

УДК 514.142.2+514.174.6

В.А.Клячин

## ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ УСЛОВИЯ ДЕЛОНЕ

Настоящая заметка посвящена условию, аналогичному условию Делоне для построения триангуляций поверхностей в евклидовом пространстве, а также триангуляции в пространствах Финслера. Классическое условие Делоне гласит, что описанная сфера вокруг  $n$ -мерного симплекса не содержит вершин других симплексов из данного набора триангуляции [1]. В основе алгоритмов построения триангуляции с условием Делоне лежит теорема о пустой сфере. Это теорема утверждает, что локальное выполнение условия Делоне влечет выполнение глобального условия. Другими словами, если для двух симплексов триангуляции, имеющих общую  $(n-1)$ -мерную грань, описанные сферы не содержат вершин, противолежащих данной  $(n-1)$ -мерной грани, то это справедливо и для произвольных двух симплексов триангуляции. В данной работе представлено условие, налагаемое на семейство выпуклых множеств, для которого справедливо аналогичное утверждение, т.е. условие, при выполнении которого из локального свойства вытекает глобальное.

**Ключевые слова:** триангуляция Делоне, выпуклая оболочка, симплекс.

## 1. Алгоритм построения триангуляции Делоне

Пусть в пространстве  $\mathbf{R}^n$  задан конечный набор точек  $M$ . Триангуляцией множества  $M$  называется разбиение выпуклой оболочки этого множества на  $n$ -мерные симплексы с вершинами в точках из  $M$ , у которых внутренности не пересекаются. Симплексом  $S$  в вершинах  $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}^n$  мы называем выпуклую оболочку точек  $x_i$ . Симплекс  $S$  называется невырожденным, если векторы  $x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_n - x_0$  линейно независимы. В дальнейшем, будем рассматривать только такие наборы точек  $P_i$ , для которых любой симплекс в вершинах из  $P_i$  является невырожденным.

Прежде чем переходить к формулировкам указанных результатов, приведем схему алгоритма построения триангуляции Делоне в классическом варианте (см. [2]). Данная схема позволяет понять существенность теоремы о пустой сфере в указанном алгоритме. Мы следуем книге Шикина Е.В. и Борескова А.В. «Компьютерная графика. Полигональные модели» [2], модифицируя представленный там алгоритм на многомерный случай.

Прежде всего, дадим одно свойство сфер, описанных вокруг симплексов. Рассмотрим два симплекса  $S_1$  и  $S_2$ , имеющих общую  $(n-1)$ -мерную грань  $G$ . Пусть  $A$  и  $B$  вершины симплексов, не принадлежащие грани  $G$ . Тогда, если сфера, описанная вокруг  $S_1$ , не содержит внутри себя вершину  $B$  симплекса  $S_2$ , то сфера, описанная вокруг  $S_2$ , не содержит внутри себя вершины  $A$ . Действительно, пусть  $\Sigma_i$  – сфера, описанная вокруг  $S_i$ . Пусть  $\Sigma_i^\pm$  – части, на которые разбиваются эти сферы и лежащие в полупространствах  $\Pi^\pm$ , определяемых плоскостью  $\Pi$ , содержащей грань  $G$ . Будем предполагать, что вершина  $B \in \Pi$ , значит,  $B \in \Sigma_2^-$ . Поэтому  $\Sigma_1^-$  лежит

внутри  $\Sigma_2^-$ . Если предположить, что вершина  $A$  лежит внутри  $\Sigma_2$ , то получается, что и вся сфера  $\Sigma_1$  лежит внутри сферы  $\Sigma_2$ , касаясь этой сферы в  $n$  точках – вершинах грани  $G$ . Откуда следует, что сферы  $\Sigma_2$  и  $\Sigma_1$  совпадают. Это противоречит тому, что точка  $A$ , по предположению, лежит внутри сферы  $\Sigma_2$ .

Алгоритм состоит из ряда шагов, выполняющихся в цикле. Заметим, что в [3] проведен анализ других существующих алгоритмов, некоторые из которых используют теорему о неполноте сферы.

- Строится выпуклая оболочка данной системы точек  $P_i$ ,  $i=1,2,\dots,N$ . Предполагается, что никакие  $n$  точек данного семейства не лежат на одной гиперплоскости. В предположении, что никакие  $(n+1)$  точек не лежат на одной сфере, триангуляция Делоне строится единственным способом.

- Выбирается  $n$  точек из данного семейства, лежащие на границе выпуклой оболочки  $\text{conv}(P)$ , такие, что  $(n-1)$ -мерный симплекс  $G_0$  с вершинами в этих точках также лежит на границе выпуклой оболочки.

- Ориентируем этот симплекс относительно внешней нормали к границе выпуклой оболочки  $\text{conv}(P)$ . Находим точку из семейства  $P_i$ , такую, что описанная сфера вокруг полученного симплекса не содержит других точек из  $P_i$ .

- Выбираем произвольную грань построенного симплекса, отличную от  $G_0$ . Ориентируем эту грань нормалью, направленной в сторону уже построенного симплекса, содержащего эту грань. Из оставшихся точек находим точку из семейства  $P_i$ , такую, что сфера, описанная вокруг нового симплекса, построенного на вершинах грани  $G_0$  и найденной точке, не содержит необработанных точек семейства  $P_i$ . Свойство описанных сфер, приведенное в начале данного пункта статьи, и «фундаментальная теорема» Вороного-Делоне [1] обеспечивают «пустоту сферы» относительно и уже включенных в триангуляцию точек.

- Далее процесс повторяется в цикле, пока не будут все точки включены в триангуляцию. Ориентация граней симплексов необходима для правильной организации этого цикла и поиска новых точек в предыдущем шаге цикла.

## 2. Теорема о пустоте семейства выпуклых множеств

Рассмотрим в  $\mathbf{R}^n$  семейство выпуклых подмножеств  $F(x,r)$ ,  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $r \in \mathbf{R}$ , и множество точек  $\{P_i\}_{i=0}^N$ , расположенных в некоторой области  $D \subset \mathbf{R}^n$ . Классическое условие Делоне и соответствующая теорема о пустоте сферы получаются как частный случай, если мы положим  $F(x,r) = \{y \in \mathbf{R}^n: |y-x| < r\}$ .

Пусть  $S$  – произвольный невырожденный симплекс. Определим описанное множество (если оно существует)  $\Phi(S)$  из семейства  $F(x,r)$  как множество, чья граница содержит все вершины симплекса (значит,  $\Phi(S)$  содержит весь симплекс в силу выпуклости  $F(x,r)$ ).

**Определение 1.** Рассмотрим произвольную триангуляцию множества точек  $P_i$ . Будем говорить, что триангуляция глобально равномерна относительно семейства  $F(x,r)$ , если для любого симплекса  $S$  этой триангуляции внутренность множества  $\Phi(S)$  не содержит вершин других симплексов.

**Определение 2.** Рассмотрим произвольную триангуляцию множества точек  $P_i$ . Будем говорить, что триангуляция локально равномерна относительно семейства

$F(x,r)$ , если для любого симплекса  $S$  этой триангуляции внутренность множества  $\Phi(S)$  не содержит вершин других симплексов, имеющих общую  $(n-1)$ -мерную грань.

Основным результатом работы является следующая теорема.

**Теорема 1.** *Для того чтобы для семейства выпуклых множеств  $F(x,r)$ ,  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $r \in \mathbf{R}$ , из локальной равномерности следовала глобальная равномерность, достаточно, чтобы указанное семейство обладало свойством: для любого симплекса  $S$  существовало и было единственным описанное множество  $\Phi(S)$ .*

**Доказательство.** Рассмотрим некоторую триангуляцию множества точек  $P_i$ , обладающую локальным свойством равномерности. Зафиксируем произвольный симплекс  $S$  данной триангуляции и вершину  $A$  произвольного симплекса, отличного от  $S$ . Поступая как и в [1], построим луч  $OA$ , соединяющий некоторую внутреннюю точку симплекса  $S$  и вершину  $A$  и пересекающий границы симплексов по их некоторым  $(n-1)$ -мерным граням. Нам необходимо доказать, что вершина  $A$  не принадлежит внутренности множества  $\Phi(S)$ . Пусть  $S_1, \dots, S_L$  – последовательность симплексов, которые пересекает луч  $OA$ , а  $G_1, \dots, G_L$  – соответствующие  $(n-1)$ -мерные грани, пересекаемые этим же лучом. Рассмотрим симплекс  $S_1$ . Пусть  $z_1$  – вершина этого симплекса, не принадлежащая симплексу  $S$ . Тогда, в силу локальной равномерности, вершина  $z_1$  не принадлежит  $\Phi(S)$ . Пусть  $\Pi_1$  – гиперплоскость, содержащая грань  $G_1$  и разбивающая пространство на полупространство  $\Pi_1^-$ , содержащее симплекс  $S$ , а также полупространство  $\Pi_1^+$ . Тогда, вершина  $A$  лежит в полупространстве  $\Pi_1^+$ . Предположим, что вершина  $A$  принадлежит симплексу  $S_2$ . Тогда, если предположить, что вершина  $A$  лежит в  $\Phi(S)$ , то она должна принадлежать пересечению  $\Phi(S) \cap \Phi(S_1)$ . Действительно, если это не так, то на части луча  $OA \cap \Pi_1^+$  существуют точки, принадлежащие  $\Phi(S) \cap \Phi(S_1)$ , и также точки, не принадлежащие этому пересечению. Поэтому найдется точка  $B \in \partial\Phi(S) \cap \partial\Phi(S_1) \cap \Pi_1^+$ . Построим симплекс  $S'$ , вершинами которого являются вершины грани  $G_1$ , а также вершина  $B$ . Тогда найдутся два множества из семейства  $F(x,r)$ , а именно  $\Phi(S)$  и  $\Phi(S_1)$ , описанные около  $S'$ . Последнее противоречит единственности описанного множества  $\Phi(S')$ . Таким образом,  $A \notin \Phi(S) \cap \Phi(S_1)$ . Но это противоречит локальной равномерности триангуляции относительно  $F(x,r)$ . Аналогично, по индукции мы получаем, что вершина  $A$  не может лежать в  $\Phi(S)$  при условии, что эта вершина одного из симплексов  $S_i$ ,  $i = 2, \dots, L$ . Теорема доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Делоне Б.П. О пустой сфере. К мемуару Георгия Вороного: Пер. с фр. А.Ю. Игумнова // Записки семинара «Сверхмедленные процессы»: Сб. Вып. 1. С. 147 – 153.
2. Шикин Е.В., Боресков А.В. Компьютерная графика. Полигональные модели. М.: Диалог МИФИ, 2000.
3. Скворцов А.В., Мирза Н.С. Алгоритмы построения и анализа триангуляции. Томск, Изд-во Том. ун-та, 2006, 168 с.
4. Ласло М. Вычислительная геометрия и компьютерная графика на C++. М.: Бином, 1997.

Статья принята в печать 12.03.07.