Иванов Д.Ю. ©
К. ф.-м. н., доцент, кафедра “Высшая математика”,
Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ)

ЭКОНОМИЧНЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ, РАЗРЕШАЮЩИХ НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ПРЯМЫХ ЦИЛИНДРАХ

Аннотация

Рассматривается экономичный метод вычисления сеточных операторов, разрешающих начально-краевые задачи для однородного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами в цилиндрической области, с нулевыми начальными условиями и граничными условиями на основаниях и неоднородными граничными условиями на боковой поверхности цилиндра. Экономия достигается за счет вычисления операторов в алгебре полиномов, образованных степенями пространственно-временного полугруппового оператора, а также разделения вычислений по пространственным переменным вдоль образующей и основания цилиндра. Доказана сходимость и устойчивость метода, получены порядки аппроксимации относительно шагов дискретизации по различным переменным. Доказана устойчивая однозначная разрешимость специфических граничных интегральных уравнений в пространствах функций различной гладкости.

Ключевые слова: векторный потенциал, граничное интегральное уравнение, операторный метод, метод граничных элементов, метод Фурье, линейная теплопроводность, полугруппа операторов, прямой цилиндр.

Keywords: vector potential, boundary integral equation, operator method, boundary element method, Fourier method, linear heat conduction, semigroup of operators, straight cylinder.

1. Введение

В настоящей работе рассматривается операторный метод численного решения начально-краевых задач для однородного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами в цилиндрической области $\Omega\times I_Y$ на конечном временном промежутке $\overline{I}_T$ (здесь $I_T=\left(0,T\right]$, $I_Y=\left(0,Y\right)$; $\Omega=\Omega^+$ или $\Omega=\Omega^-$, Ω^+ — плоская открытая ограниченная односвязная область, $\Omega^-=\mathbf{R}^2\setminus\overline{\Omega^+}$, $\mathbf{R}=\left(-\infty,+\infty\right)$). Задачи решаются с нулевыми начальными условиями, неоднородными граничными условия первого или второго рода на боковой поверхности цилиндра и нулевыми граничными условия первого, второго или третьего рода на основаниях цилиндра. Для численного решения таких задач применимы три известных подхода: метод граничных элементов (МГЭ), метод конечных элементов и метод конечных разностей. Для получения сеточного оператора, разрешающего задачу в фиксированной точке цилиндрической области, более предпочтительным с точки зрения экономии вычислений является МГЭ, в рамках которого приходится исключать промежуточные величины в узлах на поверхности цилиндра, а не в прилегающей к ней трехмерной области, как в остальных двух методах. Заметим, что использование готовых разрешающих операторов дает ощутимую экономию при получении решения в небольшом количестве точек по сравнению, например, с методом Гаусса, применяемого в рамках МГЭ. Кроме того, наличие готовых разрешающих операторов необходимо для реализации различных методов численного решения обратных граничных задач теплопроводности, например, градиентных [1,150].

Вычисление сеточного оператора, разрешающего трехмерное по пространственным координатам граничное интегральное уравнение (ГИУ) в рамках МГЭ, требует значительных затрат. В работе [2] предложен экономичный метод вычисления операторов, разрешающих рассматриваемые здесь задачи в цилиндре. Экономия достигается благодаря разделению

© Иванов Д.Ю., 2014 г.

вычислений по переменным $x \in \partial\Omega$ ($\partial\Omega$ — граница области Ω) и $y \in I_Y$ и проведению вычислений в алгебре полиномов, образованных степенями некоторого полугруппового оператора. Коэффициенты полиномов — операторы в пространстве функций, заданных на множестве $\partial\Omega$; полугрупповой оператор действует в пространстве функций на множестве $I_Y \times I_T$. Те же коэффициенты полиномов получаются при вычислении операторов, разрешающих соответствующие рассматриваемым задачам в цилиндре задачи в плоской области Ω, но при этом полиномы образованы степенями полугруппового оператора в пространстве функций на множестве I_T. Основанием для разделения переменных служит аналитический метод решения рассматриваемых здесь задач в цилиндре, являющийся комбинацией метода ГИУ и метода Фурье [3]. При этом ГИУ являются двумерными в том смысле, что определяемые ими векторные потенциалы заданы на плоском множестве Ω, так что сами ГИУ решаются на его границе $\partial\Omega$. Коэффициенты полиномов получаются при решении соответствующих “плоских” задач на основе МГЭ. Заметим также, что кроме экономичности, преимуществом предложенного в [2] подхода является использование одномерных граничных элементов вместо двумерных. Наконец, полученные разрешающие операторы, имеющие вид полиномов, могут быть использованы для экономичного и устойчивого численного решения обратных граничных задач теплопроводности на основе канонической факторизации таких полиномов [4-5].

В настоящей работе проведено теоретическое обоснование эффективности одной из реализаций метода [2]: в параграфе 4 для разрешающих сеточных операторов доказана сходимость и установлены порядки аппроксимации относительно шагов дискретизации по различным переменным при определенных условиях гладкости граничной функции и контура $\partial\Omega$, обоснована устойчивость метода. В параграфе 3 доказана устойчивая однозначная разрешимость ГИУ в пространствах функций различной гладкости, используемая при доказательствах в параграфе 4. Заметим, что в работе [6] исследовалась сходная проблема для задачи Неймана для n-мерного уравнения теплопроводности. Но, во-первых, в настоящей работе рассматриваются специфические ГИУ с ядром, выраженным не только через временну́ю полугруппу, как в классических ГИУ задач теплопроводности, но и через пространственную полугруппу. Во-вторых, в работе [6] не указаны достаточные условия гладкости граничной поверхности. В то же время здесь исследовано лишь двумерное ГИУ.

По сравнению с работой [2] алгоритм, описанный в настоящей работе, допускает избыточное измельчение шага по параметру полугруппы по сравнению с шагом по времени. Это позволяет добиться большей вычислительной точности без уменьшения шага по времени. Попутно с задачами в цилиндре в параграфах 3 и 4 получены аналогичные результаты и для соответствующих “плоских” задач, причем в случае равенства шагов по параметру полугруппы и по времени предлагаемый алгоритм совпадает для “плоских” задач с обычным МГЭ в непрямой фомулировке.

В заключение параграфа 4 продемонстрирован значительный выигрыш по экономичности, который дает предлагаемый метод по сравнению с классическими МГЭ на основе трехмерных ГИУ [7,184]. В параграфе 5 приведены результаты вычислительных экспериментов, которые подтверждают экономический выигрыш. Кроме того, проведено численное сравнение с методом [8], также основанном на аналитическом методе решения задач в цилиндре [3], но в рамках которого разрешающие операторы вычисляются в алгебре полиномов, образованных степенями полугруппового оператора в пространстве функций на множестве I_T.

2. Предварительные сведения и замечания

Пусть $\partial\Omega$ — кривая класса C^2. Рассмотрим четыре краевые задачи ($i = 1, 2$):

$$a^2 \Delta \mathbf{u}_i^{\pm} = B \mathbf{u}_i^{\pm} \ (x \in \Omega^{\pm}), \quad \mathbf{u}_1^{\pm}|_{x \in \partial\Omega} = \mathbf{w}_1^{\pm}, \quad \partial_{\mathbf{n}} \mathbf{u}_2^{\pm}|_{x \in \partial\Omega} = \mathbf{w}_2^{\pm}, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{u}_i^{\pm} = \mathbf{u}_i^{\pm}(x)$ и $\mathbf{w}_i^{\pm} = \mathbf{w}_i^{\pm}(x)$ $(i = 1,2)$ — векторные функции со значениями в пространстве $L_2 = L_2(I_Y \times I_T)$, заданные на множествах Ω и $\partial\Omega$, соответственно (все вводимые здесь пространства функций считаем комплексными); $\mathbf{n}$ — нормаль к кривой $\partial\Omega$ в точке x, направленная внутрь области Ω^+; $\Delta = \partial^2_{x_1 x_1} + \partial^2_{x_2 x_2}$ (непрерывность и дифференцируемость векторных функций предполагается здесь в норме пространства их значений); $a > 0$ — коэффициент температуропроводности. Замкнутый оператор B определен в пространстве L_2 на множестве $D(B_t) \cap D(B_y)$ как $B = B_t + B_y + p$. Здесь B_t — замкнутый оператор в $L_2(I_T)$: $(B_t \mathbf{f})(t) = f'(t)$, заданный на абсолютно непрерывных на $\overline{I}_T$ функциях $f(t) \in L_2(I_T)$, таких, что $f(0) = 0$; B_y — замкнутый оператор в $L_2(I_Y)$: $(B_y \mathbf{f})(y) = -a^2 f''(y)$, заданный на абсолютно непрерывно дифференцируемых на $\overline{I}_Y$ функциях $f(y) \in L_2(I_Y)$, таких, что $f'(0) - h_0 f(0) = f'(Y) + h_Y f(Y) = 0$ $(0 \le h_0, h_Y \le \infty)$; $p + \mu_1 > 0$, где μ_1 — наименьшее собственное значение оператора B_y. Заметим, что в настоящей работе рассматриваются только линейные пространства и операторы.

В работе [3] доказана однозначная разрешимость задач (2.1) в классе $C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ при любых $\mathbf{w}_i^{\pm} \in C(\partial\Omega)$ ($C(\Omega')$ и $C^m(\Omega')$ — пространства непрерывных и m раз непрерывно дифференцируемых векторных функций со значениями в L_2). Решения имеют вид векторных потенциалов — криволинейных интегралов первого рода:

$$\mathbf{u}_1^{\pm}(x) = G_1(x)\mathbf{v}_1^{\pm} = \int_{\partial\Omega} \partial_{\mathbf{n}_1} K(r)\, \mathbf{v}_1^{\pm}(x')\, ds', \quad \mathbf{u}_2^{\pm}(x) = G_2(x)\mathbf{v}_1^{\pm} = \int_{\partial\Omega} K(r)\, \mathbf{v}_2^{\pm}(x')\, ds' \qquad (2.2a)$$

($x \in \Omega$), где функция $\mathbf{v}_i^{\pm}(x)$ находится из соответствующего ГИУ:

$$G_i^{\pm}\, \mathbf{v}_i^{\pm} = \mathbf{w}_i^{\pm}, \qquad (2.2b)$$

$$G_i^{\pm} = \mp(-1)^i 2^{-1} + G_i, \quad (G_i \mathbf{f})(x) = \int_{\partial\Omega} \partial_{\mathbf{n}_i} K(r)\mathbf{f}(x')\, ds' \quad (x \in \partial\Omega). \qquad (2.2c)$$

Для уравнений (2.2b) доказана однозначная разрешимость в пространствах $L_2^{\times} = L_2(\partial\Omega \times I_Y \times I_T)$ и $C(\partial\Omega)$ для любой правой части (см. теорему 11 [3]). Здесь $r = |x - x'|$, $\mathbf{v}_i^{\pm}(x)$ — векторная функция со значениями в L_2, определенная на $\partial\Omega$; $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}$ — нормали к кривой $\partial\Omega$, проходящие через точки x' и x, соответственно, и направленные внутрь области Ω_+; дифференцирование $\partial_{\mathbf{n}_1}$ и $\partial_{\mathbf{n}_2}$ осуществляется по точкам x' и x, соответственно; $K(r)$ ($r > 0$) — ограниченные операторы в пространстве L_2, определяемые равенствами:

$$K(r)\mathbf{f} = \int_{I_T} a(r,\tau) U(\tau)\mathbf{f}\, d\tau \quad (\mathbf{f} \in L_2),$$

где $a(r,\tau) = (4\pi\tau)^{-1} \exp\left[-r^2/(4a^2\tau)\right]$, $U(\tau) = U_t(\tau) U_y^p(\tau)$, $U_y^p(\tau) = e^{-p\tau} U_y(\tau)$. Операторы $U_t(\tau)$ образуют C_0-полугруппу, порождаемую оператором B_t: $(U_t(\tau)\mathbf{f})(t) = f(t-\tau)$ при $\tau < t$. Операторы $U_y(\tau)$ образуют C_0-полугруппу, порождаемую оператором B_y:

$$(U_y(\tau)\mathbf{f})(y) = \int_{I_Y} h(y, y', \tau)\, f(y')\, dy' \quad (\mathbf{f} \in L_2(I_Y),\ \tau > 0), \qquad (2.3)$$

где $h(y, y', \tau) = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(y)\, \psi_j(y') \exp(-\mu_j \tau)$, при этом μ_j — собственные значения оператора B_y ($0 \le \mu_1 < \mu_2 < \ldots$, $\mu_1 = 0$ лишь при $h_0 = h_Y = 0$), $\psi_j(y)$ —соответствующие собственные функции, нормированные в $L_2(I_Y)$. Заметим, что $\|U_t(\tau)\| = 1$ при $\tau < T$, $U_t(\tau) = 0$ при $\tau \ge T$ и $\|U_y(\tau)\| \le \exp(-\mu_1 \tau)$. Поэтому $\|U(\tau)\| \le \exp\left[-(p + \mu_1)\tau\right] \le 1$, $U(\tau) = 0$ при $\tau \ge T$. Таким образом, все рассматриваемые C_0-полугруппы сжимающие, а $U_t(\tau)$ и $U(\tau)$ — нильпотентные.

Наряду с задачами в прямом цилиндре $\Omega\times I_Y$ здесь рассматриваются и соответствующие "плоские" задачи в области Ω. Последние допускают аналогичную формулировку на основании уравнений (2.1), где $B=B_t+p$ ($p>0$) — операторы в пространстве $L_2=L_2(I_T)$, обладающие сходными свойствами с операторами $B=B_t+B_y+p$ ($p>-\mu_1$). Решения "плоских" задач также однозначно определяются равенствами (2.2) в соответствующих пространствах, при этом полугруппу $U_t(\tau)U_y^p(\tau)$ заменяем на полугруппу $e^{-p\tau}U_t(\tau)$, также сжимающую и нильпотентную. Вследствие этого основные результаты, полученные ниже (теоремы 1-9 и следствия 1-3), справедливы для задач (2.1) как в цилиндре, так и в плоской области.

3. Разрешимость граничных интегральных уравнений в пространствах дифференцируемых функций

Введем в рассмотрение параметрические уравнения кривой $\partial\Omega$: $x_1=x_1(s)$, $x_2=x_2(s)$, где s — длина дуги, откладываемой от некоторой фиксированной точки в определенном направлении и заканчивающейся в точке $x=(x_1,x_2)$. Функции $x_1(s)$, $x_2(s)$, периодические с периодом $2S$ (S — половина длины $\partial\Omega$), осуществляют взаимнооднозначное отображение множества $I_S=(-S,S]$ на множество $\partial\Omega$. Условимся обозначать через s и s' значения параметра, соответствующие точкам x и x'. Тогда интегральные выражения (2.2c) для операторов G_i могут быть записаны в виде:

$$\left(G_i\mathbf{f}\right)\left(x(s)\right)=\int\limits_{s-S}^{s+S}K_i(s,s')\mathbf{f}\left(x(s')\right)ds',\ \text{где}\ K_i(s,s')=\left(\partial_{\mathbf{n}_i}K(r)\right)(s,s'),\ s\in\overline{I}_S. \qquad (3.1)$$

Так как $\partial\Omega$ — кривая класса C^2, то она не имеет точек самопересечения, а функции $\tilde{f}_i(s,s')=\partial_{\mathbf{n}_i}\ln r^{-1}$ могут быть доопределены при $s=s'$ до непрерывных на множестве $\overline{I}_S\times\overline{I}_S$. На основании этого получаем при $\sigma\in I_S$ ($\sigma=s'-s$) и $\tau>0$ оценки:

$$\left|\partial_{\mathbf{n}_i}a(r,\tau)\right|\le\tilde{c}'\left(\sigma/\tau\right)^2\exp\left[-\tilde{c}^2\lambda/\left(4a^2\right)\right], \qquad (3.2)$$

где $\lambda=\sigma^2/\tau$, $\tilde{c}=\min\limits_{\sigma\in I_S^0}\left(r/|\sigma|\right)$ ($I_S^0=I_S\setminus\{0\}$), $\tilde{c}'=\left(8\pi a^2\right)^{-1}\max\limits_{(s,s')\in\overline{I}_S\times\overline{I}_S}\left|\tilde{f}_i(s,s')\right|$.

Введем в пространстве $C(\partial\Omega)$ норму: $\|\mathbf{f}\|_{C(\partial\Omega)}=\max\limits_{x\in\partial\Omega}\|\mathbf{f}(x)\|_{L_2}$, что делает это пространство банаховым. Условимся оператор A, отображающий банахово пространство B в банахово пространство C, обозначать как A ($B\to C$). В силу оценок (3.2) интегральные операторы G_i ($C(\partial\Omega)\to C(\partial\Omega)$) ограничены.

Введем также в рассмотрение банаховы пространства $C_k^B(\partial\Omega)$ ($k=1,2,\ldots$), состоящие из элементов $\mathbf{f}\in C(\partial\Omega)$, таких, что $\mathbf{f}(x)\in D(B^l)$ при $x\in\partial\Omega$ и $B^l\mathbf{f}\in C(\partial\Omega)$ ($l=\overline{1,k}$), с нормой $\|\mathbf{f}\|_{C_k(\partial\Omega)}=\sum_{l=0}^k\left\|B^l\mathbf{f}\right\|_{C(\partial\Omega)}$. Будем считать, что $C_0^B(\partial\Omega)=C(\partial\Omega)$. Операторы G_i и B^l коммутируют на множестве $D(B^l)$, поэтому операторы G_i ограниченно отображают пространства $C_k^B(\partial\Omega)$ сами в себя.

Теорема 1. *Пусть* $\partial\Omega\in C^2$. *Тогда операторы* $G_i^{\pm}$ ($C_k^B(\partial\Omega)\to C_k^B(\partial\Omega)$) ($k=0,1,\ldots$) *ограниченно обратимы.*

Доказательство. В теореме 10 [3] доказано, что ограниченный оператор $G_i^{\pm}$ биективно отображает пространство $C(\partial\Omega)$ само на себя. Кроме того, ограниченно обратим замкнутый оператор B как порождающий C_0-полугруппу, порядок роста которой меньше нуля (вообще говоря, таковыми являются все нильпотентные C_0-полугруппы) [9,136,149]. Учитывая это, а

также перестановочность операторов G_i и B на множестве $D(B)$, легко приходим к утверждению теоремы.

Введем в рассмотрение банаховы пространства $C^k(\partial\Omega)$ ($k=1,2,...$), состоящие из функций $\mathbf{f}\in C(\partial\Omega)$, имеющих равномерные на множестве $\partial\Omega$ производные $\mathbf{f}^{(l)}$: $\left(\mathbf{f}^{(l)}\right)\left(x(s)\right)=d^l\mathbf{f}\left(x(s)\right)/ds^l$ ($l=\overline{1,k}$), с нормой $\|\mathbf{f}\|_{C^k(\partial\Omega)}=\sum_{l=0}^{k}\left\|\mathbf{f}^{(l)}\right\|_{C(\partial\Omega)}$. Будем считать, что $C^0(\partial\Omega)=C(\partial\Omega)$.

Лемма. *Пусть* $\mathbf{f}\in C^k(\partial\Omega)$ *и* $\partial\Omega\in C^{k+2}$. *Тогда* $G_i\mathbf{f}\in C^k(\partial\Omega)$, *и оператор* G_i *(*$C^k(\partial\Omega)\to C^k(\partial\Omega)$*) ограничен.*

Доказательство. Используя формулу Тейлора с дополнительным членом в виде определенного интеграла (ФТОИ), несложно показать, что функции $\rho(s,s')=\left(4a^2\right)^{-1}\left(r/\sigma\right)^2$, $\chi_i(s,s')=-\left(8\pi a^2\right)^{-1}\left(r/\sigma\right)^2\partial_{\mathbf{n}_i}\ln r^{-1}$ имеют непрерывные на множестве $\overline{I}_S\times\overline{I}_S$ производные $\partial_s^k\partial_{s'}^l\rho$ и $\partial_s^k\partial_{s'}^l\chi_i$ при условиях $\partial\Omega\in C^{k+l+1}$ и $\partial\Omega\in C^{k+l+2}$, соответственно ($k,l=0,1,...$).

Пусть $\partial\Omega\in C^{k+2}$. Перепишем представление (3.1) оператора G_i в виде

$$\left(G_i\mathbf{f}\right)\left(x(s)\right)=\int_{-S}^{S}\left|\sigma\right|^{-\alpha}Z_{i,\alpha}(s,\sigma)\mathbf{f}\left(x(s+\sigma)\right)d\sigma\ , \tag{3.3}$$

$$Z_{i,\alpha}(s,\sigma)\mathbf{f}=\int_0^T\tau^{\alpha/2-1}z_i(s,\sigma,\tau)U(\tau)\mathbf{f}\,d\tau\ ,\ z_i(s,\sigma,\tau)=\lambda^{1+\alpha/2}\chi_i(s,s+\sigma)\exp\left[-\rho(s,s+\sigma)\lambda\right]\ (\alpha\in(0,1)).$$

Основываясь на существовании непрерывных и ограниченных на множестве $\overline{I}_S\times\overline{I}_S\times(0,\infty)$ производных $\partial_s^l z_i(s,\sigma,\tau)$ ($l=\overline{0,k}$), приходим к существованию в операторной норме равномерных на множестве $\overline{I}_S\times\overline{I}_S$ производных $\partial_s^l Z_{i,\alpha}(s,\sigma)$ ($l=\overline{0,k}$). Отсюда на основании представления (3.3) и учитывая, что $\mathbf{f}\in C^k(\partial\Omega)$, получаем $G_i\mathbf{f}\in C^k(\partial\Omega)$ и оценку:

$$\left\|G_i\mathbf{f}\right\|_{C^k(\partial\Omega)}\le S^{1-\alpha}\left(k+1\right)\hat{c}_{i,\alpha,k}\left\|\mathbf{f}\right\|_{C^k(\partial\Omega)},\ \textit{где}\ \hat{c}_{i,\alpha,k}=2\left(1-\alpha\right)^{-1}\max_{0\le l\le k,(s,\sigma)\in\overline{I}_S\times\overline{I}_S}\left\|\partial_s^l Z_{i,\alpha}(s,\sigma)\right\|.$$

Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть* $\partial\Omega\in C^{k+2}$. *Тогда операторы* $G_i^{\pm}$ *(*$C^k(\partial\Omega)\to C^k(\partial\Omega)$*) ограниченно обратимы (*$k=1,2,...$*).*

Доказательство. В силу ограниченности операторов $G_i^{\pm}$ ($C^k(\partial\Omega)\to C^k(\partial\Omega)$), установленной в лемме, достаточно убедиться, что уравнение (2.2b) имеет единственное решение $\mathbf{v}_i^{\pm}\in C^k(\partial\Omega)$ при условии, что $\mathbf{w}_i^{\pm}\in C^k(\partial\Omega)$. Для этого представим оператор G_i в виде $G_i^{\varepsilon}+G_i^{\setminus\varepsilon}$, где G_i^{ε} — интегральный оператор вида (3.1) с ядром $K_i^{\varepsilon}(s,s')=\partial_{\mathbf{n}_i}K(r)\,\hat{f}_{\varepsilon}(\sigma)$; $\hat{f}_{\varepsilon}(\sigma)$ — k раз непрерывно дифференцируемая вещественная функция: $\hat{f}_{\varepsilon}(\sigma)=1$ при $\left|\sigma\right|\le\varepsilon/2$, $0<\hat{f}_{\varepsilon}(\sigma)<1$ при $\varepsilon/2<\left|\sigma\right|<\varepsilon$, $\hat{f}_{\varepsilon}(\sigma)=0$ при $\left|\sigma\right|\ge\varepsilon$ ($0<\varepsilon<S$). Согласно теореме 3 из [3] при $r>0$ функция $K(r)$ является аналитической, следовательно, $G_i^{\setminus\varepsilon}\mathbf{v}_i^{\pm}\in C^k(\partial\Omega)$, так как $\mathbf{v}_i^{\pm}\in L_2^{\times}$, а ядро оператора $G_i^{\setminus\varepsilon}$ тождественно равно нулю при $r\le 2^{-1}\tilde{c}\varepsilon$. Кроме того, по условию $\mathbf{w}_i^{\pm}\in C^k(\partial\Omega)$, поэтому $\mathbf{g}_i^{\pm}=2\left(-1\right)^i\left(\mp\mathbf{w}_i^{\pm}\pm G_i^{\setminus\varepsilon}\ \mathbf{v}_i^{\pm}\right)\in C^k(\partial\Omega)$.

Полагая $\varepsilon<\left(4\ \hat{c}_{i,0,0}^2S\right)^{-1}$, имеем неравенство: $\left\|G_i^{\varepsilon}\right\|\le\left\|K_i^{\varepsilon}\right\|_{L_2(\partial\Omega\times\partial\Omega)}<2^{-1}$, в силу которого к уравнению $\left[\mp\left(-1\right)^i2^{-1}+G_i^{\varepsilon}\right]\mathbf{v}_i^{\pm}=\mathbf{g}_i^{\pm}$, эквивалентному уравнению (2.2b), применима теорема

Банаха: функция $\mathbf{v}_i^{\pm}$ представима в виде ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{h}_{i,n}^{\pm}$ ($\mathbf{h}_{i,n}^{\pm}=\left(\pm 2(-1)^i G_i^{\varepsilon}\right)^n \mathbf{g}_i^{\pm}$), сходящегося в норме $L_2^{\times}$.

Кроме того, пусть $\varepsilon^{1-\alpha}<\left(2\hat{c}_{i,\alpha,k}\right)^{-1}$ ($\alpha\in(0,1)$). Согласно лемме существуют непрерывные производные $d^l\mathbf{h}_{i,n}^{\pm}\left(x(s)\right)/ds^l$ ($l=\overline{0,k}$) на множестве $\overline{I}_S$ и справедливы оценки:

$$\left\|d^l\mathbf{h}_{i,n}^{\pm}\left(x(s)\right)/ds^l\right\|_{L_2}\le n^l q^n\left\|\mathbf{g}_i^{\pm}\right\|_{C^k(\partial\Omega)}\quad (l=\overline{0,k}),$$

где $q=2\hat{c}_{i,\alpha,k}\varepsilon^{1-\alpha}<1$, $s\in\overline{I}_S$. Отсюда получаем, что $\mathbf{v}_i^{\pm}\in C^k(\partial\Omega)$. Теорема доказана.

4. Построение и обоснование вычислительного алгоритма

С учетом оценок (3.2) операторы G_i могут быть представлены в виде:

$$G_i\mathbf{f}=\int_{I_T}A_i(\tau)U(\tau)\mathbf{f}\,d\tau\quad(\mathbf{f}\in C(\partial\Omega)).$$

Значения функции $A_i(\tau)$ ($\tau>0$) — ограниченные операторы ($C(\partial\Omega)\to C(\partial\Omega)$):

$$\left(A_i(\tau)\mathbf{f}\right)(x)=\int_{\partial\Omega}\partial_{\mathbf{n}_i}a(r,\tau)\mathbf{f}(x')\,ds'\quad(\mathbf{f}\in C(\partial\Omega),\ x\in\partial\Omega).$$

При $\tau>0$ в равномерной операторной топологии существуют непрерывные производные $A_i^{(k)}(\tau)$ ($k=0,1,\ldots$), для которых справедливы оценки:

$$\left\|A_i^{(k)}(\tau)\right\|\le\tilde{c}_{i,k}\tau^{-1/2-k},\ \text{где}\ \tilde{c}_{i,k}=\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma^2 p_{i,k}\left(\gamma^2\right)\exp\left[-\tilde{c}^2\gamma^2/\left(4a^2\right)\right]d\gamma,$$

$p_{i,k}(\lambda)$ — некоторые полиномы k-ой степени с неотрицательными постоянными коэффициентами, не зависящими от τ, причем $p_{i,0}(\lambda)=\tilde{c}'$.

Введем в рассмотрение ограниченные операторы $\tilde{G}_i$ ($C(\partial\Omega)\to C(\partial\Omega)$):

$$\tilde{G}_i=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{G}_{i,n}U(\tau_n)\quad(h_\tau=T/N,\ \tau_n=nh_\tau,\ n=\overline{0,N-1},\ N\in\mathbf{N}=\{1,2,\ldots\}),$$

$$\tilde{G}_{i,0}\mathbf{f}=\int_0^{\tau_{1/2}}A_i(\tau)\mathbf{f}\,d\tau,\quad \tilde{G}_{i,n}=\int_{\tau_{n-1/2}}^{\tau_{n+1/2}}A_i(\tau)\,d\tau\quad(\tau_{n\pm1/2}=\left(n\pm2^{-1}\right)h_\tau,\ n=\overline{1,N-1}).\qquad(4.1)$$

Теорема 3. *Пусть $\partial\Omega\in C^2$. Операторы $\tilde{G}_i$ ($C_2^B(\partial\Omega)\to C(\partial\Omega)$) сходятся при $N\to\infty$ по операторной норме к соответствующим операторам G_i ($C_2^B(\partial\Omega)\to C(\partial\Omega)$) с порядком аппроксимации $O\left(h_\tau^{3/2}\right)$.*

Доказательство. Утверждение вытекает из следующих оценок:

$$\left\|\int_0^{\tau_{1/2}}A_i(\tau)U(\tau)\mathbf{f}\,d\tau-\tilde{G}_{i,0}\mathbf{f}+\int_{\tau_{N-1/2}}^{T}A_i(\tau)U(\tau)\mathbf{f}\,d\tau\right\|_{C(\partial\Omega)}\le 2^{1/2}\tilde{c}_{i,0}\left\|B\mathbf{f}\right\|_{C(\partial\Omega)}h_\tau^{3/2},$$

$$\left\|\int_{\tau_{1/2}}^{\tau_{3/2}}A_i(\tau)U(\tau)\mathbf{f}\,d\tau-\tilde{G}_{i,1}U(\tau_1)\mathbf{f}\right\|_{C(\partial\Omega)}\le 24^{-1}\left[2^{5/2}\left(\tilde{c}_{i,2}+\tilde{c}_{i,1}\right)\left\|B\mathbf{f}\right\|_{C(\partial\Omega)}h_\tau^{3/2}+2^{1/2}\tilde{c}_{i,0}\left\|B^2\mathbf{f}\right\|_{C(\partial\Omega)}h_\tau^{5/2}\right],$$

$$\sum_{n=2}^{N-1}\left\|\int_{\tau_{n-1/2}}^{\tau_{n+1/2}}A_i(\tau)U(\tau)\mathbf{f}\,d\tau-\tilde{G}_{i,n}U(\tau_n)\mathbf{f}\right\|_{C(\partial\Omega)}\le$$

$$24^{-1}\left[2^{5/2}\left(3^{-1}\tilde{c}_{i,2}+\tilde{c}_{i,1}\right)\left\|B\mathbf{f}\right\|_{C(\partial\Omega)}h_\tau^{3/2}+2\sqrt{T}\tilde{c}_{i,0}\left\|B^2\mathbf{f}\right\|_{C(\partial\Omega)}h_\tau^{2}\right],$$

при получении которых используется ФТОИ, а также неравенства:

$$\sum_{n=2}^{N-1}\left[\left(n-2^{-1}\right)h_\tau\right]^{-\alpha} \le \int_{\tau_{1/2}}^{T}\tau^{-\alpha}d\tau \quad (\alpha>0).$$

При получении первой оценки учитывается, что $U(T)\equiv 0$.

Разобьем кривую $\partial\Omega$ на дуги Γ_l ($l=\overline{1,L}$) равной длины $h_s=2S/L$ ($L\in\mathbf{N}$). Обозначим через x_l точки, делящие соответствующие дуги Γ_l пополам. Введем в рассмотрение пространства V_L сеточных функций $\mathbf{f}^L$ со значениями $\mathbf{f}_l$ в пространстве L_2, заданных в узлах x_l. Определим в V_L норму: $\left\|\mathbf{f}^L\right\|_{V_L}=\max\limits_{1\le l\le L}\left\|\mathbf{f}_l\right\|_{L_2}$, и зададим проекционные операторы P_L ($C(\partial\Omega)\to V_L$): $P_L\mathbf{f}=\mathbf{f}^L$, $\mathbf{f}_l=\mathbf{f}(x_l)$. Очевидно, что такие операторы P_L ограничены: $\|P_L\|=1$.

Введем в пространстве V_L ограниченные операторы $\breve{G}_{i,n}$: $\mathbf{g}^L=\breve{G}_{i,n}\mathbf{f}^L$ ($n=\overline{0,N-1}$), где

$$\mathbf{g}_l=\sum_{k=1}^{L}\breve{a}_{i,n,lk}\mathbf{f}_k,\quad \breve{a}_{i,n,lk}=\int_{\Gamma_k}\tilde{a}_{i,n}(x_l,x')\,ds';$$

$$\tilde{a}_{i,0}(x,x')=\int_{0}^{\tau_{1/2}}\partial_{\mathbf{n}_i}a(r,\tau)\,d\tau,\quad \tilde{a}_{i,n}(x,x')=\int_{\tau_{n-1/2}}^{\tau_{n+1/2}}\partial_{\mathbf{n}_i}a(r,\tau)\,d\tau\ (n=\overline{1,N-1}).$$

Заметим, что операторы $\breve{G}_{i,n}$ имеют вид скалярных квадратных матриц порядка L. Заменяя в выражениях (4.1) операторы $\tilde{G}_{i,n}$ операторами $\breve{G}_{i,n}$, определим операторы $\breve{G}_i$ ($V_L\to V_L$).

Заметим, что функции $r(s,s')$ и $\left(\partial_{\mathbf{n}_i}\ln r^{-1}\right)(s,s')$ непрерывно дифференцируемы k раз по $s'\ne s$, если $\partial\Omega$ — кривая класса C^k и C^{k+1}, соответственно ($k=1,2,\ldots$), а функции вида $\left(r^k\partial_{s'}^{k+1}r\right)(s,s')$ и $\left(r^k\partial_{s'}^{k}\partial_{\mathbf{n}_i}\ln r^{-1}\right)(s,s')$ могут быть доопределены при $s'=s$ до непрерывных на всем множестве $\overline{I}_S\times\overline{I}_S$. С учетом этого получаем при $\sigma\in I_S^0$, $\partial\Omega\in C^{k+1}$, $k=1,2,\ldots$ оценки:

$$\int_0^T\left|\partial_{s'}^k\partial_{\mathbf{n}_i}a(r,\tau)\right|d\tau\le\breve{c}_{i,k}|\sigma|^{-k},\ \text{где}\ \ \breve{c}_{i,k}=\int_0^\infty p_{i,k}(\lambda)\exp\left[-\tilde{c}^2\lambda/\left(4a^2\right)\right]d\lambda, \tag{4.2}$$

$p_{i,k}(\lambda)$ — некоторые полиномы k-ой степени с неотрицательными постоянными коэффициентами, не зависящими от (s,s'). Заметим также, что оценки вида (4.2) справедливы в случае $k=0$ при условии, что $\partial\Omega\in C^2$, при этом $p_{i,0}(\lambda)=\tilde{c}'$.

Определение 1. Пусть A_L — ограниченные операторы в соответствующих пространствах V_L. Будем говорить, что операторы A_L сходятся при $L\to\infty$ к ограниченному оператору A ($C^k(\partial\Omega)\to C(\partial\Omega)$) по операторной норме, если $\left\|A_LP_L\mathbf{f}-P_LA\mathbf{f}\right\|_{V_L}\to 0$ при $L\to\infty$ равномерно в шаре $\left\|\mathbf{f}\right\|_{C^k(\partial\Omega)}\le 1$.

Теорема 4. *Пусть $\partial\Omega\in C^3$. Тогда операторы $\breve{G}_i$ сходятся при $L\to\infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $\tilde{G}_i$ ($C^2(\partial\Omega)\to C(\partial\Omega)$) равномерно по N с порядком аппроксимации $O\left(h_s^2\ln h_s\right)$.*

Доказательство. Утверждение вытекает из следующих оценок:

$$\left\|\sum_{n=0}^{N-1}U(\tau_n)\int_{\Gamma_l}\tilde{a}_{i,n}(x_l,x')\left[f(x')-f(x_l)\right]ds'\right\|_{C(\partial\Omega)}\le 2^{-1}\breve{c}_{i,0}h_s^2\left\|\mathbf{f}'\right\|_{C(\partial\Omega)},$$

$$\left\|\sum_{n=0}^{N-1}U(\tau_n)\int_{\Gamma_{l\pm1}}\tilde{a}_{i,n}(x_l,x')\left[f(x')-f(x_{l\pm1})\right]ds'\right\|_{C(\partial\Omega)}\le 6^{-1}\left(\breve{c}_{i,2}+\breve{c}_{i,1}\right)\left\|\mathbf{f}'\right\|_{C(\partial\Omega)}h_s^2+24^{-1}\breve{c}_{i,0}\left\|\mathbf{f}''\right\|_{C(\partial\Omega)}h_s^3,$$

$$\left\| \sum_{n=0}^{N-1} U(\tau_n) \sum_{k=l+2}^{l+L-2} \int_{\Gamma_k} \tilde{a}_{i,n}(x_l, x') \left[f(x') - f(x_k) \right] ds' \right\|_{C(\partial\Omega)} \le$$

$$24^{-1} h_s^2 \left\{ 4\left(\breve{c}_{i,2} + \breve{c}_{i,1} \ln\left(2S/h_s\right) \right) \left\| \mathbf{f}' \right\|_{C(\partial\Omega)} + 2S\, \breve{c}_{i,0} \left\| \mathbf{f}'' \right\|_{C(\partial\Omega)} \right\}$$

($\Gamma_{l+L} = \Gamma_l$), при получении которых используется ФТОИ, а также неравенства:

$$\sum_{k=l+2}^{l+L-2} \left[\left(k - 2^{-1} \right) h_s \right]^{-\alpha} h_s \le 2 \int_{h_s/2}^{S} s^{-\alpha} ds \quad (\alpha > 0).$$

Введем в рассмотрение ограниченные операторы $\breve{G}_i^{\pm} = \mp\left(-1\right)^i 2^{-1} + \breve{G}_i$ и $\breve{G}_{i,0}^{\pm} = \mp\left(-1\right)^i 2^{-1} + \breve{G}_{i,0}$ ($V_L \to V_L$). Очевидно, что при условии

$$4\tilde{c}_{i,0}\sqrt{h_\tau} < 1 \tag{4.3}$$

в силу теоремы Банаха оператор $\breve{G}_{i,0}^{\pm}$ ограниченно обратим, следовательно, ограниченно обратим оператор $\breve{G}_i^{\pm}$, и имеют место равенства:

$$\left(\breve{G}_i^{\pm}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{N-1} \breve{G}_{i,n}^{\pm(-1)} U(\tau_n),\ \breve{G}_{i,0}^{\pm(-1)} = \left(\breve{G}_{i,0}^{\pm}\right)^{-1},\ \breve{G}_{i,n}^{\pm(-1)} = \breve{G}_{i,0}^{\pm(-1)} \sum_{m=1}^{n} \breve{G}_{i,m} \breve{G}_{i,n-m}^{\pm(-1)} \ (n = \overline{1, N-1}). \tag{4.4}$$

Множество значений $N \in \mathbf{N}$, обеспечивающих выполнение условия (4.3), обозначим через $\mathbf{N}'$; наименьшее $N \in \mathbf{N}'$ обозначим через N'.

Теорема 5. *Пусть* $\partial\Omega \in C^2$. *Операторы* $\left(\breve{G}_i^{\pm}\right)^{-1}$ *(*$L \in \mathbf{N}$, $N \in \mathbf{N}'$*) ограничены в совокупности.*

Доказательство. Пусть $N = M'N' + K'$ и $T' = M'h_\tau$ ($M' \in \mathbf{N}$, $0 \le K' < N'$). Тогда оператор $\breve{G}_i^{\pm}$ может быть представлен в виде:

$$\breve{G}_i^{\pm} = \breve{G}_{i,0}'^{\pm} + \sum_{n=1}^{N'} \breve{G}_{i,n}' U(nT'), \text{ где } \breve{G}_{i,0}'^{\pm} = \mp\left(-1\right)^i 2^{-1} + \breve{G}_{i,0}',\ \breve{G}_{i,n}' = \sum_{m=0}^{M'-1} \breve{G}_{i,m+nM'} U(\tau_m) \ (n = \overline{0, N'-1});$$

$$\breve{G}_{i,N'}' = \sum_{m=0}^{K'-1} \breve{G}_{i,m+N'M'} U(\tau_m), \text{ если } K' > 0;\ U(N'T') = 0, \text{ если } K' = 0.$$

Пусть $T'' = T/N'$. Так как $N' \in \mathbf{N}'$, то имеют место оценки:

$$\left\| \breve{G}_{i,n}' \right\| \le 2\tilde{c}_{i,0}\sqrt{T'} \le 2\tilde{c}_{i,0}\sqrt{T''} < 2^{-1} \ (n = \overline{0, N'}). \tag{4.5}$$

В силу оценки (4.5) при $n = 0$ существуют операторы $\left(\breve{G}_{i,0}'^{\pm}\right)^{-1}$, и операторы $\left(\breve{G}_i^{\pm}\right)^{-1}$ могут быть представлены в виде

$$\left(\breve{G}_i^{\pm}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{N'} \breve{G}_{i,n}'^{\pm(-1)} U(nT') \quad (U(N'T') = 0, \text{ если } K' = 0),$$

при этом справедливы равенства:

$$\breve{G}_{i,0}'^{\pm(-1)} = \left(\breve{G}_{i,0}'^{\pm}\right)^{-1},\ \breve{G}_{i,n}'^{\pm(-1)} = \breve{G}_{i,0}'^{\pm(-1)} \sum_{m=1}^{n} \breve{G}_{i,m}' \breve{G}_{i,n-m}'^{\pm(-1)} \ (n = \overline{1, N'}). \tag{4.6}$$

С учетом оценок (4.5) и равенств (4.6) получаем оценки:

$$\left\| \breve{G}_{i,0}'^{\pm(-1)} \right\| \le \left(2^{-1} - 2\tilde{c}_{i,0}\sqrt{T'}\right)^{-1},\ \left\| \breve{G}_{i,n}'^{\pm(-1)} \right\| \le 2^{-n+2} \tilde{c}_{i,0}\sqrt{T'} \left(2^{-1} - 2\tilde{c}_{i,0}\sqrt{T'}\right)^{-n-1} \ (n = \overline{1, N'}),$$

используя которые, завершаем доказательство теоремы:

$$\left\| \left(\breve{G}_i^{\pm}\right)^{-1} \right\| \le \left\| \breve{G}_{i,0}'^{\pm(-1)} \right\| + \sum_{n=1}^{N'} \left\| \breve{G}_{i,n}'^{\pm(-1)} \right\| \le 2^{-N'} \left(2^{-1} - 2\tilde{c}_{i,0}\sqrt{T'}\right)^{-N'-1} \le c$$

(здесь $c = 2^{-N'} \left(2^{-1} - 2\tilde{c}_{i,0}\sqrt{T''}\right)^{-N'-1}$ — константа, не зависящая от L и N).

Введем в рассмотрение банаховы пространства $C^B_{l,n}(\partial\Omega)=C^l(\partial\Omega)\cap C^B_n(\partial\Omega)$ с нормой $\|\mathbf{f}\|_{C^B_{l,n}(\partial\Omega)}=\|\mathbf{f}\|_{C^l(\partial\Omega)}+\|\mathbf{f}\|_{C^B_n(\partial\Omega)}$.

Определение 2. Будем говорить, что ограниченные операторы $A_L^{(N)}$ $(V_L\to V_L)$ сходятся при $L,N\to\infty$ к ограниченному оператору A $(C^B_{l,n}(\partial\Omega)\to C(\partial\Omega))$ по операторной норме, если $\left\|A_L^{(N)}P_L\mathbf{f}-P_LA\mathbf{f}\right\|_{V_L}\to 0$ при $L,N\to\infty$ равномерно в шаре $\|\mathbf{f}\|_{C^B_{l,n}(\partial\Omega)}\le 1$.

Из теорем 1-5 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть* $\partial\Omega\in C^4$. *Тогда операторы* $\left(\breve{G}_i^{\pm}\right)^{-1}$ $(N\in\mathbf{N}')$ *сходятся при* $L,N\to\infty$ *по операторной норме к соответствующим операторам* $\left(G_i^{\pm}\right)^{-1}$ $(C^B_{2,2}(\partial\Omega)\to C(\partial\Omega))$ *с порядком аппроксимации* $O\left(h_\tau^{3/2}+h_s^2\ln h_s\right)$.

Пусть значение $x\in\Omega$ фиксировано. Тогда существуют непрерывные по $(x',\tau)\in\partial\Omega\times[0,\infty)$ производные $\partial_\tau^k a(r,\tau)$ произвольного порядка k $(\partial_\tau^k a(r,\tau=0)=0)$. Операторы $G_i(x)$ $(C(\partial\Omega)\to L_2)$ $(i=1,2)$ ограничены и могут быть выражены через ограниченные операторы $A_i(x,\tau)$ $(C(\partial\Omega)\to L_2)$ $(\tau>0)$:

$$G_i(x)\mathbf{f}=\int_{I_T}A_i(x,\tau)U(\tau)\mathbf{f}\,d\tau,$$

$$\left(A_1(x,\tau)\mathbf{f}\right)(x)=\int_{\partial\Omega}\partial_{\mathbf{n}_1}a(r,\tau)\mathbf{f}\left(x'\right)ds',\ \left(A_2(x,\tau)\mathbf{f}\right)(x)=\int_{\partial\Omega}a(r,\tau)\mathbf{f}\left(x'\right)ds'. \qquad (4.7)$$

Функции $A_i(x,\tau)$ непрерывно дифференцируемы по $\tau\in\mathbf{R}$ произвольное число раз, если доопределить $A_i^{(k)}(x,\tau)=0$ $(k=0,1,...)$ при $\tau\le 0$.

Введем в рассмотрение ограниченные операторы $\tilde{G}_i(x)$ $(C(\partial\Omega)\to L_2)$:

$$\tilde{G}_i(x)=\sum_{m=0}^{\tilde{N}-1}\tilde{G}_{i,m}(x)U(\tilde{\tau}_m)\ \ (\tilde{N}=MN,\ M\in\mathbf{N},\ \tilde{\tau}_m=m\tilde{h}_\tau,\ \tilde{h}_\tau=h_\tau/M), \qquad (4.8)$$

$$\tilde{G}_{i,0}(x)=\int_0^{\tilde{\tau}_{1/2}}A_i(x,\tau)\,d\tau,\ \tilde{G}_{i,m}(x)=\int_{\tilde{\tau}_{m-1/2}}^{\tilde{\tau}_{m+1/2}}A_i(x,\tau)\,d\tau\ \ (\tilde{\tau}_{m\pm1/2}=\left(m\pm2^{-1}\right)\tilde{h}_\tau,\ m=\overline{1,\tilde{N}-1}).$$

Теорема 6. *Пусть* $\partial\Omega\in C^2$ *и* $x\in\Omega$. *Тогда операторы* $\tilde{G}_i(x)$ $(C_2^B(\partial\Omega)\to L_2)$ *сходятся при* $N\to\infty$ *и фиксированном* M *по операторной норме к соответствующим операторам* $G_i(x)$ $(C_2^B(\partial\Omega)\to L_2)$ *с порядком аппроксимации* $O\left(\tilde{h}_\tau^2\right)$.

Доказательство. С учетом равенств $A_i^{(k)}(x,\tau)\equiv 0$ $(\tau\le 0)$ и $U(\tau)\equiv 0$ $(\tau\ge T)$ утверждение следует из следующих оценок:

$$\sum_{m=0}^{\tilde{N}}\left\|\int_{\tilde{\tau}_{m-1/2}}^{\tilde{\tau}_{m+1/2}}A_i(x,\tau)U(\tau)\mathbf{f}\,d\tau-\tilde{G}_{i,m}(x)U(\tilde{\tau}_m)\mathbf{f}\right\|_{C(\partial\Omega)}\le$$

$$24^{-1}\left(T+\tilde{h}_\tau\right)\left[\tilde{c}^x_{i,2}\left\|B\mathbf{f}\right\|_{C(\partial\Omega)}\tilde{h}_\tau^3+\left(2\tilde{c}^x_{i,1}\left\|B\mathbf{f}\right\|_{C(\partial\Omega)}+\tilde{c}^x_{i,0}\left\|B^2\mathbf{f}\right\|_{C(\partial\Omega)}\right)\tilde{h}_\tau^2\right]$$

$(\tilde{c}^x_{i,k}=\max\limits_{\tau\in[0,T]}\left\|A_i^{(k)}(x,\tau)\right\|,\ \tilde{\tau}_{-1/2}=-\tilde{h}_\tau/2,\ \tilde{\tau}_N=T,\ \tilde{\tau}_{N+1/2}=T+\tilde{h}_\tau/2)$, полученных с помощью ФТОИ..

Введем в рассмотрение ограниченные операторы $\breve{G}_{i,m}(x)$ $(V_L\to L_2)$: $\mathbf{g}=\breve{G}_{i,m}(x)\mathbf{f}^L$ $(m=\overline{0,\tilde{N}-1})$, где

$$\mathbf{g}=\sum_{l=1}^{L}\breve{a}_{i,m,l}(x)\mathbf{f}_l,\ \ \breve{a}_{i,m,l}(x)=\int_{\Gamma_l}\tilde{a}_{2-i,m}(x,x')\,ds';$$

$$\tilde{a}_{0,0}(x,x')=\int_0^{\tilde{\tau}_{1/2}} a(r,\tau)\,d\tau,\quad \tilde{a}_{0,m}(x,x')=\int_{\tilde{\tau}_{m-1/2}}^{\tilde{\tau}_{m+1/2}} a(r,\tau)\,d\tau\ \ (m=\overline{1,\tilde{N}-1}).$$

Операторы $\breve{G}_{i,m}(x)$ суть скалярные матрицы размерности $1\times L$. Заменяя в выражениях (4.8) операторы $\tilde{G}_{i,m}(x)$ операторами $\breve{G}_{i,m}(x)$, определим операторы $\breve{G}_i(x)$ $(V_L\to L_2)$. По аналогии с определением 1 будем понимать сходимость по операторной норме ограниченных операторов $A_L(x)$ $(V_L\to L_2)$ к соответствующим ограниченным операторам $A(x)$ $(C^k(\partial\Omega)\to L_2)$.

Теорема 7. *Пусть* $\partial\Omega\in C^3$ *и* $x\in\Omega$. *Тогда операторы* $\breve{G}_i(x)$ *сходятся при* $L\to\infty$ *по операторной норме к соответствующим операторам* $\tilde{G}_i(x)$ $(C^2(\partial\Omega)\to C(\partial\Omega))$ *равномерно по* N (M *фиксировано) с порядком аппроксимации* $O\left(h_s^2\right)$.

Доказательство. Утверждение вытекает из следующей оценки:

$$\left\|\sum_{m=0}^{\tilde{N}-1}U(\tilde{\tau}_m)\sum_{l=1}^{L}\int_{\Gamma_l}\tilde{a}_{2-i,m}(x,x')\left[f(x')-f(x_l)\right]ds'\right\|_{C(\partial\Omega)}\le$$

$$12^{-1}S\left[\breve{c}^x_{i,2}\left\|\mathbf{f}'\right\|_{C(\partial\Omega)}h_s^3+\left(2\breve{c}^x_{i,1}\left\|\mathbf{f}'\right\|_{C(\partial\Omega)}+\breve{c}^x_{i,0}\left\|\mathbf{f}''\right\|_{C(\partial\Omega)}\right)h_s^2\right]$$

($\breve{c}^x_{i,k}=\max\limits_{s'\in I_S}\partial^k_{s'}\tilde{a}_{2-i}(x,x(s'),\tau)$), при получении которой используется ФТОИ.

Введем обозначения: $R_i^{\pm}(x)=G_i(x)\left(G_i^{\pm}\right)^{-1}$, $\breve{R}_i^{\pm}(x)=\breve{G}_i(x)\left(\breve{G}_i^{\pm}\right)^{-1}$. По аналогии с определением 2 будем понимать сходимость по операторной норме ограниченных операторов $A_L^{(\tilde{N})}(x)$ $(V_L\to L_2)$ к соответствующим ограниченным операторам $A(x)$ $(C^B_{l,n}(\partial\Omega)\to L_2)$ при $\tilde{N}\to\infty$. Из теорем 6-7, следствия 1 и ограниченности в совокупности операторов $\breve{G}_i(x)$ $(L,\tilde{N}\in\mathbf{N})$, вытекающей из интегрируемости при фиксированном $x\in\Omega$ функций $\left|a(r,\tau)\right|$ и $\left|\partial_{\mathbf{n}_1}a(r,\tau)\right|$ на множестве $\partial\Omega\times I_T$, получаем следующее утверждение:

Следствие 2. *Пусть* $\partial\Omega\in C^4$ *и* $x\in\Omega$. *Тогда операторы* $\breve{R}_i^{\pm}(x)$ ($N\in\mathbf{N}'$) *сходятся при* $L,N\to\infty$ *и фиксированном* M *по операторной норме к соответствующим операторам* $R_i^{\pm}(x)$ $(C^B_{2,2}(\partial\Omega)\to L_2)$ *с порядком аппроксимации* $O\left(h_\tau^{3/2}+h_s^2\ln h_s\right)$.

Операторы $\breve{R}_i^{\pm}(x)$ имеют вид:

$$\breve{R}_i(x)=\sum_{m=0}^{\tilde{N}-1}\breve{R}_{i,m}(x)U(\tilde{\tau}_m),$$

где $\breve{R}_{i,m}(x)$ — матрицы размерности $1\times L$, вычисляемые с помощью уравнений:

$$\breve{R}_{i,nM+m}(x)=\sum_{k=0}^{n}\breve{G}_{i,(n-k)M+m}(x)\breve{G}^{\pm(-1)}_{i,k}\quad(k=\overline{0,N-1},\ m=\overline{0,M-1}).\tag{4.9}$$

При вычислении коэффициентов $\breve{a}_{i,m,l}(x)$ и $\breve{a}_{i,n,lk}$ интегрирование по τ осуществляется точно, а по s' с помощью элементарных формул Гаусса с четным количеством узлов.

Параметр M позволяет скомпенсировать уменьшение точности вычисления операторов $\breve{G}_i(x)$ при приближении точки x к границе $\partial\Omega$. Дело в том, что при $r\approx 0$ функции $a(r,\tau)$ и $\partial_r a(r,\tau)$ становятся быстро изменяющимися вблизи $\tau=0$, и для удовлетворительного описания их требуется более мелкий шаг дискретизации параметра полугруппы τ. Для обоснования эффективности метода в этом случае докажем сходимость операторов $\breve{R}_i^{\pm}(x)$ равномерно в области Ω (аналоги теорем 6, 7 и следствия 2 с равномерной сходимостью относительно произвольной замкнутой области $\tilde{\Omega}\subset\Omega$ формулируются и доказываются совершенно аналогично).

Пусть $\partial\Omega \in C^2$. Тогда интеграл $\int_{\partial\Omega} \left|\partial_{\mathbf{n}_i} \ln r^{-1}\right| ds'$ ограничен в области Ω [10,361]. Пусть $\tilde{c}'' = \left(8\pi a^2\right)^{-1} \max\limits_{x\in\Omega} \int_{\partial\Omega} \left|\partial_{\mathbf{n}_i} \ln r^{-1}\right| ds'$ и $\tilde{c}''' = \left(4\pi\right)^{-1} 2S$. При $x \in \Omega$ и $\tau > 0$ для производных $A_i^{(k)}(x,\tau)$ $(k = 0,1,...)$ справедливы оценки:

$$\left\| A_i^{(k)}(x,\tau) \right\| \le \tilde{c}_{i,k}^{\Omega} \tau^{-1-k}, \text{ где } \tilde{c}_{i,k}^{\Omega} = \max_{\lambda\in[0,\infty)} \lambda^{2-i} p_{i,k}(\lambda) \exp\left[-\lambda \Big/ \left(4a^2\right)\right],$$

$p_{i,k}(\lambda)$ — некоторые полиномы k-ой степени с неотрицательными постоянными коэффициентами, не зависящими от x и τ, причем $p_{1,0}(\lambda) = \tilde{c}''$, $p_{2,0}(\lambda) = \tilde{c}'''$. С учетом этих оценок по аналогии с теоремой 3 доказывается теорема:

Теорема 8. *Пусть $\partial\Omega \in C^2$. Тогда операторы $\tilde{G}_i(x)$ $(C_2^B(\partial\Omega) \to L_2)$ сходятся при $N \to \infty$ и фиксированном M по операторной норме к соответствующим операторам $G_i(x)$ $(C_2^B(\partial\Omega) \to L_2)$ равномерно по $x \in \Omega$ с порядком аппроксимации $O\left(\tilde{h}_\tau\right)$.*

Далее, пусть $\partial\Omega_d$ — кривая в области Ω, параллельная границе $\partial\Omega$ и находящаяся от нее на расстоянии d [10,263]. Область между $\partial\Omega_d$ и $\partial\Omega$ обозначим через Ω_d', а через Ω_d'' обозначим ее дополнение в области Ω. Если $x \in \partial\Omega_d''$, то $r \ge d$. Если $x \in \Omega_d'$, то $r \ge 2^{-1} r_0 \ge 2^{-1} \tilde{c} \left|\sigma_0\right|$, при этом $r_0 = \left|x' - x_0\right|$, $\sigma_0 = s' - s_0$. Здесь $x_0 \in \partial\Omega$ — основание перпендикуляра, опущенного из x на $\partial\Omega$; s_0 — значение параметра s, соответствующее точке x_0. Имеем следующие оценки:

$$\int_{\partial\Omega}\int_0^T \left|a(r,\tau)\right| d\tau ds' \le \left(4\pi\right)^{-1} \max_{\lambda\in[0,\infty)} \left\{\lambda^{1/4} \exp\left[-\lambda \Big/ \left(4a^2\right)\right]\right\} \int_{-S}^{S} d\sigma \Big/ \sqrt{2^{-1}\tilde{c}\left|\sigma\right|} \int_0^T \tau^{-3/4} d\tau \quad (x \in \Omega_d'),$$

$$\int_{\partial\Omega}\int_0^T \left|a(r,\tau)\right| d\tau ds' \le \tilde{c}''' \max_{\tau\in(0,\infty)} \tau^{-1} \exp\left[-d^2 \Big/ \left(4a^2\tau\right)\right] \quad (x \in \Omega_d''),$$

$$\int_{\partial\Omega}\int_0^T \left|\partial_{\mathbf{n}_1} a(r,\tau)\right| d\tau ds' \le \tilde{c}'' \max_{\lambda\in[0,\infty)} \lambda \exp\left[-\lambda \Big/ \left(4a^2\right)\right] \quad (x \in \Omega), \qquad (4.10)$$

С помощью оценок (4.10) несложно доказывается следующая теорема:

Теорема 9. *Пусть $\partial\Omega \in C^2$ и $x \in \Omega$. Тогда операторы $\breve{G}_i(x)$ сходятся при $L \to \infty$ по операторной норме к соответствующим операторам $\tilde{G}_i(x)$ $(C^1(\partial\Omega) \to C(\partial\Omega))$ равномерно по N и $x \in \Omega$ (M фиксировано) с порядком аппроксимации $O(h_s)$.*

В силу оценок (4.10) операторы $\breve{G}_i(x)$ $(L, \tilde{N} \in \mathbf{N},\ x \in \Omega)$ ограничены в сокупности. Поэтому на основании теорем 8, 9 делаем вывод о равномерной сходимости операторов $\breve{R}_i^{\pm}(x)$ в области Ω:

Следствие 3. *Пусть $\partial\Omega \in C^4$ и $x \in \Omega$. Тогда операторы $\breve{R}_i^{\pm}(x)$ $(N \in \mathbf{N}')$ сходятся при $L, N \to \infty$ и фиксированном M по операторной норме к соответствующим операторам $R_i^{\pm}(x)$ $(C_{1,2}^B(\partial\Omega) \to L_2)$ равномерно по $x \in \Omega$ с порядком аппроксимации $O\left(h_\tau + h_s\right)$.*

Итак, операторы $\breve{R}_i^{\pm}(x)$ аппроксимируют операторы $R_i^{\pm}(x)$, которые, в свою очередь, разрешают задачи (2.1). Операторы $\breve{R}_i^{\pm}(x)$ являются дискретными лишь по координатной переменной s. Для завершения построения вычислительного алгоритма остается осуществить их дискретизацию по координатным переменным t и y в случае $B = B_t + B_y + p$ или только по t в случае $B = B_t + p$.

Рассмотрим вначале случай $B = B_t + B_y + p$, $L_2 = L_2(I_Y \times I_T)$. Введем в рассмотрение пространства $C^{m,n}$ $(m,n = 0,1,...)$, состоящие из функций $f(x,y,t)$, имеющих непрерывные на

множестве $\partial\Omega\times\overline{I}_Y\times\overline{I}_T$ производные $\partial_y^j f(x,y,t)$ ($j=\overline{0,m}$) и $\partial_t^k f(x,y,t)$ ($k=\overline{0,n}$). В пространстве $C^{0,0}$ введем норму: $\|\mathbf{f}\|_{C^{0,0}}=\max\limits_{(x,y,t)\in\partial\Omega\times I_Y\times I_T}|f(x,y,t)|$, и будем считать , что $C^{0,0}\subset C(\partial\Omega)$.

Пусть $y_j=jh_y$ ($h_y=Y/J$, $j=\overline{0,J}$, $J/2\in\mathbf{N}$). В пространстве $C^{0,0}$ определим проекционные операторы P_J: $\mathbf{f}_J=P_J\mathbf{f}$, при этом $f_J(x,y_j,t)=f(x,y_j,t)$, и на каждом промежутке $[y_{2j},y_{2j+2}]$ ($j=\overline{0,J/2-1}$) функции $f_J(x,y,t)$ при фиксированных (x,t) описываются квадратными трехчленами. Кроме того, пусть $t_n=\tau_n=nh_t$ ($h_t=h_\tau$, $n=\overline{0,N}$, $N/2\in\mathbf{N}$). Аналогично с помощью кусочно-квадратичной интерполяции вдоль переменной t определим в пространстве $C^{0,0}$ операторы P_N: $\mathbf{f}_N=P_N\mathbf{f}$ ($f_N(x,y,t_n)=f(x,y,t_n)$). Используя представление интерполяционных трехчленов в форме Лагранжа, легко видеть, что операторы P_J и P_N ограничены: $\|P_J\|=\|P_N\|\le 1$. Если $\mathbf{f}\in C^{3,3}$, то имеют место оценки:

$$\|P_JP_N\mathbf{f}-\mathbf{f}\|_{C(\partial\Omega)}\le 2^{-1}\sqrt{YT}\left(\|\partial_y^3 f(x,y,t)\|_{C^{0,0}}h_y^3+\|\partial_t^3 f(x,y,t)\|_{C^{0,0}}h_\tau^3\right). \qquad (4.11)$$

Операторы $\breve{R}_i^{\pm}(x)$ ($L,\tilde{N}\in\mathbf{N}$, $x\in\Omega$) ограничены в совокупности в силу такой же ограниченности операторов $\breve{G}_i(x)$ ($L,\tilde{N}\in\mathbf{N}$, $x\in\Omega$) и $\left(\breve{G}_i^{\pm}\right)^{-1}$ ($L,N\in\mathbf{N}$). Операторы P_L, P_J, P_N также ограничены в совокупности. Поэтому на основании следствий 2, 3 и оценки (4.11) имеем следующее утверждение:

Следствие 4. *Пусть* $\partial\Omega\in C^4$. *Если* $\mathbf{w}_i^{\pm}\in C_{2,2}^B(\partial\Omega)\cap C^{3,3}$, *то функции* $\tilde{\mathbf{u}}_i^{\pm}(x)=\breve{R}_i^{\pm}(x)P_LP_JP_N\mathbf{w}_i^{\pm}$ ($N\in\mathbf{N}'$) *сходятся при* $L,J,N\to\infty$ *и фиксированном* M *к решению задачи (2.1) в норме пространства* L_2 *равномерно по* $x\in\tilde{\Omega}$ *с порядком аппроксимации* $O\left(h_\tau^{3/2}+h_s^2\ln h_s+h_y^3\right)$. *Если* $\mathbf{w}_i^{\pm}\in C_{1,2}^B(\partial\Omega)\cap C^{3,3}$, *то функции* $\tilde{\mathbf{u}}_i^{\pm}(x)$ ($N\in\mathbf{N}'$) *сходятся при* $L,J,N\to\infty$ *и фиксированном* M *к решению задачи (2.1) в норме пространства* L_2 *равномерно по* $x\in\Omega$ *с порядком аппроксимации* $O\left(h_\tau+h_s+h_y^3\right)$. *Если же* $\mathbf{w}_i^{\pm}\in C^{0,0}$, *то существует число* $c>0$, *не зависящее от* $L,J,N\in\mathbf{N}$, *такое, что* $\max\limits_{x\in\Omega}\|\tilde{\mathbf{u}}_i^{\pm}(x)\|_{L_2}\le c\|\mathbf{w}_i^{\pm}\|_{C^{0,0}}$.

Интегральные выражения (2.3) позволяют вычислить полугрупповые операторы $T_y(\tau)$ ($\tau>0$) на интерполянтах $P_J\mathbf{f}$ в виде конечных сумм:

$$\left(T_y(\tau)P_J\mathbf{f}\right)(x,y,t)=\sum_{j=0}^{J}\eta_j(\tau,y)f(x,y_j,t), \qquad (4.12)$$

причем значения функций $\eta_j(\tau,y)$ вычисляются точно. Действие тождественного оператора $T_y(0)$ на интерполянтах также описывается равенствами (4.12), где $\eta_{2j+k}(\tau,y)=\varphi_k((y-y_{2j})/h_y)$, при этом $y\in[y_{2j},y_{2j+2}]$, $j=\overline{0,J/2-1}$,

$$\varphi_k(x)=\prod_{k'=\overline{0,2}(k'\ne k)}(x-k')\Big/\prod_{k'=\overline{0,2}(k'\ne k)}(k-k')\ \ (x\in[0,2]),\ \ k=\overline{0,2}.$$

Окончательно равенство $\tilde{\mathbf{u}}_i^{\pm}(x)=\breve{R}_i^{\pm}(x)P_LP_JP_K\mathbf{w}_i^{\pm}$ может быть записано в следующем скалярном виде:

$$\breve{u}_i^{\pm}(x,t,y)=\sum_{l=1}^{L}\sum_{j=0}^{J}\sum_{n=0}^{N_t+2}\theta_{i,l,j,n}^{\pm}(x,y,t)\,w_i^{\pm}(x_l,y_j,t_{N_t+2-n}). \qquad (4.13a)$$

Здесь $N_t/2$ — целая часть дроби $t/(2h_t)$; коэффициенты $\theta_{i,l,j,k}^{\pm}(x,y,t)$ вычисляются с помощью формул:

$$\theta^{\pm}_{i,l,j,0}(x,y,t)=\sum_{m=0}^{\tilde N_{t0}}\mu^{\pm}_{i,l,j,m}(x,y)\,\varphi_2\left((t-\tilde\tau_m-t_{N_t})/h_t\right),$$

$$\theta^{\pm}_{i,l,j,2n+1}(x,y,t)=\sum_{m=K_n}^{K_{n+1}-1}\mu^{\pm}_{i,l,j,m}(x,y)\,\varphi_1\left((t-\tilde\tau_m-t_{N_t-2n})/h_t\right)\quad (n=\overline{0,N_t/2}),$$

$$\theta^{\pm}_{i,l,j,2n}(x,y,t)=\sum_{k=0,1}\sum_{m=K_{n-k}}^{K_{n+1-k}-1}\mu^{\pm}_{i,l,j,m}(x,y)\,\varphi_{2-2k}\left((t-\tilde\tau_m-t_{N_t-2(n-k)})/h_t\right)\quad (n=\overline{1,N_t/2}),$$

$$\theta^{\pm}_{i,l,j,N_t+2}(x,y,t)=\sum_{m=\tilde N_t-2M+1}^{\tilde N_t}\mu^{\pm}_{i,l,j,m}(x,y)\,\varphi_0\left((t-\tilde\tau_m)/h_t\right). \qquad (4.13b)$$

В свою очередь, здесь $\mu^{\pm}_{i,l,j,m}(x,y)=\breve r^{\pm}_{i,m,l}(x)e^{-p\tilde\tau_m}\eta_j(\tilde\tau_m,y)$, где $\breve r^{\pm}_{i,m,l}(x)$ — элементы матриц $\breve C^{\pm}_{i,m}(x)$; $\tilde N_t$ — целая часть дроби $t/\tilde h_\tau$, $\tilde N_{t0}=\tilde N_t-MN_t$; $K_n=2M(n-1)+\tilde N_{t0}+1$ $(n=\overline{1,N_t/2+1})$, $K_0=0$.

Заметим, что увеличение параметра M не приводит к измельчению временно́й сетки, а лишь к увеличению объема вычислений разрешающего оператора, определяемого коэффициентами $\theta^{\pm}_{i,l,j,n}(x,y,t)$. Заметим также, что хотя в данной реализации шаг по времени h_t совпадает с шагом по параметру полугруппы h_τ (но не совпадает с $\tilde h_\tau$!), но ничто не мешает сделать его не зависящим от h_τ. Поскольку порядок аппроксимации относительно h_t выше, чем относительно h_τ, можно сделать $h_\tau<h_t$. Если, например, $h_t/h_\tau=M_1\in\mathbf{N}$ и $h_\tau/\tilde h_\tau=M_2\in\mathbf{N}$, то будут иметь место формулы (4.13), где $M=M_1M_2$.

Итак, формула (4.13a) позволяет вычислить приближенное решение $\breve u^{\pm}_i(x,t,y)$ задачи (2.1) в цилиндре в любой точке $(x,y,t)\in\Omega\times I_Y\times I_T$. При наличии готовых коэффициентов $\theta^{\pm}_{i,l,j,n}(x,y,t)$ для этого требуется $\approx LJN$ умножений и делений (УД). Коэффициенты $\theta^{\pm}_{i,l,j,n}(x,y,t)$ вычисляются с помощью коэффициентов $\breve r^{\pm}_{i,m,l}(x)$ и $\eta_j(\tau_m,y)$, которые получаем независимо друг от друга, при этом основные затраты: $O(L^3N^2)$ УД, приходятся на вычисление элементов обратной матрицы $\breve G^{\pm(-1)}_{i,n}$ по формуле (4.4), т.е. получение сеточного оператора, разрешающего двумерное ГИУ. Непосредственно на вычисление $\theta^{\pm}_{i,l,j,n}(x,y,t)$ по формулам (4.13b) требуется $O(LJN)$ УД, на $\breve r^{\pm}_{i,m,l}(x)$ по формулам (4.9) — $O(L^2N^2M)$ УД, на $\breve a_{i,n,lk}$, $\breve a_{i,m,l}(x)$, $\eta_j(\tau_m,y)$ — $O(L^2N)$, $O(LNM)$, $O(JN)$ УД, соответственно. Если решение $\breve u^{\pm}_i(x,t,y)$ получаем при L_0, J_0, N_0 значениях переменных x, y, t, соответственно, то объем вычислений для $\breve u^{\pm}_i(x,t,y)$ и $\theta^{\pm}_{i,l,j,n}(x,y,t)$ возрастает в $L_0J_0N_0$ раз, а для $\breve r^{\pm}_{i,m,l}(x)$, $\eta_j(\tau_m,y)$ — в L_0, J_0 раз, соответственно (затраты на $\breve G^{\pm(-1)}_{i,n}$, разумеется, остаются прежними).

Таким образом, в рамках данной задачи используется возможность разделения вычислений по переменным x и y. Это позволяет значительно сократить расходы на получение разрешающих ее сеточных операторов, которые, в свою очередь, обеспечивают выигрыш при получении решения в случае $L_0J_0N_0\square LJN$. Действительно, если не использовать разделения переменных x и y, то для нахождения сеточного оператора, разрешающего трехмерное ГИУ на полной поверхности цилиндра $\partial\Omega\times Y$ и равномерной временно́й сетке, требуется $O(L^3J^3N^2)$ УД. Если же решать трехмерное ГИУ методом Гаусса, то каждый раз при изменении значений граничной функции $w^{\pm}_i(x,y,t)$ необходимо $O(L^2J^2N^2)$ УД, поэтому при условии $L_0J_0N_0\square LJN$ использование готовых разрешающих операторов более эффективно..

В случае $B = B_t + p$, $L_2 = L_2(I_T)$ по аналогии получаем утверждение:

Следствие 5. *Пусть* $\partial\Omega \in C^4$. *Если* $\mathbf{w}_i^{\pm} \in C_{2,2}^B(\partial\Omega) \cap C^3$, *то функции* $\tilde{\mathbf{u}}_i^{\pm}(x) = \breve{R}_i^{\pm}(x) P_L P_N \mathbf{w}_i^{\pm}$ *(*$N \in \mathbf{N}'$*) сходятся при* $L, N \to \infty$ *и фиксированном* M *к решению задачи (2.1) в норме пространства* L_2 *равномерно по* $x \in \tilde{\Omega}$ *с порядком аппроксимации* $O\left(h_\tau^{3/2} + h_s^2 \ln h_s\right)$. *Если* $\mathbf{w}_i^{\pm} \in C_{1,2}^B(\partial\Omega) \cap C^3$, *то функции* $\tilde{\mathbf{u}}_i^{\pm}(x)$ *(*$N \in \mathbf{N}'$*) сходятся при* $L, N \to \infty$ *и фиксированном* M *к решению задачи (2.1) в норме пространства* L_2 *равномерно по* $x \in \Omega$ *с порядком аппроксимации* $O\left(h_\tau + h_s\right)$. *Если же* $\mathbf{w}_i^{\pm} \in C^0$, *то существует число* $c > 0$, *не зависящее от* $L, N \in \mathbf{N}$, *такое, что* $\max\limits_{x \in \Omega} \left\| \tilde{\mathbf{u}}_i^{\pm}(x) \right\|_{L_2} \le c \left\| \mathbf{w}_i^{\pm} \right\|_{C^0}$.

Удаляя переменную y и индекс j, получаем формулы, аналогичные (4.13), где $\mu_{i,l,m}^{\pm}(x) = \breve{r}_{i,m,l}^{\pm}(x) e^{-p\tau_m}$. Заметим, что при $M = 1$ формулы (4.13) определяют приближенные решения задач (2.1) в плоской области Ω, полученные в рамках МГЭ в непрямой формулировке на основе кусочно-постоянной аппроксимации граничной функции $w_i^{\pm}(x,t)$ [7,168].

5. Вычислительные эксперименты

Рассмотрим численное решение внутренних трехмерных и "плоских" задач (2.1) в случае, когда граница $\partial\Omega$ представляет собой окружность радиуса $R = 1$, при этом $T = Y = 1$, $a = 1$, $p = 0$. Решения "плоских" задач вычисляются на окружностях $\partial\Omega_d$, отстоящих от границы $\partial\Omega$ на расстоянии d, в узлах (x_l, t_n), получаемых из (x_l, t_n) в результате подобного отображения $\partial\Omega$ на $\partial\Omega_d$. Решения трехмерных задач вычисляются на круговых цилиндрических поверхностях $\partial\Omega_d \times I_Y$ в узлах (x_l, y_j, t_n). Таким образом, $L_0 = L$, $J_0 = J$, $N_0 = N$. Мелкость пространственно-временно́й сетки определяется значениями $L = N = 30$, $J = 16$. При вычислении коэффициентов $\breve{a}_{i,m,l}(x)$ и $\breve{a}_{i,n,lk}$ интегрирование по s' осуществляется с помощью 12-точечной формулы Гаусса. Граничная функция w_i^+ на цилиндрической поверхности задается формулой $w_i^+(\varphi, y, t) = f(y) f(t) \sin\varphi$ (φ — полярный угол), а на границе круга — формулой $w_i^+(\varphi, t) = f(t) \sin\varphi$, при этом $f(x) = 16x^2(1-x)^2$. "Точные" решения $\bar{\mathbf{u}}_i$ $(i = 1,2)$ "плоских" и трехмерных задач (2.1), заданные в узлах (x_l, t_n) и (x_l, y_j, t_n), соответственно, находятся с помощью функций Грина, причем интегрирование функции Грина по временно́й переменной на интервале $[0; 5\times10^{-4}]$ осуществляется численно с помощью 12-точечной формулы Гаусса, а все остальные интегралы от функции Грина вычисляются с помощью точного почленного интегрирования ее как ряда.

Приближенные решения "плоских" и трехмерных задач (2.1), полученные с помощью формулы (4.13) в точках (x_l, t_n) и (x_l, y_j, t_n), соответственно, обозначим через $\breve{\mathbf{u}}_i$. Близость сеточных функций $\breve{\mathbf{u}}_i^+$ и $\bar{\mathbf{u}}_i^+$ определяется величиной относительного среднеквадратичного отклонения: $\delta u_i = \left\| \Delta\mathbf{u}_i \right\| \Big/ \left\| \bar{\mathbf{u}}_i^+ \right\| \times 100\%$, где $\Delta\mathbf{u}_i = \breve{\mathbf{u}}_i^+ - \bar{\mathbf{u}}_i^+$, $\|\cdot\|$ — среднеквадратичная норма. Будем обозначать через $\delta\bar{u}_i^M$ и $\delta\breve{u}_i^M$ значения δu_i для "плоских" и трехмерных задач, соответственно, при заданном значении M.

Как уже отмечалось, решения $\breve{\mathbf{u}}_i$ "плоской" задачи при $M = 1$ можно считать полученными в рамках классического "двумерного" МГЭ на основе кусочно-постоянной аппроксимации. Можно предположить, что его точность не ниже точности соответствующего "трехмерного" МГЭ, примененного к задачам (2.1) в цилиндре $\Omega \times I_Y$ и реализованного на

$L \times J \times N$ граничных элементах (при равных в обоих случаях L и N). Поэтому будем сравнивать точность предлагаемого метода с точностью $\delta\bar{u}_i^1$.

Таблица

Относительные среднеквадратичные отклонения δu_i (в процентах)

d	M	"плоские"		$h_0 = h_Y = \infty$		$h_0 = h_Y = 0$		$h_0 = h_Y = 1$	
		δu_1	δu_2	δu_1	δu_2	δu_1	δu_2	δu_1	δu_2
0.9	1	0.21	0.28	0.27	0.63	0.29	0.28	0.31	0.25
	2	0.17	0.24	0.26	0.24	0.23	0.24	0.21	0.20
0.5	1	0.23	0.27	0.41	0.53	0.27	0.29	0.32	0.27
	2	0.17	0.24	0.28	0.25	0.18	0.25	0.21	0.21
0.1	1	0.81	0.44	5.31	2.77	7.19	1.85	7.31	2.25
	2	0.34	0.26	2.52	0.91	3.13	0.61	3.28	0.71
	4	0.13	0.24	0.77	0.27	0.74	0.30	0.88	0.29
	8	0.12	0.24	0.32	0.15	0.30	0.26	0.21	0.23
0.05	1	0.63	0.41	3.84	3.52	5.35	2.34	5.76	2.96
	2	0.33	0.35	2.22	1.11	2.87	0.84	3.02	1.12
	4	0.15	0.27	1.08	0.42	1.24	0.40	1.36	0.56
	8	0.06	0.23	0.36	0.24	0.27	0.29	0.20	0.40

Данные, приведенные в таблице, свидетельствуют о хорошем совпадении точности $\delta\breve{u}_i^1$ с точностью $\delta\bar{u}_i^1$ на достаточном удалении от границы. При приближении к границе $\partial\Omega$ точность $\delta\breve{u}_i^1$ значительно отстает от точности $\delta\bar{u}_i^1$, особенно $\delta\breve{u}_1^1$ от $\delta\bar{u}_1^1$, но падение точности удается скомпенсировать за счет уменьшения шага дискретизации параметра полугруппы, т.е. увеличения объема вычисления сеточных операторов (но не измельчения пространственно-временно́й сетки!). А именно, $\delta\breve{u}_1^4 \approx \delta\bar{u}_1^1$, $\delta\breve{u}_2^4 < \delta\bar{u}_2^1$ при $d = 0.1$ и $\delta\breve{u}_1^8 < \delta\bar{u}_1^1$, $\delta\breve{u}_2^4 \approx \delta\bar{u}_2^1$ при $d = 0.05$. При этом объем вычислений, необходимых для получения разрешающих задачу (2.1) в точках $(\tilde{x}_l, y_j, t_k)$ сеточных операторов, возрастает не более, чем в $M = 8$ раз. Для сравнения, вычисление аналогичных сеточных операторов на основе классического "трехмерного" МГЭ требует в $J^3/M \approx 500$ раз бóльших затрат.

Сравним данный метод, который назовем для краткости "полугрупповым", со "спектральным" методом вычисления разрешающих задачи (2.1) сеточных операторов [8], также основанном на разделении вычислений по переменным x и y и аналитическом решении (2.2). "Спектральный" метод использует представление "трехмерных" операторов типа $\breve{G}_i(x)$ и $\breve{G}_i^{\pm}$ в виде прямой суммы J аналогичных "плоских" операторов, в результате чего "трехмерные" операторы приобретают вид полиномов, образованных степенями оператора $U_t(h_\tau)$, тогда как в "полугрупповом" методе такие операторы представляют собой полиномы, образованные степенями оператора $U_t(\tilde{h}_\tau)U_y^p(\tilde{h}_\tau)$. Представление в виде прямой суммы получается в результате разложения "трехмерных" операторов по базису, образованному собственными функциями сеточных операторов, аппроксимирующих операторы B_y. Благодаря разложению появляется возможность более точно аппроксимировать по переменной τ каждую компоненту функций $a(r,\tau)U_y(\tau)$ и $\partial_{\mathbf{n}_i} a(r,\tau)U_y(\tau)$. Особенно это важно для компонент, соответствующих большим собственным значениям μ_j, плохая аппроксимация которых в рамках "полугруппового" метода и вызывает падение точности вблизи $\partial\Omega$. Точность решения трехмерных задач (1.2) на основе "спектрального" метода близка к точности решения

соответствующих “плоских” задач даже вблизи границы $\partial\Omega$ (при одной и той же мелкости сетки на $\partial\Omega$ и I_T и достаточно мелкой сетке на I_Y). Об этом свидетельствует пример, приведенный в [8], где рассматриваются те же, что и в настоящем параграфе, задачи в круглом цилиндре с теми же значениями $L = N = 30$, $J = 16$.

Итак, если в “спектральном” методе точность $\delta\breve{u}_i^1$ вблизи границы $\partial\Omega$ достигается за счет более точной аппроксимации по параметру полугруппы, то в “полугрупповом” методе та же точность может быть достигнута за счет избыточной мелкости шага по параметру полугруппы по сравнению с шагом по времени. В “спектральном” методе затраты на вычисление операторов типа $\left(\breve{G}_i^{\pm}\right)^{-1}$ можно оценить как $O(L^3 J N^2)$ УД. Таким образом, при получении решения в небольшом количестве точек “полугрупповой” метод является более экономичным (примерно в J раз), особенно при получении решения вдали от границы $\partial\Omega$. Разумеется, эти подходы можно комбинировать, т.е. использовать избыточную мелкость шага по параметру полугруппы $U_t(\tau)$ в “спектральном” методе.

Литература

1. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложение к обратным задачам теплообмена. - М.: Наука, 1988. - 287 с.
2. Иванов Д.Ю. Решение задач теплопроводности в прямых цилиндрах с использованием полугрупповой симметрии // Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии: Материалы II международной заочной науч.-практ. конф., 19 марта 2013 г. - М.: Международный центр науки и образования, 2013. - С. 26-35.
3. Иванов Д.Ю. Решение двумерных краевых задач, соответствующих начально-краевым задачам на прямом цилиндре // Дифференц. уравнения. - 2010. - Т. 46. - № 8. - С. 1094-1103.
4. Иванов Д.Ю., Тарасов Р.П. Численное решение интегральных уравнений с однопараметрической полугруппой симметрий // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. - 1996. - Т. 36. - № 7. – С. 54-76.
5. Иванов Д.Ю. Обоснование одного алгоритма численного решения обратных граничных задач теплопроводности, построенного с учетом полугрупповой симметрии таких задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. - 1998. - Т. 38. - № 12. - С. 2028-2042.
6. Hongtao Y. A new analysis of Volterra-Fredholm boundary integral equations of second kind // Northeast. Math. J. - 1997. - Vol. 13(3). - P. 325-334.
7. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. - М.: Мир, 1987. — 524 с.
8. Ivanov D.Yu. Spectral-semigroup method of numerical solution of problems of thermal conductivity in direct cylinders with zero boundary conditions on the grounds and zero initial condition // Science and Education: materials of III international research and practice conference, April 25th-26th, 2013. –Munich, Germany, 2013. - Vol. I. – P. 18-24.
9. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. - М.: Наука, 1967. - 464 с.
10. Михлин С.Г. Курс математической физики. - М.: Наука, 1968. - 575 с.