УДК 519.61

Х. Д. Икрамов[1]

О КОНЕЧНОМ РАЦИОНАЛЬНОМ АЛГОРИТМЕ, ПРОВЕРЯЮЩЕМ КОНГРУЭНТНУЮ ДИАГОНАЛИЗУЕМОСТЬ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Пусть A — квадратная матрица порядка n, элементы которой суть рациональные или рациональные гауссовы числа. Описан метод, проверяющий возможность диагонализовать A посредством конгруэнций и использующий при этом конечное число арифметических операций (и, в комплексном случае, операций сопряжения).

Ключевые слова: подобие, жорданова форма, минимальный многочлен, конгруэнции, каноническая форма, коквадрат.

1. Введение. Пусть A — квадратная матрица порядка n, $n > 4$, элементы которой суть рациональные или рациональные гауссовы числа. Хорошо известно, что собственные значения такой матрицы в общем случае нельзя найти посредством конечного алгоритма, использующего лишь арифметические операции и радикалы. Тем самым невозможно и построение ее жордановой формы. Однако выяснить, будет ли эта жорданова форма диагональной матрицей, можно с помощью конечного числа арифметических операций, не прибегая к радикалам. Вычислительный процесс с этими свойствами, — конечность и использование только арифметических операций, — будем называть рациональным.

Опишем один из возможных рациональных алгоритмов для проверки диагонализуемости заданной матрицы A, не претендуя на его оптимальность. Алгоритм опирается на эквивалентное описание диагонализуемой матрицы как матрицы, минимальный многочлен которой не имеет кратных корней. Он состоит из следующих этапов.

А. Вычисление минимального многочлена $a(\lambda)$ матрицы A. Это можно сделать, например, так: строится последовательность натуральных степеней A^k до тех пор, пока очередная матрица A^m не станет впервые линейной комбинацией предыдущих степеней $I, A, A^2, \dots, A^{m-1}$. Если при этом

$$A^m = a_1A^{m-1} + a_2A^{m-2} + \ldots + a_{m-1}A + a_mI,$$

то

$$a(\lambda) = \lambda^m - a_1\lambda^{m-1} - a_2\lambda^{m-2} - \ldots - a_{m-1}\lambda - a_m.$$

Снова подчеркнем, что отнюдь не считаем этот метод построения минимального многочлена оптимальным. Очевидно, во всяком случае, что он рационален в указанном выше смысле. Кроме того, становится понятным введенное ограничение на природу элементов матрицы: проверки на точное равенство нулю промежуточных результатов метода, вообще говоря, невозможны для матриц с произвольными комплексными или вещественными элементами.

Б. Вычисление производной $a'(\lambda)$.

В. Проверка взаимной простоты многочленов $a(\lambda)$ и $a'(\lambda)$. Ее можно осуществить посредством алгоритма Евклида. Если НОД$(a(\lambda), a'(\lambda)) = 1$, то A — диагонализуемая матрица. В противном случае A не диагонализуема.

Напомним, что жорданова форма матрицы — это ее каноническая форма относительно преобразований подобия. В данной статье рассматриваются матричные преобразования другого типа, а именно конгруэнции. Существует два типа конгруэнтных преобразований комплексных матриц. Это, во-первых, $*$-конгруэнции, т. е. преобразования вида

$$A \mapsto Q^*AQ, \tag{1}$$

и, во-вторых, T-конгруэнции

$$A \mapsto Q^TAQ. \tag{2}$$

В обеих формулах (1) и (2) Q — произвольная невырожденная матрица.

[1] Факультет ВМК МГУ, проф., д.ф.-м.н., e-mail: ikramov@cs.msu.su

Метод проверки диагонализуемости матрицы посредством $*$-конгруэнций описан в [1, § 4.5]. Этот метод существенно использует вид канонической формы матрицы относительно данного типа конгруэнций. Если матрица диагонализуема, то он позволяет определить ее диагональную форму. Отсюда следует, что этот метод никак не может быть рациональным алгоритмом. Основная задача настоящей статьи — модифицировать его так, чтобы он стал рациональным.

В п. 2 мы приводим краткое описание канонической формы относительно $*$-конгруэнций. Изложение алгоритма из [1, § 4.5] и описание его рациональной модификации даны в п. 3. В заключительном разделе мы вкратце обсуждаем значительно менее интересный случай диагонализуемости посредством T-конгруэнций.

2. Каноническая форма относительно $*$-конгруэнций. Эта каноническая форма представляет собой блочно-диагональную матрицу, диагональные блоки которой могут иметь только один из следующих типов:

(i) жорданов блок $J_k(0)$ порядка k, $1 \leqslant k \leqslant n$, с нулем на главной диагонали. Совокупность таких блоков (если они присутствуют) образует сингулярную часть канонической формы;

(ii) ганкелевы матрицы вида

$$\Delta_k = \lambda \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & \dots & i \\ & 1 & \dots & \\ 1 & i & & \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $|\lambda| = 1$, а индекс k снова указывает порядок;

(iii) блоки четного порядка, имеющие форму

$$H_{2k}(\mu) = \begin{pmatrix} 0 & I_k \\ J_k(\mu) & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

В жордановой клетке $J_k(\mu)$ на главной диагонали стоит ненулевое число μ, модуль которого отличен от единицы. Без ограничения общности можно считать, что $|\mu| > 1$.

3. Проверка диагонализуемости. В общем случае вырожденной матрицы A присутствие в ней блоков первого типа и их порядки определяются посредством специального метода, называемого в [1] алгоритмом регуляризации. Нам этот алгоритм не понадобится, так как мы заинтересованы в специальном случае диагонализуемых матриц. Все диагональные блоки в канонической форме такой матрицы должны иметь порядок 1. Отсюда, в частности, следует, что блоков вида (4) в канонической форме диагонализуемой матрицы нет. Сингулярная же часть (если она имеется) есть попросту нулевая матрица. Разделить сингулярную и регулярную части матрицы A можно следующим образом. Пусть Q — невырожденная матрица, приводящая A к виду

$$B = Q^*AQ = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

в котором $m \times m$-подматрица B_{11}, $1 \leqslant m < n$, невырожденна. Представим Q в виде $Q = (Q_1 Q_2)$, где подматрицы Q_1 и Q_2 составлены соответственно из первых m и последних $n-m$ столбцов матрицы Q. Тогда столбцы подматрицы Q_2 образуют базис общего ядра матриц A и A^*. Построение базиса в ядре матрицы сводится к хорошо известной (и рациональной) процедуре вычисления фундаментальной системы решений для системы линейных уравнений.

Если проверка ядер матриц A и A^* выявила различия между ними, то матрица A заведомо не диагонализуема. В противном случае диагонализуемость A зависит от диагонализуемости невырожденной матрицы

$$B_{11} = Q_1^* A Q_1, \tag{5}$$

представляющей регулярную часть A. В отличие от сингулярной части, матрица (5) не определена однозначно, а изменяется в соответствии с выбором подматрицы Q_1, дополняющей Q_2 до невырожденной матрицы Q. Однако при любом выборе Q_1 каноническая форма матрицы B_{11} остается неизменной.

Теперь нужно убедиться, что в канонической форме матрицы B_{11} отсутствуют блоки вида (4), а все блоки вида (3) имеют порядок 1. Это делается так: матрице (5) сопоставляется матрица

$$C = B_{11}^{-*} B_{11}, \tag{6}$$

называемая в [1] коквадратом матрицы B_{11}. Блокам вида (4) в канонической форме матрицы B_{11} соответствуют собственные значения матрицы (6), модули которых отличны от единицы. Блоки вида (3) ассоциированы с собственными значениями матрицы C, имеющими модуль 1.

Итак, для диагонализуемости матрицы B_{11} (и, следовательно, всей матрицы A) необходимо, чтобы все собственные значения матрицы C были по модулю равны единице. Для проверки этого свойства построим ее минимальный многочлен $c(\lambda)$. Один из способов его вычисления указан во введении статьи. От многочлена $c(\lambda)$ требуется, чтобы все его корни лежали на единичной окружности.

Наряду с

$$c(\lambda) = \lambda^k + c_1\lambda^{k-1} + \ldots + c_{k-1}\lambda + c_k \tag{7}$$

рассмотрим многочлен

$$c^*(\lambda) = \lambda^k \bar{c}\big(1/\lambda\big) = \overline{c_k}\lambda^k + \overline{c_{k-1}}\lambda^{k-1} + \ldots + \overline{c_1}\lambda + 1. \tag{8}$$

Пусть $\mu = e^{i\phi}$ есть корень многочлена (7). Тогда $\bar{c}(1/\mu) = \bar{c}(\bar{\mu}) = 0$ и, следовательно, $c^*(\mu) = 0$. Таким образом, всякий корень многочлена $c(\lambda)$, имеющий модуль 1, является одновременно корнем многочлена (8). Если все корни $c(\lambda)$ лежат на единичной окружности, то многочлен $c^*(\lambda)$ с теми же корнями должен отличаться от $c(\lambda)$ лишь множителем $\overline{c_k}$. При нарушении этого простого необходимого условия $c(\lambda)$ имеет корни вне единичной окружности и матрица A не диагонализуема.

Условие это, однако, не является достаточным для нужного расположения корней. Симметричный многочлен, например $c(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 1$, вполне может иметь корни вне единичной окружности. Поэтому выполним в (7) замену переменного $\lambda = (z-i)/(z+i)$, переводящую единичную окружность плоскости λ в вещественную ось на плоскости z. Эта замена превращает $c(\lambda)$ в рациональную функцию

$$\phi(z) = \frac{f(z)}{(z+i)^k},$$

где $f(z)$ — многочлен степени не выше, чем k. Степень f может быть ниже, чем k, если точка $\lambda = -i$ есть корень многочлена $c(\lambda)$. Понижение степени на две единицы и более по сравнению с $c(\lambda)$ свидетельствует, что эта точка была для $c(\lambda)$ кратным корнем. Однако минимальный многочлен диагонализуемой матрицы не может иметь кратных корней, и в таком случае матрица A не диагонализуема.

Пусть степень $f(z)$ не меньше, чем $k-1$. Нормируем $f(z)$ делением на старший коэффициент и обозначим полученный унитарный многочлен через $g(z)$. Если все корни $c(\lambda)$ лежали на единичной окружности, то все корни $g(z)$ должны быть вещественны и, стало быть, вещественны все коэффициенты этого многочлена. Поэтому невещественность хотя бы одного коэффициента в $g(z)$ указывает на недиагонализуемость матрицы A.

Итак, можем считать g вещественным многочленом. Нужно проверить, что все корни этого многочлена вещественны. Для такой проверки есть ряд способов; можно, например, применить метод Якоби. Пусть m, $m \in \{k-1, k\}$, — степень многочлена g. Обозначим через s_l степенные суммы корней $z_1, \ldots, z_m$ этого многочлена:

$$s_l = z_1^l + z_2^l + \ldots + z_m^l, \qquad l = 0, 1, 2, \ldots .$$

Хорошо известно, что суммы s_l, $1 \leqslant l < m$, могут быть выражены через коэффициенты многочлена g, а, начиная с индекса m, эти суммы связаны линейным рекуррентным соотношением порядка m.

Составим квадратичную форму

$$J = \sum_{i,j=0}^{m-1} s_{i+j} x_i x_j .$$

Если ν — отрицательный индекс инерции этой формы, то, согласно теореме Якоби, многочлен g имеет ν различных пар комплексно-сопряженных корней. Поскольку мы хотим, чтобы g вообще не имел невещественных корней, число ν должно быть равно нулю, т. е. форма J должна быть положительно определена.

Положительную определенность вещественной ганкелевой матрицы, составленной из степенных сумм s_{i+j}, можно проверить с помощью критерия Сильвестра, рациональность которого очевидна. Если эта проверка закончится положительным результатом, то мы сможем наконец сказать, что все корни минимального многочлена $c(\lambda)$ коквадрата C (см. (6)) лежат на единичной окружности. В противном случае матрица A не диагонализуема.

Предположим, что проверка посредством критерия Сильвестра закончилась успешно. Однако, чтобы утверждать диагонализуемость матрицы A, нужно проверить еще одно свойство минимального многочлена, а именно простоту его корней. Как указано в п. 1, для этого следует убедиться во взаимной простоте многочленов $c(\lambda)$ и $c'(\lambda)$. Здесь уместно отметить, что порядки блоков вида (3) в канонической форме матрицы B_{11} совпадают с порядками соответствующих блоков в жордановой форме ее коквадрата C. Поэтому в рассматриваемой ситуации конгруэнтная диагонализуемость матрицы B_{11} равносильна диагонализуемости матрицы C посредством подобий.

Итак, мы описали конечную последовательность рациональных вычислений, позволяющую установить или опровергнуть возможность диагонализации заданной матрицы A с рациональными или гауссовыми элементами посредством $*$-конгруэнций.

4. Случай T-конгруэнций. Этот случай оказывается почти тривиальным. Очевидно, что T-конгруэнции сохраняют симметрию трансформируемой матрицы. Отсюда следует, что всякая матрица, диагонализуемая посредством T-конгруэнций, должна быть симметричной. С другой стороны, из теории квадратичных форм известно, что всякая симметричная матрица действительно может быть диагонализована с помощью преобразований этого типа (см., например, [2, § 26]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Horn R. A., Johnson Ch. R. Matrix Analysis. Second Edition. Cambridge: Cambridge University Press, 2012.
2. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М.: Физматгиз, 1963.

Поступила в редакцию
24.08.15

ON A FINITE RATIONAL ALGORITHM VERIFYING THE DIAGONAZIBILITY OF A SQUARE MATRIX BY CONGRUENCES

Ikramov Kh. D.

Let A be a square n-by-n matrix with the entries being rational or rational Gaussian numbers. We describe a method for verifying the possibility to diagonalize A by congruence transformations. The method uses a finite number of arithmetic operations (and, in the complex case, conjugation operations).

Keywords: similarity, Jordan form, minimal polynomial, congruences, canonical form, cosquare.