УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЦАГИ

Том XII 1981 № 1

УДК 533.6.011

РАСЧЕТ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НАГРУЗОК, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ПОВЕРХНОСТЬ ДВИЖУЩЕГОСЯ КЛИНА ПРИ ПАДЕНИИ НА НЕГО УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Р. Я. Тугазаков

В работе приведены результаты расчетов величины максимального давления на поверхности движущегося клина при падении на него ударной волны. Для случая, когда интенсивности головной волны и падающего скачка равны, получена зависимость величины давления на теле от интенсивности падающей волны и угла падения. В рамках гиперзвуковой теории малых возмущений исследовано влияние контактного разрыва на распределение величины давления по поверхности клина. Отмечено, что уменьшение показателя адиабаты ведет к усилению нестационарных эффектов.

1. В работе [1] рассмотрена автомодельная задача о падении ударной волны на клин конечной толщины, движущийся со сверхзвуковой скоростью. При определенных углах падения, когда еще не реализуется маховское отражение, вычислены параметры газа в области взаимодействия волн. Анализ течения проведен для случая, когда давления в головном скачке уплотнения и в падающей ударной волне одинаковы. Это упрощает процесс взаимодействия и позволяет рассчитать параметры газа на поверхности движущегося тела по точным формулам соотношений на скачках. При этом обнаружена слабая зависимость максимальной величины давления в области *4* (см. рис. 1, *а*, где *BD* —

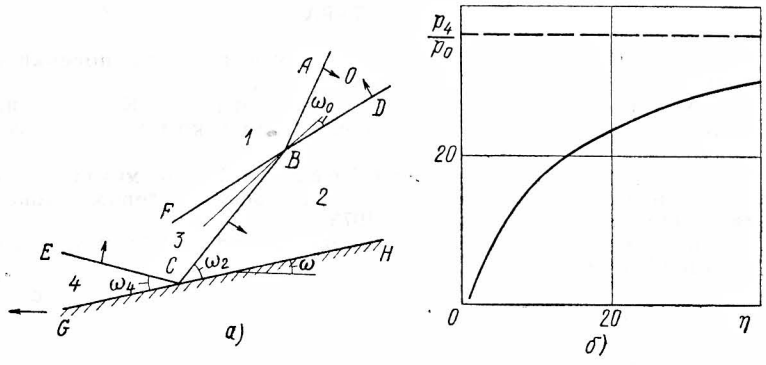


Рис. 1

первоначальный головной скачок, AB — падающая волна, GH — поверхность движущегося клина, BC и BF — преломленные головной скачок и падающая волна, CE — отраженная от поверхности тела падающая волна, ω, ω_0, ω_2, ω_4 — углы клина и скачков, образуемых в результате взаимодействий) от величины угла падения. Используя этот факт, получим приближенные аналитические формулы для величины давления на поверхности движущегося тела при падении на него ударной волны. Рассмотрим случай, когда интенсивности падающей волны AB и головного скачка BD одинаковы; тогда величину давления p_4 можно получить из соотношений, описывающих отражение косого скачка от стенки [2, 3].

Пусть отраженная ударная волна исходит из точки B, и угол падающего скачка равен ω_2. Тогда угол отраженного скачка $\omega_4 = \operatorname{arctg} \tau_4^2$ находится из уравнения

$$A\tau_4^2 + B\tau_4 + C = 0, \tag{1}$$

где

$$A = s\,[(h^2-1)\,s - (h^2-2)]\;(\tau_2^2+1) - 1 = a\tau_2^2 + b;$$

$$B = -(h^2-1)\,\tau_2\,[s^2(\tau_2^2+1) - 1] = c\tau_2^3 + d;$$

$$C = h^2\,[s(\tau_2^2+1) - 1] = e\tau_2^2 + f; \qquad s = \frac{h^2\eta + 1}{(h^2-1)(\eta-1)};$$

$$\tau_2 = \operatorname{ctg}\omega_2; \quad h^2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}; \quad \eta = \frac{p_1}{p_0}.$$

Интенсивность отраженного скачка $\bar{\eta} = p_3/p_1$ в зависимости от интенсивности падающего скачка η и угла падения ω_2 можно определить из формулы

$$\frac{\tau_4(\tau_2+1)\,s - (\tau_2+\tau_4)}{\tau_2(\tau_4+1)} = \frac{h^2+\bar{\eta}}{(h^2-1)(\bar{\eta}-1)}. \tag{2}$$

Для получения величины давления в области *4* необходимо еще раз использовать формулы отражения (1), (2) в точке C, где интенсивность начального падающего скачка BC равна $\bar{\eta}$. Здесь предполагается, что полуугол, образуемый ударными волнами в точке B, равен углу падения скачка BC на поверхность тела.

Так как результирующее давление слабо зависит от угла падения при малых и средних его значениях (см. работу [1]), то из формул (1), (2) при $\tau_2 \gg 1$ имеем соотношения

$$\frac{\tau_4}{\tau_2} = a_1 + b_1\frac{1}{\tau_2^2} + \ldots, \qquad \bar{\eta} = a_2 + b_2\frac{1}{\tau_2^2} + \ldots,$$

где

$$a_1 = -\frac{c}{a}; \quad b_1 = \left(\frac{e}{c} + \frac{b_c}{a^2}\right);$$

$$a_2 = \frac{(h^2+2)\,\eta - 1}{h^2+\eta}; \quad b_2 = -(h^4-1)\,\frac{s(a_1-b_1) - (1+a_1) - s}{a_1^3}.$$

Величину давления в области *4* ищем по формуле

$$\frac{p_4}{p_0} = \eta\bar{\eta}\,\frac{(h^2+2)\,\bar{h}-1}{h^2+\bar{\eta}} + \bar{b}_2\left[1 + \left(\frac{h^2+1}{\bar{h}^2+2}\right)^2\right]\frac{1}{\tau_2^2} + \ldots; \tag{3}$$

здесь p_0 соответствует давлению в невозмущенной области; $\bar{b}_2$ получается из b_2 заменой η на $\bar{\eta}$.

Из формулы (3) следует, что величина давления действительно слабо зависит от угла падения набегающей ударной волны. В разложении в ряд данной функции по величине угла отсутствует линейный член. Формула (3) верна и для больших интенсивностей падающих волн η. В этом случае величина давления на теле

$$\frac{p_4}{p_0} = \eta\left\{\frac{(h^2+2)\,(h^2+3)}{2} + \frac{\text{const}}{\tau_2^2} + \ldots\right\}.$$

Для $\gamma = 1{,}4$ при малых углах ω_2 предельное давление на теле возрастает в 36 раз, что соответствует известному результату, когда сильная ударная волна падает на движущийся с большой скоростью поршень [4]. Кроме того, оценка порядка компонентов возмущенных скоростей, направленных по направлению движения тела и перпендикулярно ему, показывает, что они имеют соответственно порядки ω^2 и ω. Это говорит о применимости в данной задаче гиперзвукового закона плоских сечений.

Влияние интенсивности падающего скачка η на коэффициет увеличения давления приведено на рис. 1, *б*. Сравнение результатов, полученных по формуле (3) и численному расчету работы [1], дано в таблице, где $(p_4/p_0)_3$ — величина давления, полученная по формуле (3); p_4/p_0 — величина давления, взятая из [1].

γ	η	$\bar{\eta}$	$(p_4/p_0)_3$	p_4/p_0
1,4	5	3,54	50,7	50,9
1,4	7,1	4,26	97,3	97,6
1,1	7,1	5,78	201,4	203

Из данных таблицы следует, что формула (3) с большой точностью описывает величину максимального давления на поверхности тела. При этом необходимо отметить, что (3) хорошо описывает величину давления при $\gamma = 1{,}1$, так как первый член разложения в формуле (3) является главным и при предельном переходе $\gamma \to 1$.

2. В случае, когда интенсивности взаимодействующих волн различны, в результате первого взаимодействия появляется контактный разрыв, который усложняет картину течения. Для решения задачи используем гиперзвуковой закон плоских сечений, который, как известно, справедлив, если число $M \gg 1$, параметр ω, характеризующий относительную толщину тела, мал, но величина $M\omega$ — порядка единицы. В данной задаче, когда наклоны головного скачка и падающей волны равны между собой и составляют малый угол с направлением движения основного потока, выполняется закон плоских сечений, и задача о падении ударной волны на клин, движущийся с большой сверхзвуковой скоростью, сводится к одномерной нестационарной задаче о столкновении ударной волны с поршнем, движущимся с постоянной скоростью. Но оказывается, что закон плоских сечений выполняется и когда взаимодействующие волны пересекаются под некоторым углом, не превышающим характерный угол ω. В этом случае, как следует из формулы (3), параметры газа совпадают с данными, полученными при лобовом столкновении волн с точностью до членов порядка ω^2, т. е. находятся в пределах точности теории малых возмущений. Рассмотрим ту сторону клина, на которую падает волна.

В соответствии с гиперзвуковым законом плоских сечений будем следить за движением газа в отдельных плоских сечениях $A'B'$, перпендикулярных основному движению (см. рис. 2, *а*). Поверхность клина будет соответствовать поршню, движущемуся со скоростью $u_p = u\omega$, перед которым движется созданная им ударная волна с интенсивностью $\eta_2 = p_2/p_0$. Навстречу этой волне движется падающая ударная волна, отношение давлений на которой равно $\eta_1 = p_1/p_0$.

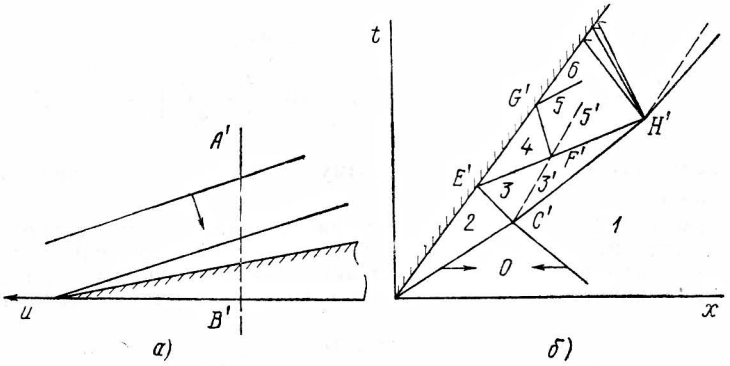


Рис. 2

В области O газ покоится. В областях 3 и $3'$ параметры газа находятся по известным величинам в областях 1 и 2 из формулы

$$\frac{(h^2+1)}{(h^2-1)}\frac{u_p}{a_0}+\frac{\eta_1-1}{(1+h^2\eta_1)^{1/2}}=\left(\frac{h^2+\eta_1}{1+h^2\eta_1}\right)^{1/2}\frac{\eta_3-\eta_1}{(\eta_1+h^2\eta_3)^{1/2}}+$$
$$+\left(\frac{h^2+\eta_2}{1+h^2\eta_2}\right)^{1/2}\frac{\eta_3-\eta_2}{(\eta_2+h^2\eta_3)^{1/2}},$$

где величины давлений в рассматриваемых областях отнесены к величине p_0 в невозмущенном потоке, a_0 — скорость газа в невозмущенном потоке. Уравнение решается методом итераций.

После взаимодействия в точке C' преломленная падающая волна отражается от поверхности поршня в точке E'. В точке F' происходит взаимодействие волны $E'F'$ с контактным разрывом. Нахождение газодинамических параметров в областях 5 и $5'$ осуществляется по известным формулам распада произвольного разрыва, которые позволяют проанализировать картину течения в точке F'.

На рис. 3 приведено значение давления на поверхности поршня в зависимости от времени при различных величинах интенсивностей головной и падающей волн. На рис. 3, *а* рассмотрен случай, когда интенсивность $p_2<p_1$. В этом случае в точке F' реализуются ударные волны $F'H'$ и $F'G'$, разделенные контактным разрывом. Давление в области 6 находится по формуле

$$\frac{p_6}{p_5}=\frac{(h^2+2)\,p_5/p_4-1}{h^2+p_5/p_4}. \qquad (4)$$

Как показывают расчеты, возникающая в точке H' волна разрежения понижает давление до величины, близкой к стационарной.

Определим влияние интенсивности контактного разрыва на распределение максимального давления на поверхности поршня. Для указанного на рис. 3, *а* режима обтекания величина максимального давления продолжает возрастать в области 6 за счет отражения ударной волны $G'F'$ от контактной поверхности. На рис. 3, *б* приведена зависимость максимального давления от времени на поверхности поршня при значениях $p_2>p_1$. В этом случае волна $F'G'$ является волной разрежения. Величина максимального давления начинает падать в области 6. Изменение давления на поверхности поршня в случае, когда $p_2=p_1$, представлено на рис. 3, *в*. Контактная поверхность $C'F'$ отсутствует, и значения давления в областях 4 и 6 совпадают. Падение максимального давления начинается только в волне разрежения, выходящей из точки H'.

Таким образом, в зависимости от интенсивностей взаимодействующих волн процесс установления стационарного течения качественно различен. В случае *а* максимальное давление на поверхности тела устанавливается не сразу, в то время как в случаях *б* и *в* на поверхности тела сначала возникает максимальная нагрузка, которая затем убывает до стационариого значения (см. рис. 3). Здесь следует отметить, что величины максимальных значений давления в областях 4 и 6 для режимов *а*, *б*, *в* различны ($\gamma=1{,}4$).

Следует отметить заметное количественное влияние интенсивности взаимодействующих волн и величины параметра γ на изменение давления в сжатом слое. В случае, когда $p_1>p_2\gg 1$ и $\gamma=1{,}1$ (см. рис. 3, *г*), величина давления в области 6 в два раза больше, чем в области 4.

Величина максимального давления в области 6 в несколько раз превышает стационарное значение.

На рис. 4 дана зависимость интенсивности волны $F'G'$ (p_6/p_4) от значения давления p_1 при некоторых значениях параметра γ. Величина p_2 в этом случае равна 45. Видно, что при $p_1=10$ реализуется волна разрежения, которая умень-

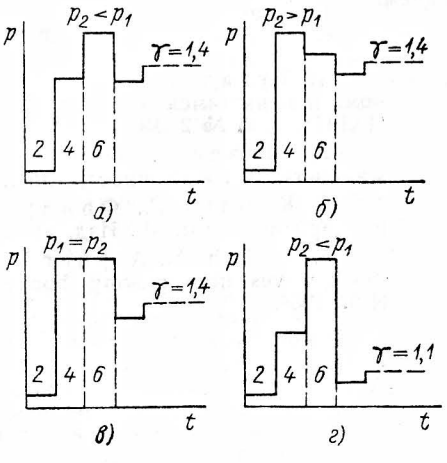


Рис. 3

шает давление до 40%. В случае $p_1 > 45$ волна $F'G'$ является ударной. Рост p_1 и уменьшение величины γ приводят к возрастанию интенсивности отраженной от контактной поверхности ударной волны $F'G'$. Этот же результат получен численно в [1].

На рис. 4 представлена также величина $p_{ст}/p_6$ в зависимости от интенсивности падающей волны p_1. Кривые характеризуют отличие максимального давления, возникающего в области *6*, от установившегося в процессе взаимодействия значения давления $p_{ст}$. Это отличие особенно существенно при больших интенсивностях взаимодействующих волн и малой величине $(\gamma - 1)$. В случае $\gamma = 1{,}1$ и $p_1 \approx 1000$ сила, действующая на единицу площади поверхности тела в начальный момент взаимодействия, в четыре раза больше, чем при установившемся обтекании, т. е. первоначально процесс взаимодействия существенно нестационарен. На клин, летящий со сверхзвуковой скоростью, в начальный момент падения ударной волны действует сильная боковая сила.

На рис. 5 представлены расчетные величины p_2 в зависимости от значения p_1 при условии $p_{ст}/p_1 = p_2/p_0$. Этот случай интересен тем, что соответствует

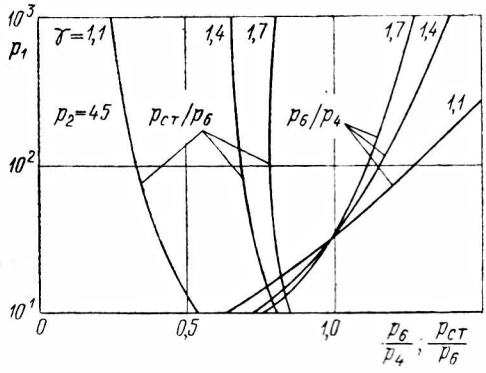


Рис. 4

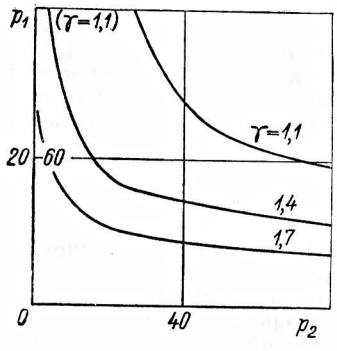


Рис. 5

течению газа, когда число M установившегося потока равно числу M первоначально набегающего на тело газа. При этих условиях после взаимодействия падающей ударной волны с движущимся со сверхзвуковой скоростью клином положение нового головного скачка будет совпадать со старым. Установившееся значение давления находится по формуле $p_{ст} = \frac{p_1 p_2}{p_0}$.

Пользуясь данными рис. 5, можно рассчитать результирующее давление на теле. Так, из рис. 5 для $\gamma = 1{,}4$ при $p_1 = p_2$ имеем, что $p_1 \approx 18$. Затем, вычислив величину p_4 по формуле (3), имеем $p_4/p_{ст} = 1{,}30$. Максимальная величина давления в области *4* на 30% выше того значения, которое установится со временем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тугазаков Р. Я. Взаимодействие ударной волны с клином, движущимся со сверхзвуковой скоростью. „Ученые записки ЦАГИ", т. 2, № 2 1971.

2. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М., Изд. иностр. лит., 1961.

3. Курант Р., Фридрикс К. О. Сверхзвуковое течение и ударные волны. М., Изд. иностр. лит., 1961.

4. Ralph A., Alpher R. and Rubin I. Normal reflection of shock waves from moving boundaries, „J. Applied Physics", vol. 25, N 3, 1954.

Рукопись поступила 10/X 1979 г.