УДК 519.8

Точное решение задачи Коши для дифференциального уравнения макроэкономической модели Харрода—Домара с переменным коэффициентом капиталоемкости прироста дохода [1]

А. Ю. Меерсон, А. П. Черняев

В работе получено точное решение задачи Коши для дифференциального уравнения макроэкономической модели Харрода—Домара с переменным коэффициентом капиталоемкости, зависящим от времени.

Дифференциальное уравнение модели Харрода—Домара с экзогенной динамикой потребления произвольного характера [1, 2] имеет вид

$$Y(t) = C(t) + B\,Y'(t)\,, \tag{1}$$

[1] Работа выполнена при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы», проекты № 2.1.1/11133 и 2.1.1/12968.

Эта модель с непрерывным временем t, описывающая динамику дохода $Y(t)$, который рассматривается, как сумма потребления $C(t)$ и инвестиций $I(t)$. Экономика считается закрытой, поэтому чистый экспорт равен нулю, а государственные расходы в модели не выделяются. Основная предпосылка модели роста — скорость роста дохода пропорциональна инвестициям [3, с. 205]: $I(t) = B\,Y'(t)$, где B — коэффициент капиталоемкости прироста дохода, или приростной капиталоемкости. До сих пор коэффициент капиталоемкости прироста дохода считался положительным и постоянным [4]

$$B = \text{const} > 0\,. \tag{2}$$

Для случая (2) решение дифференциального уравнения (1) известно [5] и дается формулой

$$Y(t) = Y_0\, e^{\frac{t-t_0}{B}} - \frac{1}{B}\int_{t_0}^{t} C(\tau)\, e^{\frac{t-\tau}{B}}\, d\tau\,. \tag{3}$$

Здесь предполагается выполненным начальное условие задачи Коши

$$Y(t_0) = Y_0 > 0\,. \tag{4}$$

В настоящей работе предполагается, что коэффициент капиталоемкости прироста дохода является функцией времени, т. е.

$$B = B(t)\,. \tag{5}$$

При условиях (4) и (5) решение дифференциального уравнения (1) будет даваться формулой

$$Y(t) = Y_0\, e^{\int_{t_0}^{t} \frac{ds}{B(s)}} - e^{\int_{t_0}^{t} \frac{ds}{B(s)}} \int_{t_0}^{t} \frac{C(\tau)}{B(\tau)}\, e^{-\int_{t_0}^{\tau} \frac{ds}{B(s)}}\, d\tau\,, \tag{6}$$

которая и является основным содержанием данной работы. Простой проверкой нетрудно убедиться в том, что если $B =$

$= \text{const}$, то из формулы (6) получается формула (3), т. к.

$$\int_{t_0}^{t} \frac{ds}{B} = \frac{t - t_0}{B},$$

$$e^{\int_{t_0}^{t} \frac{ds}{B}} = e^{\frac{t - t_0}{B}}, \qquad e^{-\int_{t_0}^{\tau} \frac{ds}{B}} = e^{-\frac{\tau - t_0}{B}} = e^{\frac{t_0 - \tau}{B}}$$

и

$$e^{\int_{t_0}^{t} \frac{ds}{B}} \int_{t_0}^{t} \frac{C(\tau)}{B} e^{-\int_{t_0}^{\tau} \frac{ds}{B}} d\tau = \frac{1}{B} e^{\frac{t - t_0}{B}} \int_{t_0}^{t} C(\tau) e^{\frac{t_0 - \tau}{B}} d\tau =$$

$$= \frac{1}{B} \int_{t_0}^{t} C(\tau) e^{\frac{t - \tau}{B}} d\tau.$$

Подставляя последние формулы в формулу (6), очевидно, получаем (3).

Решение (6) дифференциального уравнения (1) при условиях (4) и (5) гораздо важнее решения (3) того же уравнения при условии (2), т. к. на практике условие (2) не может быть выполнено. Однако, решение (6) при условиях (4) и (5) важнее не только практически, но и теоретически, т. к. очень удобно для различных численных расчетов, которые невозможно осуществить зная лишь решение (3) уравнения (1) при условиях (2) и (3).

Список литературы

1. *Меерсон А. Ю., Черняев А. П.* Макроэкономическая модель Харрода—Домара с экзогенной динамикой потребления произвольного характера. // Международная научно-практическая конференция «Инновации на основе информационных и коммуникационных технологий». Материалы международной научно-практической конференции

«Инфо-2011». Симпозиум 4. Инновационные информационные и коммуникационные технологии в социальной среде. С. 437–439.

2. *Меерсон А. Ю., Черняев А. П.* Точное решение макроэкономической модели Харрода—Домара с экзогенной динамикой потребления произвольного характера. // Известия Российского экономического университета имени Г. В. Плеханова. 2011. № 1. С. 142–147.

3. *Замков О. О., Толстопятенко А. В., Черемных Ю. Н.* Математические методы в экономике: Учебник. — М.: МГУ им. М. В. Ломоносова. Издательство «ДИС». 1998. 368 С.

4. Моделирование экономических процессов. Учебник для студентов вузов, обучающихся по специальностям экономики и управления (060000). Под ред. Грачевой М. В., Фадеевой Л. Н., Черемных Ю. Н. — М.: ЮНИТИ—ДАНА. 2005. 351 С.

5. *Меерсон А. Ю., Черняев А. П.* Особенности рабочего режима макроэкономической модели Харрода—Домара с показателем потребления, растущим в постоянном темпе. // Вестник МГУП. М.: МГУП. 2012. № 3. С. 188–192.

Российская экономическая академия им. Г. В. Плеханова, Москва.
Московский физико-технический институт (государственный университет).
E-mail: chernyaev49@yandex.ru, chernyaev1949@inbox.ru.
Поступила 27 апреля 2013 г.