | 0.020 | 0.011 | 0.032 | 0.012 | 0.022 |
| | | Ист. | 0.008 | 0.041 | 0.008 | 0.044 | 0.010 | 0.042 |
| | $\omega',\varphi,\kappa'$ | Вер. | 0.011 | 0.020 | 0.011 | 0.033 | 0.012 | 0.022 |
| | | Ист. | 0.008 | 0.042 | 0.008 | 0.044 | 0.010 | 0.042 |
| меридиана с долготой 0° | $\alpha,\omega,\kappa$ | Вер. | 0.013 | 0.022 | 0.012 | 0.029 | 0.015 | 0.190 |
| | | Ист. | 0.008 | 0.042 | 0.010 | 0.042 | 0.008 | 0.043 |
| | $\omega',\varphi,\kappa'$ | Вер. | 0.013 | 0.022 | 0.012 | 0.029 | 0.015 | 0.190 |
| | | Ист. | 0.008 | 0.042 | 0.010 | 0.042 | 0.008 | 0.043 |
| меридиана с долготой 90° | $\alpha,\omega,\kappa$ | Вер. | 0.016 | 0.028 | 0.018 | 0.032 | 0.022 | 0.538 |
| | | Ист. | 0.010 | 0.043 | 0.008 | 0.044 | 0.009 | 0.043 |
| | $\omega',\varphi,\kappa'$ | Вер. | 0.016 | 0.028 | 0.018 | 0.032 | 0.022 | 0.538 |
| | | Ист. | 0.010 | 0.043 | 0.008 | 0.044 | 0.009 | 0.043 |

Из таблицы видно, что фактическая точность фототриангуляционных колец во всех случаях оказалась одинаковой и вполне соответствующей погрешностям исходных данных. Для экваториального кольца вероятностные оценки близки к истинным. Для меридианных колец такого соответствия нет по оси $Z$. Причина заключается в том, что в местах пересечения колец с экватором, когда один из углов наклона приближается по абсолютной величине к 90°, соответствующие диагональные клетки в общей системе нормальных обусловлены плохо и весовые коэффициенты этих углов становятся очень большими. Именно так и проявляется неустойчивость, неопределенность, неоднозначность решения.

Сказанное выше подтверждает универсальность аналитических (и цифровых) методов фотограмметрии. Однако систему углового ориентирования целесообразно выбирать с учетом положения снимков относительно внешней системы координат местности или сфотографированного объекта. Для традиционной плановой съемки одинаково пригодны оба варианта. В общем случае система $\alpha,\omega,\kappa$ лучше подходит при больших продольных, а $\omega',\varphi,\kappa'$ – при больших поперечных углах.

Если же возникнет необходимость выполнить съемку объекта со всех сторон и создать единую фотограмметрическую сеть в виде кольца или сферы, то целесообразно сочетать обе системы, выражая углы наклона одних снимков через $\alpha,\omega,\kappa$, а других – через $\omega',\varphi,\kappa'$. Возможно также сочетать несколько систем внешних прямоугольных координат для разных частей объекта, выбирая их так, чтобы углы наклона снимков лежали в нужных пределах.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Антипов, И.Т. Математические основы пространственной аналитической фототриангуляции. – М.: Картгеоцентр-Геодезиздат, 2003, – 296 с.
2. Лобанов, А.Н. Аналитическая фотограмметрия. – М.: Недра, 1972, – 224 с.

3. Manual of photogrammetry. Fourth edition. – American society of photogrammetry, 1980, – 1056 p.

4. Konecny, G. Geoinformation. Remote sensing, Photogrammetry and Geographic information systems. – London and New York: Taylor and Francis, 2003, – 248 p.