ОПТИМИЗАЦИЯ РАСЧЕТА ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ПОПЕРЕЧНУЮ СИЛУ

Б. М. ЛЮПАЕВ, доктор технических наук,
С. В. ГАРИНА, аспирант

Главной особенностью расчета изгибаемых элементов на поперечную силу является учет совместного действия изгибающего момента и поперечной силы. Соотношение этих силовых воздействий зависит от положения расчетного сечения. У опоры величина поперечной силы наибольшая, а величина изгибающего момента зависит от статической схемы элемента. По мере удаления от опоры величина поперечной силы уменьшается, а изгибающий момент обычно растет.

Существующие методы расчета элементов на поперечную силу ориентированы на учет преобладающего воздействия. Данный подход упрощает решение задачи, но требует многочисленных ограничений при использовании таких методик.

В российских нормах [4] ограничена область применения расчета. Необходимо учитывать: расстояние от опоры до расчетного сечения в пределах одной-двух высот сечения; влияние формы сечения; обжатие элемента; армирование и т. д.

Оптимизация методики велась через набор основных расчетных случаев с анализом соответствующих экспериментов, поэтому методика расчета, естественно, фрагментарна.

В европейских нормах использовано максимальное приближение наиболее разработанной теории расчета упругого тела к фактической анизотропии свойств железобетона. Теория расчета также проста, но потребовались значительные усилия для рассмотрения различных случаев напряженного состояния, способов армирования, стадий эксплуатации. В конечном счете по количеству расчетных случаев и ограничений этот метод оказался сложнее вышеизложенного [4].

Расчет элементов по стержневой модели имеет более четкую схему учета всех воздействий на элемент [1]. Это статически определимая стержневая ферма, которая вырезается из элемента. Если такая ферма воспринимает все нагрузки, то считается, что элемент обладает достаточной несущей способностью. В данной методике оптимизируется наилучшая форма фермы. Методика довольно сложная: Она требует обеспечения передачи усилий на ферму, выполнения ограничений на размеры поясов, решетки фермы и проверку на срез соединения сжатого раскоса с нижней растянутой арматурой на опоре. Область применимости стержневой модели ограничена, как и [4], ее трудно применять для труб, пустотных плит.

Из рассмотренных случаев [1, 2, 4] видно, что оптимизация методов расчета велась не комплексно. В [4] акцент сделан на эксперимент, в [2] — на теоретические разработки в теории упругости, в [1] — на варьирование формой элемента с приведением ее к случаям, имеющим разработанную теорию расчета.

Не была использована теория упругости, которая сводится к анализу равновесия отдельных точек элементов, а не отдельных блоков конструкции. Последнее успешно иллюстрируется равновесием опорного и других блоков в элементе [4].

В таком подходе оптимально можно реализовать богатый экспериментальный материал по фактической работе блоков под нагрузкой. При расчете на прочность модифицированный элемент представляется соединенным из отдельных блоков.

Основная трудность на этом пути — переход от тела, работающего без разрывов, к телу, деформирование которого идет с разрывами, но без разрушения. Если обеспечить в теории упругости равновесие во всех точках или равновесие для всех блоков, составляющих элемент, то конечные результаты будут иметь определенные соответствия.

Для дальнейшего анализа возьмем теорию октаэдрических касательных напряжений, которая характерна для материалов, одинаково пластически деформируемых при сжатии и растяжении [3].

Будем иметь в виду, что при растяжении железобетон деформируется, с учетом трещин, равномерно и больше, чем при сжатии.

Условие давления для плоского напряженного состояния в элементе записывается так [3]:

$$\sigma^2_{экв} = \sigma^2 + 4\tau^2, \qquad (1)$$

где $\sigma_{экв}$ — эквивалентное напряжение;

σ — нормальное напряжение;

τ — касательное напряжение.

Формулу (1) перепишем для i-го блока конструкции и преобразуем:

$$1 = \left(\frac{N_i}{N_{экв\,i}}\right)^2 + 4\left(\frac{Q_i}{N_{экв\,i}}\right)^2, \qquad (2)$$

где N_i — нормальное усилие на i-й блок;

$N_{экв\,i}$ — эквивалентное усилие на i-й блок;

Q_i — касательное усилие на i-й блок.

Известно, что $N_{экв}/\sqrt{4} \approx Q_{экв}$, тогда

$$1 = \left(\frac{N_i}{N_{экв\,i}}\right)^2 + \left(\frac{Q_i}{Q_{экв\,i}}\right)^2 \qquad (3)$$

Из (3) получаем:

$$Q_i = Q_{экв\,i}\sqrt{[1 - (N_i/N_{экв\,i})]}. \qquad (4)$$

Если рассматривать элемент как часть сечения конструкции, то для блока, включающего в себя весь элемент, можно записать [4]:

$$N_{экв\,i} = N_{max} = \xi_R \quad вh_0 \quad R_в, \qquad (5)$$

$$N_i = N; \qquad (6)$$

$$Q_{экв\,i} = Q_{max}, \qquad (7)$$

где N_{max} — максимальное продольное усилие, воспринимаемое поперечным сечением конструкции;

ξ_R — максимальная относительная высота сжатой зоны бетона для изгибаемого элемента;

$в$, h_0 — соответственно ширина и рабочая высота прямоугольного сечения;

$R_в$ — расчетное сопротивление бетона на сжатие;

N — продольное усилие в расчетном сечении;

Q_{max} — максимальное поперечное усилие, воспринимаемое поперечным сечением конструкции с учетом поперечной арматуры.

Тогда (4) запишется:

$$Q = Q_{max}[1 - (N/N_{max})]^{1/2} \qquad (8)$$

N определяется по формуле

$$N = Q \quad C/Z, \qquad (9)$$

где Z — плечо внутренней пары сил;

C — расстояние от опоры до расчетного сечения.

С учетом (9) преобразуем (8):

$$Q = Q_{max}/\left[1 + \left(\frac{Q_{max}\cdot C}{(N_{max}\cdot Z)}\right)^2\right]^{1/2} \qquad (10)$$

Формула (8) применима для любых сечений и с любым видом загружения.

Величина Z определяется попытками, хотя ее можно выразить и точно.

Рассмотрим расчет балки на поперечную силу.

Исходные данные [4]: E_s = = 20 000 кН/см^2; $E_в$ = 20 000 кН/см^2;

$R_в = 1$ кН/см^2; $R_{в+} = 0,1$ кН/см^2; $R_{sw} = 28,5$ кН/см^2; $q_{sw} = 2$ кН/см^2; $в = 10$ см; $h_0 = 100$ см; $C = 140$ см; $\xi_R = 0,6$; $Z = 75$ см.

$$Q_{max} = 0,3\varphi_{wl}\quad \varphi_{вl}\quad R_в в h_0. \qquad (11)$$

$$\varphi_{вl} = 1 - 0,01\quad R_в = 1 - 0,1\quad 1\cdot 10 = 0,9.$$

$$\varphi_{wl} = 1 + 5\lambda\quad \mu_w = 1 + 5\quad 10\quad 0,0035 = 1,18.$$

$$\lambda = E_s/E_в = 20\,000/2\,000 = 10.$$

$$\mu_w = q_{sw}/(R_{sw}\quad в) = 2/(28,5\quad 20) = 0,0035.$$

$$Q_{max} = 0,3\quad 1,18\quad 0,9\quad 1\quad 10\quad 100 = 320 \text{ кН}.$$

$$N_{max} = \xi_R\quad в h_0 R_в = 0,6\quad 10\quad 100 = 600 \text{ кН}.$$

По формуле (10)

$$Q = 320\sqrt{1 + \left(\frac{320\quad 140}{600\quad 75}\right)^2} = 227 \text{ кН}.$$

Для сравнения в табл. 1 приведены результаты расчета по разным методикам.

Таблица 1

C, см	По СНиП [4]			Европейские нормы [2]			Стержневая модель [3]			По формуле (10)		
	Q, кН	N, кН	Z, см	Q, кН	N, кН	Z, см	Q, кН	N, кН	Z, см	Q, кН	N, кН	Z, см
110	290	240	88	220	285	85	283	390	80	260	360	82
140	282	360	82	220	385	80	230	422	79	227	412	79
200	300	—*	—	220	—	—	175	447	18	185	487	71

* Пропуски в данных табл. 1 для случаев, когда сечение не выдерживает возникающие усилия N.

Из данных табл. 1 видно, что с ростом расстояния от опоры до расчетного сечения (параметр C) величина несущей способности элемента по Q снижается для методик [1] и по формуле (10), по [2] не меняется и по действующей методике [4] падает и растет. Поэтому для [4] введены ограничения на C. По европейским нормам несущую способность определяют независимо от C, но требуют проверку главных напряжений, что тоже является ограничением. Действительно, при $C = 200$ по [2] сечение не выдерживает нормальные сжимающие напряжения, что и оправдывает показанное выше ограничение.

Для стержневой модели не требуются особые ограничения, но сложно при $C > 1,5h_0$ обосновать размещения стержневой модели в пределах элемента конструкции, когда объем бетона в элементе учитывается сразу в нескольких стержнях одновременно.

Сравнивание различных моделей, по данным табл. 1, показывает, что предлагаемая методика по формуле (10) не требует специального рассмотрения различных схем разрушения, построения конструкций, анализа напряженного состояния конструкции в различных точках, введения ограничений на положение расчетного сечения.

Из приведенных материалов можно сделать вывод, что использование аппарата теории упругости для элементов конечных размеров с фактическими ограничениями может быть предметом дальнейших исследований по оптимизации методов расчета железобетонных конструкций на поперечную силу.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Баранова Т. И., Лаврова О. В., Васильев Р. Р.** Методология моделирования сопротивления железобетонных конструкций // Вестн. отд-ния строит. наук РААСН. 2000. Вып. 3.

2. Международные рекомендации для расчета и осуществления обычных и предварительно напряженных конструкций / НИИЖБ. М., 1970. 234 с.

3. Справочник проектировщика. Расчетно-теоретический. М.: Стройиздат, 1960. 1040 с.

4. СНиП 2.03.01—84. Строительные нормы и правила. М.: Стройиздат, 1984. 80 с.

Поступила 15.01.01.

СИНТЕЗ ЛИНЕЙНОЙ ОПТИМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ЗАДАННОЙ СТЕПЕНЬЮ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

В. В. АФОНИН, кандидат технических наук

Рассмотрим решение линейно-квадратичной задачи в следующей постановке: для линейной стационарной системы с математическим описанием

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \qquad (1)$$

синтезировать регулятор состояния

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}),$$

для которого на движениях системы (1) достигается минимум квадратичного функционала

$$J = \int_0^\infty e^{2\sigma t}\, \mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{R}\mathbf{u})dt, \qquad (2)$$

где x — n-мерный вектор состояния;

u — r-мерный вектор управления;

A, B — постоянные матрицы размерами $n \times n$ и $n \times r$;

σ — постоянный неотрицательный параметр;

^{T} — символ транспонирования;

Q, R — симметрические положительно определенные матрицы размерами $n \times n$ и $r \times r$.

Предполагается, что система полностью управляема, а на управляющие воздействия ограничений не наложено.

Приводимое далее решение поставленной задачи опирается на результаты, имеющиеся в [3].

При $\sigma = 0$ задача (1), (2) является классической [1]. В таком случае она называется задачей оптимальной стабилизации. Оптимальный регулятор u(x) определяется на основе симметрического положительно определенного решения P нелинейного матричного уравнения Риккати [1]:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0, \qquad (3)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\,\mathbf{x}. \qquad (4)$$

С оптимальным регулятором (4) получаем замкнутую систему

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P})\mathbf{x}(t), \qquad (5)$$

которая, как известно, является асимптотически устойчивой [1].

Для решения задачи (1), (2) при $\sigma > 0$ определим новые переменные состояния $\hat{\mathbf{x}}(t)$ и управления $\hat{\mathbf{u}}(t)$ в виде

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = e^{\sigma t}\mathbf{x}(t); \qquad (6)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = e^{\sigma t}\mathbf{u}(t). \qquad (7)$$

Продифференцируем (7) с учетом (1):

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \sigma e^{\sigma t}\mathbf{x} + e^{\sigma t}\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \sigma e^{\sigma t}\mathbf{x} + e^{\sigma t}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}) = \sigma e^{\sigma t}\mathbf{x} + e^{\sigma t}\mathbf{A}\mathbf{x} + e^{\sigma t}\mathbf{B}\mathbf{u} = \sigma\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}} = (\sigma\mathbf{E} + \mathbf{A})\mathbf{x} + \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}},$$

где E — единичная матрица размером $n \times n$.

Получили описание системы управления в новых переменных:

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = (\sigma\mathbf{E} + \mathbf{A})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}. \qquad (8)$$