

УДК 519.62

В. А. Иванов

**К ОПРЕДЕЛЕНИЮ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ
В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

Ключевые слова: численный метод, методика наименьших квадратов, минимизация сингулярных чисел, порядок матрицы.

При решении граничных задач на собственные значения получают характеристические уравнения в виде определителя матрицы однородных линейных уравнений. Элементы матрицы нелинейным образом зависят от спектрального параметра. Показывается целесообразность сведения процесса определения корней характеристического уравнения к задаче минимизации сингулярных чисел исходной матрицы.

Keywords: numerical method; method of least squares; minimization of the squares of the singular; order of the matrix.

In solving the boundary eigenvalue problems we obtain the characteristic equation as a determinant of homogeneous linear equations. Elements of the matrix in a nonlinear manner depending on the spectral parameter. Demonstrates the feasibility information, the process of determining roots of the problem of minimizing singular values of the original matrix.

Исследованию задачи о собственных значениях линейных дифференциальных операторов посвящена многочисленная литература. Здесь опишем один из методов, который приводит данную задачу к решению нелинейного характеристического уравнения.

Для конечной области Ω евклидова пространства \mathbb{R}^n , ограниченной кусочно-гладкой поверхностью S , решим задачу на собственные значения:

$$Lu(x) - \lambda u(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$Gu(x) = 0, \quad x \in S. \quad (2)$$

При этом L и G – линейные дифференциальные операторы, определенные на некоторых множествах D_L и D_G элементов гильбертова пространства соответственно. Решение задачи (1), (2) ищем в виде

$$u_N = \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k(x, \lambda), \quad (3)$$

где c_k – неизвестные коэффициенты, φ_k – система функций, являющихся точными решениями (1), но не удовлетворяющих условию (2).

Пусть $\{G\varphi_k(x, \lambda)\}$ – система линейно независимых функций при λ , отличном от собственного значения оператора L . Неизвестные коэффициенты c_k найдем методом наименьших квадратов из граничного условия (2):

$$E(c_k) = \iint_S |Gu_N|^2 dS. \quad (4)$$

Минимизация функционала невязки (4) приводит к системе однородных линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов:

$$A(\lambda)c = 0, \quad c = c_1, \dots, c_N. \quad (5)$$

Элементы матрицы $A(\lambda)c = 0$, порядка N имеют вид

$$a_{ij}(\lambda) = \iint_S G_{\varphi_i}(x, \lambda) G_{\varphi_j}(x, \lambda) dS. \quad (6)$$

Условие нетривиальности решения системы (5) приводит к характеристическому уравнению

$$\det A(\lambda) = 0. \quad (7)$$

Здесь матрица уравнения (5) симметричная и положительно-полуопределенная. Детерминант (7) – определитель Грама линейно независимой системы функций при значениях λ , отличных от собственного спектра оператора L . Тогда корни уравнения (7) определяют приближенные собственные значения граничной задачи (1), (2).

Для решения уравнения вида (7) используется метод, позволяющий отыскивать все собственные значения, расположенные в некоторой заданной области [1]. При этом в них не исследуются вопросы, связанные с погрешностью вычисления элементов матрицы типа (6).

При реализации решения на ЭВМ элементы матрицы (6) приходится вычислять с помощью каких-либо квадратурных формул. Поэтому вместо (4) иногда используют дискретный метод наименьших квадратов. Минимизация навязки граничного условия (2) в пространстве l_2 приводит к однородным нормальным уравнениям. Условие существования ненулевого решения системы дает характеристическое уравнение вида (7). При использовании нормальных уравнений оказывается, что матрица A зачастую является плохо обусловленной [2]. Например, при совпадении числа неизвестных коэффициентов и количества точек дискретизации метод наименьших квадратов сводится к граничному методу коллокации. Тогда число обусловленности матрицы наименьших квадратов есть квадрат числа обусловленности метода коллокации. Если E – матрица возмущения, то из известной оценки [3]

$$|\det(A + E) - \det A| |\det A|^{-1} \leq \left[1 + \mu(A) \|E\| \|A\|^{-1}\right]^N - 1, \quad (8)$$

где $\mu(A)$ – число обусловленности матрицы A порядка N , следует, что задача определения корней детерминантного уравнения (7) сильно неустойчивая.

Рассмотрим метод наименьших квадратов с использованием переопределенных систем [4]. Выберем на поверхности S систему точек $\{x_j\}_{j=1}^M$ при $M \geq N$ так, чтобы приближенное решение (3) в них удовлетворяло граничным условиям (2). При этом получаем переопределенную систему однородных линейных уравнений

$$\hat{A}(\lambda) \mathbf{c} = 0. \quad (9)$$

Здесь элементы матрицы B имеют вид

$$b_{ij}(\lambda) = G_{\varphi_i}(x_j, \lambda), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (10)$$

Для того чтобы (9) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был меньше числа неизвестных [5]. В данном подходе вместо характеристического уравнения, которое сильно чувствительно к возмущениям элементов матриц, получаем следующее условие: требуется найти такие значения спектрального параметра λ , при которых выполняется характеристическое неравенство

$$\text{rank} B(\lambda) < N. \quad (11)$$

Для решения этой задачи используем сингулярное разложение матриц. Известно [], что для всякой матрицы B размера $l \times N$ существуют ортогональные матрицы U, V порядка M, N и диагональная матрица Σ размера $M \times N$, для которых

$$\hat{A}(\lambda) = U(\lambda) \Sigma(\lambda) V^T(\lambda). \quad (12)$$

При этом ранг матрицы B равен рангу диагональной матрицы Σ , т.е. числу положительных сингулярных чисел. Преимущество сингулярного разложения по сравнению с другими

методами заключается в том, что сингулярные числа матрицы устойчивы к возмущениям ее элементов. Изменения элементов исходной матрицы приводят к возмущениям сингулярных чисел, не превосходящим этих изменений [4]. Поэтому при реализации алгоритма на ЭВМ практически все сингулярные числа отличны от нуля и требуется указать допуск d , ниже которого эти числа считаются нулевыми. Если относительная погрешность в исходной матрице равна δ , то за допуск можно принять $\delta\|\hat{A}\|$. Тогда, применяя сингулярное разложение (12) к матрице уравнения (9), получаем характеристическое неравенство вида

$$\text{rank } \Sigma(\lambda) < N. \quad (13)$$

Данная задача эквивалентна поиску таких значений λ , при которых достигаются минимумы сингулярных чисел $\sigma_i(\lambda)$:

$$\min_{\lambda} \{ \sigma_i(\lambda) : \sigma_i(\lambda) \leq d, \quad i = 1, 2, \dots, N \}. \quad (14)$$

Это позволяет определить собственные значения нелинейной спектральной проблемы без приведения характеристического уравнения к детерминантному виду и использовать информацию о точности входных данных.

Сингулярное разложение матриц также можно применить к характеристическому уравнению (7). Тогда, учитывая свойства ортогональных матриц, имеем $|\det A(\lambda)| = \det \Sigma(\lambda)$. В отличие от (14), здесь задача сводится к минимизации одной функции

$$\psi(\lambda) = \prod_{i=1}^N \sigma_i(\lambda).$$

Однако при определении значений спектрального параметра λ , которые доставляют минимумы функций $\psi(\lambda)$, встречаются принципиальные трудности, в частности из-за конечности разрядной сетки ЭВМ. По-видимому, вместо (7) будет удобнее использовать характеристическое неравенство (13), хотя затраты машинного времени при этом несколько увеличиваются. Используя другие разложения исходной матрицы, задачу вычисления корней уравнения (7) можно свести к определению ранга матрицы. Тогда из (13) как частный случай вытекает метод «выбора индекса» [6].

Литература

1. *Картышов, С.В.* Численный метод решения задачи на собственные значения с нелинейным вхождением спектрального параметра для разреженных матриц / С.В.Картышов // Вычислительная математика и физика. - 1989. - Т. 29. - №12. - С. 1898 - 1903.
2. *Райс, Дж.* Матричные вычисления и математическое обеспечение // Дж.Райс. - М.: Мир, 1984. - 476 с.
3. *Годунов, С.К.* Гарантированная точность решения системы линейных уравнений в евклидовых пространствах // С.К. Годунов, А.Г. Антонов, О.П. Кирилук, В.И. Костин - Новосибирск: Наука, 1988. - 338 с.
4. *Лоусон, Ч.* Численное решение задач метода наименьших квадратов // Ч.Лоусон, Р. Хенсон - М.: Наука, 1986. - 558 с.
5. *Воеводин, В.В.* Матрицы и вычисления // В.В.Воеводин, Ю.А. Кузнецов - М.: Наука, 1984. - 588 с.
6. *Wobst, R.* The generalized eigenvalue problem and acoustic surface wave computations / R.Wobst // Computing. - 1987. - V.39. - № 1. - P. 57 - 69.