

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ СЛОЖНОСТИ ГЕНЕТИЧЕСКОГО КОДА ГРУППЫ

С.Г. Иванов *

Челябинский государственный университет

*Доказывается, что каждый сбалансированный код предсложности 3 или 4, определяющий единичную группу, имеет Q^{**} -тривиализацию.*

Ключевые слова: проблема Эндрюса-Кэртиса, сложность кода.

1. Введение

Следуя [1], будем называть копредставление группы генетическим кодом группы или, просто, кодом. Каждый сбалансированный [2] конечный код Q^{**} -эквивалентен [3] сбалансированному коду, в котором все соотношения циклически несократимы и имеют длину 3. Предсложностью сбалансированного кода группы называется число образующих какого-нибудь Q^{**} -эквивалентного кода, все соотношения которого циклически несократимы и имеют длину 3. Сложностью сбалансированного кода группы называется минимальная его предсложность.

Один из вариантов открытой проблемы Эндрюса-Кэртиса [2–5], см. также библиографию в [3]) можно сформулировать так: верно ли, что каждый сбалансированный код единичной группы имеет сложность 0? В [4] доказано, что коды предсложности 2 имеют сложность 0. Здесь мы докажем, что коды предсложности 3 и 4 имеют сложность 0 и подготовим некоторую информацию для доказательства аналогичного результата о кодах предсложности 5 и 6.

Сложность кода $\langle a, b \mid ab^2a^{-1} = b^3, ba^2b^{-1} = a^3 \rangle$ в настоящий момент неизвестна. Докажем, что он имеет предсложность 7. Перепишем его следующим образом:

$$\langle a, b \mid b^{-1}ab^2a^{-1}b^{-2}, a^{-1}ba^2b^{-1}a^{-2} \rangle.$$

Введем три новых образующих x, y, z и три соотношения: $x = a^{-1}b, y = b^2, z = a^2$. Получим код

$$\langle a, b, x, y, z \mid x = a^{-1}b, y = b^2, z = a^2, x^{-1}ya^{-1}y^{-1}, xzb^{-1}z^{-1} \rangle.$$

Работа поддержана грантом РФФИ №96-01-00847.

Введем еще два образующих t и u и два соотношения $t = x^{-1}y$, $u = xz$. Получим код ранга 7:

$$\langle a, b, x, y, z, t, u \mid axb^{-1}, b^2y^{-1}, a^2z^{-1}, xty^{-1}, xzu^{-1}, at^{-1}y, bu^{-1}z \rangle.$$

Поэтому исходный код имеет предсложность 7. Исследование кодов предсложности меньше семи необходимо для уточнения определения сложности кода.

2. Подсчет числа кодов

Каждый код предсложности n Q^{**} -эквивалентен коду вида

$$\langle x_1, \dots, x_n \mid R_1, \dots, R_n \rangle,$$

где все соотношения циклически несократимы и имеют длину 3. Чтобы оценить объем работы, вычислим число кодов этого вида. Два кода будем считать равными, если равны множества их соотношений (в каждом множестве n соотношений). Все циклические перестановки соотношения и все слова, обратные к ним, будем считать за одно соотношение. Это условие будет выполнено, если мы примем, что первая буква в соотношении имеет положительный показатель степени и наименьший номер из всех букв этого соотношения. Будем предполагать, что ни одно соотношение не является кубом.

Приведем список соотношений, имеющих вхождение квадрата образующего:

$$\begin{array}{cccc} x_1^2 x_2^{\pm 1} & x_1^2 x_3^{\pm 1} & \dots & x_1^2 x_n^{\pm 1} \\ x_1 x_2^{\pm 2} & x_2^2 x_3^{\pm 1} & \dots & x_2^2 x_n^{\pm 1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 x_n^{\pm 2} & x_2 x_n^{\pm 2} & \dots & x_{n-1} x_n^{\pm 2} \end{array}.$$

Число таких соотношений равно $2n(n-1)$.

Теперь вычислим число соотношений, не имеющих вхождений квадратов образующих. Соотношение, начинающееся с x_i имеет вид $x_i x_i^{\pm 1} x_j^{\pm 1}$, где $i \neq j$, $i > 1$, $j > 1$. Число таких соотношений равно $4(n-1)(n-2)$. Аналогично, число соотношений, начинающихся с x_2 равно $4(n-2)(n-3)$ и так далее. Если обозначить число всех соотношений (имеющих и не имеющих вхождения квадратов образующих) буквой N , то

$$N = 2n(n-1) + 4(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-2)(n-1)) =$$

$$\begin{aligned}
 &= 4(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n-1)) - 2n(n-1) = \\
 &= 4(1 + 1^2 + 2 + 2^2 + \dots + (n-1) + (n-1)^2) - 2n(n-1) = \\
 &= \frac{2}{3}n(n-1)(2n-1).
 \end{aligned}$$

Искомое число кодов обозначим N_n . Очевидно $N_n = C_N^n$. В частности, $N_3 = 1140$, $N_4 = 367290$, $N_5 = 190578024$, $N_6 = 147008596660$.

3. Уменьшение количества кодов

Будем говорить, что два соотношения длины 3 имеют общие большие отрезки, если существуют циклические пересадки S и T этих соотношений такие, что два слова $S^{\pm 1}$ и $T^{\pm 1}$ имеют общие отрезки длины 2. Если два соотношения сбалансированного кода, все соотношения которого имеют длину 3, имеют общие большие отрезки, то можно понизить предсложность этого кода.

Сбалансированный код назовем комбинаторным кодом, если все его соотношения имеют длину 3, он определяет единичную фактор-группу по коммутанту и его соотношения не имеют общих больших отрезков. Из множества всех сбалансированных кодов ранга n , все соотношения которых имеют длину 3, необходимо выделить множество всех комбинаторных кодов, определяющих единичную группу. Опишем некоторые соображения, позволяющие уменьшить количество выделенных кодов.

Мы не будем рассматривать коды, допускающие очевидное понижение предсложности, и, в частности, коды, чьи соотношения имеют общие большие отрезки. Если некоторая образующая входит только в одно соотношение, то тоже можно понизить предсложность кода. Можно понизить предсложность кода и в том случае, когда некоторая часть кода сама образует комбинаторный код меньшей предсложности, определяющий единичную группу, при условии, что все комбинаторные коды этой меньшей предсложности, определяющие единичную группу, имеют Q -тривиализацию [3].

Вычисление определителя матрицы соотношений позволяет исключить коды, определяющие не единичную фактор-группу по коммутанту. В частности, никакое соотношение комбинаторного кода не может быть кубом. Никакие два соотношения комбинаторного кода не могут быть составлены из одних и тех же двух или из одних и тех же трех образующих. В этих случаях все числа линейной комбинации соответствующих строчек матрицы соотношений имеют общий простой делитель.

Последовательность соотношений $x^2y^{\pm 1}, y^2z^{\pm 1}, \dots, u^2v^{\pm 1}$ назовем циклом, если $v = x$. Комбинаторный код не содержит циклов. В самом деле, исключая из соотношений цикла образующие $y, z, \dots$, мы приходим к соотношению $x^{\pm 2^m} = 1$, где m — длина цикла. Так как фактор-группа по коммутанту единичная, то $m = 0$.

Два кода назовем Q_0 -эквивалентными, если можно преобразовать один в другой перестановками и обращениями образующих, а также обращениями соотношений. Соответственно определяются Q_0 -преобразования. Q_0 -преобразования образуют группу, это облегчает проверку Q_0 -эквивалентности кодов. Если некоторый код имеет Q -тривиализацию, то и все Q_0 -эквивалентные коды тоже ее имеют. Мы будем использовать эти соображения при выборе обозначений образующих.

Количество вхождений образующей x в соотношения кода назовем кратностью x и обозначим $k(x)$. Строчку кратностей, расположенных в порядке убывания, назовем типом кода. Тип комбинаторного кода не является его Q -инвариантом. Каждый комбинаторный код Q^{**} -эквивалентен коду типа $(3, 3, \dots, 3)$ [3].

4. Хорошие образующие

Будем говорить, что образующая y комбинаторного кода выражается через образующую x , если y есть x или y входит в соотношение, другие две образующие которого выражаются через x . Все образующие, которые выражаются через x , назовем x -хорошими, или, просто, хорошими, если из текста ясно, какая образующая играет роль x . Очевидно, x -хорошие образующие, отличные от x , существуют тогда и только тогда, когда некоторое соотношение кода имеет вхождение x^2 . Если все образующие комбинаторного кода x -хорошие, то этот код Q^{**} -эквивалентен коду вида $\langle x || x^k \rangle$. Так как код определяет единичную фактор-группу по коммутанту, то $k = \pm 1$. Следовательно, такой код имеет Q -тривиализацию.

Лемма 1. *Если каждое соотношение комбинаторного кода содержит x -хорошую образующую, то код имеет Q -тривиализацию.*

Доказательство. Назовем соотношение хорошим, если все его образующие x -хорошие, и плохим в противном случае. Каждое плохое соотношение содержит одну хорошую образующую и две не обязательно различных плохих. Поэтому нет плохих соотношений: если бы они были, то приравняв к единице все хорошие образующие, мы получили бы код, не определяющий единичную фактор-группу по коммутанту. Следовательно, все образующие — хорошие, и код имеет Q -тривиализацию. Лемма доказана.

Лемма 2. *Комбинаторный код ранга n , имеющий n или больше вхождений в соотношения образующей x , имеет Q -тривиализацию.*

Доказательство. Из условия следует, что кратность x равна n или $n + 1$. Если кратность x равна $n + 1$, то в каждое соотношение входит x , и код имеет Q -тривиализацию по лемме 1. Пусть кратность x равна n . Если нет вхождения x^2 , то все соотношения x -плохие, и в каждое соотношение входит x . Мы видели при доказательстве леммы 1, что это невозможно.

Значит есть вхождение x^2 . Пусть x^2 входит в R_1 , x не входит в R_n , тогда в остальные соотношения x входит в первой степени. Если в R_n входит x -хорошая образующая, то код имеет Q -тривиализацию. Пусть хорошая образующая не входит в R_n . Тогда соотношение R_n плохое, а R_1 хорошее. Число хороших соотношений обозначим буквой m .

Так как $k(x) = n$, то тип кода равен $(n, 4, 2, \dots, 2)$ или $(n, 3, 3, 2, \dots, 2)$. В плохих соотношениях хорошей образующей является только x . Все остальные хорошие образующие входят только в хорошие соотношения. Докажем, что все хорошие образующие и все хорошие соотношения образуют комбинаторный код.

Допустим, что некоторая хорошая образующая, отличная от x , имеет кратность 4. Тогда все остальные образующие, отличные от x , имеют кратность 2. Так как общее число вхождений образующих в хорошую часть кода равно $3m$, и число вхождений x в хорошую часть кода равно $m + 1$, то число хороших образующих равно $2 + \frac{1}{2}(3m - (m + 1 + 4))$. Однако это число не целое. Значит хорошая образующая, отличная от x , не может иметь кратность 4.

Допустим, что некоторая хорошая образующая, отличная от x , имеет кратность 3. Тогда число мест, занятых остальными хорошими образующими, отличными от x , равно $3m - (m + 1 + 3) = 2m - 4$. Отсюда следует, что все остальные хорошие образующие имеют кратность 2, и общее число хороших образующих равно m . В этом случае хорошие образующие и хорошие соотношения составляют сбалансированный код.

Последний случай: все хорошие образующие, отличные от x , имеют кратность 2. В этом случае число хороших образующих $1 + \frac{1}{2}(2m - 1)$ будет не целым.

Мы доказали, что хорошие образующие и хорошие соотношения составляют сбалансированный код. В нем все образующие хорошие. Поэтому его можно преобразовать Q^{**} -преобразованиями в код вида $\langle x | x^k \rangle$. Так как исходный код определяет единичную фактор-группу по коммутанту, то $k = \pm 1$. Поэтому хорошие образующие и хорошие соотношения составляют комбинаторный код. Теперь из плохих соотношений можно исключить x . Тест на фактор-группу по коммутанту показывает, что при этом не появятся соотношения, являющиеся квадратами образующей. Полученный в итоге

код, очевидно, имеет Q -тривиализацию. Значит Q -тривиализацию имеет исходный код. Лемма доказана.

5. Коды предсложности 3 и 4

Любой комбинаторный код ранга 3 имеет 3 вхождения некоторой образующей. Поэтому любой код предсложности 3, определяющий единичную фактор-группу по коммутанту, имеет Q^{**} -тривиализацию по лемме 2.

Рассмотрим комбинаторный код ранга 4, имеющий вхождение квадрата образующей. Обозначим $R_1 = x^2y$. Образующие x и y x -хорошие. Пусть есть еще одна x -хорошая образующая. Так как осталась всего одна образующая и в каждое соотношение входит минимум две различные образующие, то каждое соотношение содержит хорошую образующую. Значит этот код имеет Q -тривиализацию по лемме 1.

Пусть x -хорошими являются только x и y . Тогда x и y не входят вместе в еще одно соотношение и нет вхождения y^2 . Если в каждое соотношение входит x или y , то Q -тривиализация есть по лемме 1. Если есть соотношение, не содержащее ни x , ни y , то $k(y) = 2$, и некоторая третья образующая имеет кратность 4. В этом случае Q -тривиализация есть по лемме 2. Следовательно, комбинаторный код ранга 4, имеющий вхождение квадрата образующей, имеет Q -тривиализацию.

Теперь рассмотрим комбинаторный код ранга 4, не имеющий вхождений квадратов образующих. Согласно лемме 2 можно ограничиться случаем, когда каждая образующая имеет три вхождения в соотношения кода. Если некоторые две образующие встречаются вместе в трех соотношениях, то два соотношения составлены из одних и тех же трех образующих. Поэтому можно предположить, что любые две образующие встречаются точно в двух соотношениях.

Обозначим образующие буквами x, y, z, t . Пусть x и y встречаются в R_1 и R_2 . Обозначим $R_1 = xyz$, тогда для R_2 имеется три возможности: $xy^{-1}t, xty, xty^{-1}$. Пусть R_3 содержит x , а $R_4 = y$. Тогда $R_3 \in \{xz^{\pm}t^{\pm}, xt^{\pm}z^{-1}\}$, $R_4 \in \{yz^{-1}t^{\pm}, yt^{\pm}z^{\pm}\}$. Мы получаем *схему кодов*

$$\langle x, y, z, t \mid xyz, \{xy^{-1}t, xty, xty^{-1}\}, \{xz^{\pm}t^{\pm}, xt^{\pm}z^{-1}\}, \{yz^{-1}t^{\pm}, yt^{\pm}z^{\pm}\} \rangle.$$

В этой схеме 147 кодов. Число матриц соотношений этих кодов меньше: всего 32. Вычисляем определители этих матриц. Оставляем только те коды, определители которых равны ± 1 , и соотношения которых не имеют общих больших отрезков. Остается 12 кодов, ради краткости мы опускаем

образующие в записи кодов.

$$\begin{aligned}
 (1) \|xyz, xty, xzt, yt^{-1}z\| & \quad (2) \|xyz, xty, xzt, ytz^{-1}\| \\
 (3) \|xyz, xty, xzt, yz^{-1}t^{-1}\| & \quad (4) \|xyz, xty, xzt^{-1}, ytz\| \\
 (5) \|xyz, xty, xzt^{-1}, yt^{-1}z\| & \quad (6) \|xyz, xty, xz^{-1}t, ytz\| \\
 (7) \|xyz, xty, xz^{-1}t, ytz^{-1}\| & \quad (8) \|xyz, xty, xt^{-1}z^{-1}, ytz\| \\
 (9) \|xyz, xty^{-1}, xzt, yz^{-1}t^{-1}\| & \quad (10) \|xyz, xty^{-1}, xzt, ytz\| \\
 (11) \|xyz, xy^{-1}t, xzt^{-1}, yt^{-1}z\| & \quad (12) \|xyz, xy^{-1}t, xzt^{-1}, yt^{-1}z\|.
 \end{aligned}$$

Все 12 кодов Q_0 -эквивалентны. Поэтому достаточно тривиализовать первый из них:

$$\begin{aligned}
 \|xyz, xty, xzt, yt^{-1}z\| & \rightarrow \|xyz, xty, yxzt^{-1}, yt^{-1}z\| \rightarrow \\
 \|xyz, xty, t^{-1}tyxzt^{-1}z^{-1}z, yt^{-1}z\| & \rightarrow \|xyz, xty, t^{-1}z^2, yt^{-1}z\|.
 \end{aligned}$$

Получился комбинаторный код ранга 4, имеющий вхождение квадрата образующей. Значит коды (1) - (12) имеют Q -тривиализацию. Мы приходим к следующим результатам.

1. Все коды предсложности 3 или 4 имеют сложность 0.
2. Любой комбинаторный код ранга 3 или 4 имеет Q -тривиализацию.

Список литературы

1. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп М.: Наука, 1982
2. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп М. Мир, 1980
3. Hog-Angeloni C., Metzler W., Sieradski A. J. Two-dimensional Homotopy and Combinatorial Group Theory, Cambridge University Press, 1993.
4. Andrews J.J., Curtis M.L. *Extended Nielsen operations in free groups*// Amer Math Monthly 1966, №73 С 21 - 28
5. Григорчук Р.И. *Некоторые вопросы теории групп, связанные с геометрией*// Итоги науки и техники Сер. соврем. пробл. мат 1990. Т 58. С 191 - 261