
ДИНАМИЧЕСКАЯ ЛОГИКА ЗНАНИЯ DK_{pr} : ЕЁ МЕТАЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ*

Е.Е. Ледников

Кафедра онтологии и теории познания
Факультет гуманитарных и социальных наук
Российский университет дружбы народов
Ул. Миклухо-Маклая, 10а, Москва, Россия, 117198

В статье показано, что авторская первопорядковая модальная логика знания DK_{pr} является непротиворечивой и полной, что для неё справедливы теоремы компактности, Левенгейма—Сколема и интерполяционная теорема Крейга.

Ключевые слова: динамическая логика, эпистемология, методология, металогика.

В большинстве философско-гносеологических концепций понятие знания используется для выражения итога, конечной цели познания. Но для характеристики *процесса* познания, движения по пути постижения истины, одного понятия знания недостаточно. Вот почему такие глубокие диалектики, как Сократ, Платон и И. Кант привлекали для характеристики познания и другие понятия. Сократ фактически предложил различать *степени* знания, Платон знанию противопоставлял *мнение*, а И. Кант, в дополнение к знанию, использовал понятия *мнения*, *веры*, *убеждённости* и *достоверности* [1. С. 98—99].

Нами было предложено характеризовать процесс достижения знания с помощью понятий убежденности, доказательства, веры, мнения, сомнения и опровержения [1. С. 99]. Но чтобы подобная картина познания приняла вид логически строгого философского дискурса, она должна быть дополнена соответствующей логикой, в рамках которой только и возможно её последовательное и непротиворечивое описание. Такая логика, названная нами DK_{pr} -логикой, была построена в виде исчисления гильбертовского типа и в виде аналитических таблиц в [2], а в [3] была предложена для неё семантика.

В настоящей работе исследуются металогические характеристики DK_{pr} -логики, прежде всего её полнота. Доказательство полноты осуществим для аналитикотабличной формулировки DK_{pr} -логики и для формулировки гильбертовского вида.

DK_{pr} -логика является первопорядковой модальной логикой и сформулирована в первопорядковом предикатном модальном языке PL_d . Данный язык содержит в качестве исходных дескриптивных символов счётное множество пропозициональных переменных, индивидуальных и предикатных переменных, а также логические символы $\{\sim, \&, \vee, \supset, \forall, \exists, =, K\phi, C\phi, G\phi, T\phi, B\phi, D\phi, R\phi\}$. Символами $K\phi$, $C\phi$, $G\phi$, $T\phi$, $B\phi$, $D\phi$, $R\phi$ обозначены личностные модальные операторы «субъект ϕ знает, что...», «субъект ϕ убеждён в том, что...», «субъект ϕ доказыва-

* Исследование выполнено при поддержке РГНФ, проект № 07-03-00335а.

ет (обосновывает), что...», «субъект φ верит, что...», «субъект φ полагает, что...», «субъект φ сомневается в том, что...», «субъект φ опровергает, что...» соответственно. Так что если A — произвольная формула классической логики предикатов, φ — индивидуальный символ для обозначения субъекта знания, убеждённости, доказывания, веры, мнения, сомнения или опровержения, то, $\text{C}\varphi A$, $\text{G}\varphi A$, $\text{T}\varphi A$, $\text{B}\varphi A$, $\text{D}\varphi A$, $\text{R}\varphi A$ и их отрицания — формулы рассматриваемой логики. Если F — формула вида $\Box A$ или её отрицание (где $\Box$ — один из модальных операторов DK_{pr} -логики), то все выражения вида $\text{K}\varphi F$, $(\forall x)F$, $(\exists x)F$ и их отрицания также являются формулами DK_{pr} -логики.

Пусть PL_d^* — расширение языка PL_d за счёт добавления счётного множества новых индивидуальных переменных. В качестве правил редукции в формулировке DK_{pr} -логики используются правила для α -, β -, γ -, δ -, ε -, ν -, π -типов формул. К правилам редукции классической пропозициональной логики (α -правилам и β -правилам [4. Р. 614]) добавляются правила для кванторов (γ -правила и δ -правила), правило для тождества (ε -правило) и правила для сильных (ν -правила) и слабых (π -правила) модальностей.

Правило удаления истинной формулы с внешним квантором общности и ложной формулы с внешним квантором существования:

$[\gamma/\gamma(z)]$, где z — произвольная индивидуальная переменная языка PL_d^* . Это правило многократного применения.

Правило удаления истинной формулы с внешним квантором существования и ложной формулы с внешним квантором общности:

$[\delta/\delta(z)]$, где z — новая индивидуальная переменная PL_d^* . Это правило однократного применения.

Правило удаления формулы с тождеством (подставимость тождественного): $[\varepsilon/\varepsilon_0] A(x, y), x = y/A(x, x)$.

Правила удаления сильных модальностей:

$[(K)\nu/\nu_0] \text{K}\varphi A/A$ — правило удаления для сильной эпистемической модальности;

правила удаления для сильных модальностей убеждённости $[(C)\nu/\nu_0]$, доказываемости $[(G)\nu/\nu_0]$, веры $[(T)\nu/\nu_0]$, мнения $[(B)\nu/\nu_0]$, сомнения $[(D)\nu/\nu_0]$ и опровержения $[(R)\nu/\nu_0]$ отсутствуют.

А вот как будут выглядеть правила удаления соответствующих слабых модальностей:

$[(K)\pi/\pi_0] \sim \text{K}\varphi A/\sim A$ (но сначала из столбца вычёркиваются все формулы, кроме $(K)\nu$ -формул);

$[(C)\pi/\pi_0] \sim \text{C}\varphi A/\sim A$ (но сначала из столбца вычёркиваются все формулы, кроме $(K)\nu$ -формул и $(C)\nu$ -формул, а $(C)\nu$ -формулы заменяют $(C)\nu_0$ -формулами);

$[(G)\pi/\pi_0] \sim \text{G}\varphi A/\sim A$ (но сначала из столбца вычёркиваются все формулы, кроме $(K)\nu$ -формул, $(C)\nu$ -формул и $(G)\nu$ -формул, а $(C)\nu$ -формулы и $(G)\nu$ -формулы заменяют $(C)\nu_0$ -формулами и $(G)\nu_0$ -формулами);

$[(T)\pi/\pi_0] \sim T\varphi A/\sim A$ (но сначала из столбца вычёркиваются все формулы, кроме $(K)v$ -формулы, $(C)v$ -формулы, $(G)v$ -формулы и $(T)v$ -формулы, а $(C)v$ -формулы, $(G)v$ -формулы и $(T)v$ -формулы заменяют $(C)v_0$ -формулами, $(G)v_0$ -формулами и $(T)v_0$ -формулами);

$[(B)\pi/\pi_0] \sim B\varphi A/\sim A$ (но сначала из столбца вычёркиваются все формулы, кроме $(K)v$ -формулы, $(C)v$ -формулы, $(G)v$ -формулы, $(T)v$ -формулы и $(B)v$ -формулы, а $(C)v$ -формулы, $(G)v$ -формулы, $(T)v$ -формулы и $(B)v$ -формулы заменяют $(C)v_0$ -формулами, $(G)v_0$ -формулами, $(T)v_0$ -формулами и $(B)v_0$ -формулами);

$[(R)\pi/\pi_0] \sim R\varphi A/\sim A$ (но сначала из столбца вычёркиваются все формулы, кроме $(D)v$ -формулы, а $(D)v$ -формулы заменяют $(D)v_0$ -формулами);

правило удаления слабой модальности сомнения $[(D)\pi/\pi_0]$ отсутствует.

Столбец аналитической таблицы является замкнутым, если он содержит формулу вида $\sim(x = x)$, либо пару формул вида $(A, \sim A)$, либо $(K\varphi A, D\varphi A)$, либо $(K\varphi A, R\varphi A)$, либо $(C\varphi A, D\varphi A)$, либо $(C\varphi A, R\varphi A)$, либо $(G\varphi A, D\varphi A)$, либо $(G\varphi A, R\varphi A)$, либо $(T\varphi A, D\varphi A)$, либо $(T\varphi A, R\varphi A)$.

В доказательстве полноты DK_{pr} -логики будем следовать стратегии, изложенной в [4. Р. 615—618]. Прежде всего, важным в этом доказательстве является модальное свойство непротиворечивости той или иной модальной логической теории.

Множество Σ непустых подмножеств формул $S_1, S_2, \dots, S_n$ языка PL_d образует DK_{pr} -свойство непротиворечивости, если для каждого $S \in \Sigma$, выполняются правила:

- (1.1) если A — атомарная формула, то неверно, что $A \in S$ и $\sim A \in S$;
- (1.2) если x — свободная переменная в некоторой ППФ из множества S , то $S \cup \{x = x\} \in \Sigma$;
- (2) если $\alpha \in S$, то $S \cup \{\alpha_1, \alpha_2\} \in \Sigma$;
- (3) если $\beta \in S$, то $S \cup \beta_1 \in \Sigma$ или $S \cup \beta_2 \in \Sigma$;
- (4) если $\gamma \in S$, то $S \cup \{\gamma(z)\} \in \Sigma$ для произвольной индивидуальной переменной z языка PL_d^* ;
- (5) если $\delta \in S$, то $S \cup \{\delta(z)\} \in \Sigma$ для новой индивидуальной переменной z языка PL_d^* ;
- (6) если $\varepsilon \in S$, $(x = y) \in S$, то $S \cup \{\varepsilon_0\} \in \Sigma$;
- (7) если $Kv \in S$, то $S \cup \{Kv_0\} \in \Sigma$;
- (8) если $K\pi \in S$, то $S_k \cup \{K\pi_0\} \in \Sigma$, где $S_k = \{v | Kv\}$;
- (9) если $C\pi \in S$, то $S_c \cup \{C\pi_0\} \in \Sigma$, где $S_c = \{v, v_0 | Kv, Cv_0\}$;
- (10) если $G\pi \in S$, то $S_g \cup \{G\pi_0\} \in \Sigma$, где $S_g = \{v, v_0 | Kv, Cv_0, Gv_0\}$;
- (11) если $T\pi \in S$, то $S_t \cup \{T\pi_0\} \in \Sigma$, где $S_t = \{v, v_0 | Kv, Cv_0, Gv_0, Tv_0\}$;
- (12) если $B\pi \in S$, то $S_b \cup \{B\pi_0\} \in \Sigma$, где $S_b = \{v, v_0 | Kv, Cv_0, Gv_0, Tv_0, Bv_0\}$;
- (13) если $R\pi \in S$, то $S_r \cup \{R\pi_0\} \in \Sigma$, где $S_r = \{v_0 | Dv_0\}$.

Моделью MDK_{pr} -логики будет структура $(U, H, W^k, W^c, W^g, W^t, W^b, W^d, W^r, R^k, R^\nabla, Val)$, где U — предметная область индивидов $a, b, c, d, \dots$ (универсум рассуждения), H — выделенный («реальный» мир), $W^k, W^c, W^g, W^t, W^b, W^d, W^r$ — множества миров (альтернатив) соответствующей индексу динамической модальности, R^k — отношение достижимости на W^k (на эпистемических альтернативах), R^∇ — отношение достижимости на альтернативах остальных видов модальностей, Val — функция приписывания значений выражениям языка PL_d (функция означивания). Отношение R^k обладает свойствами рефлексивности и транзитивности, на отношение R^∇ не наложено никаких ограничений.

Для каждой пары множеств миров W^k, W^∇ существует множество S такое, что $\{S\} = \{p, q, r, \dots, A_1, \dots, A_m\} = \{W^k_1\} \cap \{W^k_2\} \cap \dots \{W^k_j\}$ (где j — число элементов в W^k), причем $\{S\} \subseteq \{W^\nabla_i\}$ для произвольного возможного мира W^∇_i . Другими словами, множество S — это общая часть эпистемических альтернатив, которая является подмножеством множества высказываний произвольной альтернативы W^∇_i .

Охарактеризуем теперь с помощью определений функцию означивания Val :

Определение 1. $Val(x) = a \in U$, то есть любой индивидуальной переменной x эта функция сопоставляет некоторый индивид a из предметной области U .

Определение 2. $Val(P^n) = V(P^n) = \{\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle, \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle, \dots\}$, то есть любой n -местной предикатной переменной P^n функция Val сопоставляет объем V , состоящий из множеств упорядоченных n -ок индивидов из U .

Определение 3. $Val(A) = И$ или $Val(A) = Л$. Другими словами, любой формуле A языка PL_d функция Val сопоставляет семантический объект «истина» или семантический объект «ложь». Эту же мысль можно выразить как $M, W_i \models A$ или $M, W_i \not\models A$ — как выполнимость (соответственно, невыполнимость) формулы A в возможном мире W_i модели M (разумеется, при функции означивания Val , входящей в определение модели M). Отношение выполнимости $\models$ (соответственно, невыполнимости $\not\models$) определяется следующим образом:

1) для пропозициональной переменной p или её отрицания $\sim p$: $M, W_i \models p (\sim p)$, если $p (\sim p) \in W_i$;

2) для отрицания произвольного неэлементарного высказывания A , содержащего только те элементарные высказывания, которые принадлежат к W_i : $M, W_i \models \sim A$, если $M, W_i \not\models A$; $M, W_i \models A$, если $M, W_i \models A$;

3) для α -формул: $M, W_i \models \alpha$, если $M, W_i \models \alpha_1$ и $M, W_i \models \alpha_2$; $M, W_i \not\models \alpha$, если $M, W_i \not\models \alpha_1$ или $M, W_i \not\models \alpha_2$;

4) для β -формул: $M, W_i \models \beta$, если $M, W_i \models \beta_1$ или $M, W_i \models \beta_2$; $M, W_i \not\models \beta$, если $M, W_i \not\models \beta_1$ и $M, W_i \not\models \beta_2$;

5) для Kv -формул: $M, W_i^k \models Kv$, если $M, W_j^k \models Kv_0$ в каждом W_j^k таком, что $W_i^k R^k W_j^k$, иначе $M, W_i^k \not\models Kv$;

6) для ∇v -формулы: $M, W_i^\nabla \models \nabla v$, если $M, W_j^\nabla \models \nabla v_0$ в каждом W_j^∇ таком, что $W_i^\nabla R^\nabla W_j^\nabla$, иначе $M, W_i^\nabla \not\models \nabla v$ (1);

7) для $K\pi$ -формулы: $M, W_i^k \models K\pi$, если $M, W_j^k \models K\pi_0$ в некотором W_j^k таком, что $W_i^k R^k W_j^k$, иначе $M, W_i^k \not\models K\pi$;

8) для $\nabla\pi$ -формулы: $M, W_i^\nabla \models \nabla\pi$, если $M, W_j^\nabla \models \nabla\pi_0$ в некотором W_j^∇ таком, что $W_i^\nabla R^\nabla W_j^\nabla$, иначе $M, W_i^\nabla \not\models \nabla\pi$ (2);

9) для элементарной формулы исчисления предикатов $P^n(x_1...x_n)$: $M, W_i \models P^n(x_1...x_n)$, если $Val(x_1), ..., Val(x_n) \in V(P^n)$, в противном случае $M, W_i \not\models P^n(x_1...x_n)$.

10) для γ -формулы: $M, W_i \models \gamma$, если $M, W_i \models \gamma(z)$ для всех z из W_i , иначе $M, W_i \not\models \gamma$;

11) для δ -формулы: $M, W_i \models \delta$, если $M, W_i \models \delta(z)$ для некоторого z из W_i , иначе $M, W_i \not\models \delta$.

Высказывание A общезначимо ($\models A$), если $M, H \models A$ во всех своих моделях M .

Приведем далее ключевые моменты доказательства по методу М. Фиттинга.

1. Пусть множество Σ представляет собой DK_{pr} -свойство непротиворечивости, замкнутое относительно объединения цепей. Пусть $S_0 \in \Sigma$, а D_0 представляет собой множество индивидных символов из S_0 . Пусть $\{d_1, d_2, d_3, \dots\}$ — счётное множество индивидных символов, не входящих в D_0 , а $D = D_0 \cup \{d_1, d_2, d_3, \dots\}$. Тогда для S_0 существует расширение $S \in \Sigma$, насыщенное вниз относительно D (иначе говоря, модельное множество Хинтикки относительно D).

2. Пусть Σ представляет собой DK_{pr} -свойство непротиворечивости, замкнутое относительно объединения цепей, а S — множество высказываний в языке PL_d , такое, что $S \in \Sigma$. Тогда, используя Σ , можно построить для S модель (в частности, такова предложенная нами модель $M = (U, H, W^k, W^c, W^g, W^t, W^b, W^d, W^r, R^k, R^\nabla, Val)$, в которой S — выполнимо (3).

Теорема о существовании модели позволяет установить полноту DK_{pr} -логики в аксиоматической и табличной формулировке. Так, в первом случае, достаточно установить, что совокупность множеств формул, непротиворечивых в смысле аксиоматической системы DK_{pr} -логики, образует DK_{pr} -свойство непротиворечивости. Рассмотрим некоторую формулу вида $\sim A$ из языка PL_d , не являющуюся противоречием. Тогда, очевидно, формула A не будет доказуема в DK_{pr} -логике. Но поскольку формула $\sim A$ непротиворечива, она, по теореме М. Фиттинга, выполнима. Мы приходим к следующему условному высказыванию: если формула A недоказуема, то формула $\sim A$ выполнима. Откуда, по закону контрапозиции, следует: если формула $\sim A$ невыполнима (то есть если $\models A$), то формула A доказуема ($\vdash A$). Сходное рассуждение справедливо и для табличной формулировки DK_{pr} -логики,

если принять во внимание, что множество высказываний языка PL_d является непротиворечивым в том случае, когда ни одна аналитическая таблица для них не является замкнутой.

Как известно, из теоремы М. Фиттинга можно извлечь также доказательство теорем компактности, Лёвенгейма—Сколема и интерполяционной теоремы Крейга. Образцы доказательств можно найти в работе [4. Р. 619].

Подведём некоторые итоги. Предложенная нами DK_{pr} -логика обладает не только важными для любой формализованной теории металогическими свойствами, но, что не менее значимо, установленные в ней логические отношения между модальностями, характеризующими этапы, ступени получения знания, находятся в полном согласии с интуитивными представлениями об этих понятиях. Так, вполне естественно, что субъекту познания ϕ (можно сказать и по-другому — исследователю ϕ) известны все его умственные состояния, возникающие на пути достижения знания. Другими словами, если субъект ϕ сомневается в некотором тезисе A , опровергает, полагает его и т.д., то он обязательно знает об этом. Не менее естественной является и упорядоченность всех модальных понятий по их дедуктивной силе, при которой самым сильным является знание, а самым слабым — сомнение. Разумеется, данная логика не подменяет философскую теорию познания как характеристику процесса достижения объективной истины, но может быть для неё полезным подспорьем, придавая философским рассуждениям необходимую логическую строгость и последовательность.

ПРИМЕЧАНИЯ

- (1) Разумеется, знак ∇ означает здесь определённый вид сильной модальности, отличной от сильной модальности знания, а не произвольную сильную модальность.
- (2) Знак ∇ означает здесь определённый вид слабой модальности, отличной от слабой модальности знания, а не произвольную слабую модальность.
- (3) Мы считаем излишним воспроизводить детали доказательства этих двух тезисов, поскольку они с точностью до несущественных различий совпадают с доказательством М. Фиттинга в отношении алетических модальных систем [4. Р. 617—618].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ледников Е.Е. Возможность и предпосылки динамической концепции знания // Вестник РУДН. Серия Философия. — 2008. — № 3. — С. 98—102.
- [2] Ледников Е.Е. Об одном варианте динамической логики знания // Логические исследования. — М.: Наука, 2007. — Вып. 14. — С. 218—223.
- [3] Ледников Е.Е. Семантика первопорядковой динамической логики знания // Логические исследования. — М.: Наука, 2009. — Вып. 15. — С. 129—136.
- [4] *Fitting Melvin*. Model existence theorems for modal and intuitionistic logics // The journal of symbolic logic. — 1973. — V. 36. — N. 4, Dec. — P. 613—627.

DYNAMIC LOGIC OF KNOWLEDGE DK_{pr} : ITS METALOGICAL PROPERTIES

E.E. Lednikov

Department of Ontology and Epistemology

Faculty of Humanities and Social Sciences

Russian People's Friendship University

Miklucho-Maklay Str., 10a, Moscow, Russia, 117198

The paper shows that the author's first order modal logic of knowledge DK_{pr} is consistent and complete, that compactness theorem, Lowenheim—Skolem theorem and Craig interpolation theorem may be true of it.

Key words: dynamic logic, epistemology, methodology, metalogic.