УДК 539.3

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СОСТАВНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА*

© 2015 г. Д.А. Пожарский, В.И. Полтинников

Пожарский Дмитрий Александрович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики, Донской государственный технический университет, пл. Гагарина, 1, г. Ростов н/Д, 344000, e-mail: pozharda@rambler.ru

Pozharskii Dmitrii Aleksandrovich – Doctor of Physical and Mathematical Science, Professor, Head of Applied Mathematics Department, Don State Technical University, Gagarin Sq., 1, Rostov-on-Don, 344000, Russia, e-mail: pozharda@rambler.ru

Полтинников Виктор Иванович − доцент, кафедра прикладной математики, Донской государственный технический университет, пл. Гагарина, 1, г. Ростов н/Д, 344000.

Poltinnikov Viktor Ivanovich − Associate Professor, Applied Mathematics Department, Don State Technical University, Gagarin Sq., 1, Rostov-on-Don, 344000, Russia.

Получены интегральные уравнения (ИУ) трехмерных контактных задач для упругого полупространства, составленного из двух клиновидных слоев, соединенных скользящей заделкой. Клиновидный слой, примыкающий к слою, в который вдавливается штамп, несжимаем (резино-металлическое сочленение). Внешняя грань этого слоя свободна от напряжений либо подчинена условиям скользящей заделки. Для решения вспомогательных краевых задач о действии заданной нормальной нагрузки применен метод комплексных интегральных преобразований Фурье и Конторовича – Лебедева, позволивший свести их к системам ИУ Фредгольма второго рода, решения которых затем вошли в ядра ИУ контактных задач. Для решения контактных задач использован метод Галанова.

Ключевые слова: *контактная задача, составное полупространство, клин.*

The integral equations are derived for three-dimensional contact problems for an elastic half-space consisting of two wedge-shaped layers with sliding support in between. The wedge-shaped layer joined to the layer in contact with a punch is incompressible (rubber-metal conjunction). The outer face of this layer is supposed to be stress-free or subjected to sliding support. To solve auxiliary boundary-value problems for a given normal load the method of Fourier and Kontorovich – Lebedev complex integral transformations is used. These auxiliary problems are finally reduced to systems of Fredholm integral equations of the second kind, solutions of which go into the kernels of the integral equation of the contact problems. For solving the contact problems the Galanov's method is used.

Keywords: *contact problem, composite half-space, wedge.*

Ранее изучались аналогичные плоские задачи [1], рассматривался случай, когда клиновидный слой под штампом несжимаем [2].

Рассмотрим, используя цилиндрические координаты, упругое полупространство, составленное из клиновидных слоев $\Omega_1=\{r\in[0,\infty);\ \varphi\in[\alpha-\pi,-\alpha];\ z\in(-\infty,\infty)\}$ и $\Omega_2=\{r\in[0,\infty);\ \varphi\in[-\alpha,\alpha];\ z\in(-\infty,\infty)\}$, которые имеют углы раствора $\pi-2\alpha$ и 2α соответственно и соединены скользящей заделкой по грани $\varphi=-\alpha$. Материал клина Ω_1 несжимаем (коэффициент Пуассона $\nu_1=0{,}5$, модуль сдвига G_1). Материал клина Ω_2 имеет коэффициент Пуассона ν и модуль сдвига G. В грань $\varphi=\alpha$ под действием силы P без перекоса вдавливается жесткий штамп. Осадка штампа равна δ, а форма основания описывается функцией $f(r,z)$. Внешняя грань клина Ω_1 $\varphi=\alpha-\pi$ свободна от напряжений (задача А) или находится в условиях скользящей заделки (задача Б). При известных величинах α, ν, G, G_1, δ и заданной функции $f(y,z)$ требуется определить контактное давление $\sigma_\varphi(r,\alpha,z)=-q(r,z)$, а также область контакта Ω. Затем можно определить связь между величинами P и δ.

Для вывода интегральных уравнений (ИУ) контактных задач А и Б используются метод комплексных интегральных преобразований Фурье и Конторовича–Лебедева и техника сведения краевой задачи теории упругости для трехмерного клина к системе функциональных уравнений со сдвигом аргумента [3]. Функционально-сдвиговые уравнения удается свести к системе двух ИУ Фредгольма второго рода относительно вспомогательных функций $\Phi_n(\tau)$ (n = 1, 2; $\lambda>0$, $0\le\tau<\infty$)

$$\Phi_n(\tau)\pm\varepsilon(1-\nu)Q(\tau)[W_1(\tau)\Phi_1(\tau)+ \qquad (1)$$

$$+W_2(\tau)\Phi_2(\tau)]-(1-2\nu)\int_0^\infty L_n(\tau,u)\Phi_n(u)du=$$

$$=\mp\varepsilon(1-\nu)Q(\tau)[W_1(\tau)+W_2(\tau)]\operatorname{ch}\frac{\pi\tau}{2}K_{i\tau}(\lambda x)+$$

$$+(1-2\nu)\int_0^\infty L_n(\tau,u)\operatorname{ch}\frac{\pi u}{2}K_{iu}(\lambda x)du,$$

$$L_n(\tau,u)=2\operatorname{ch}\frac{\pi\tau}{2}\operatorname{sh}\frac{\pi u}{2}W_n(u)\times$$

$$\times\int_0^\infty\frac{\operatorname{sh}\pi t\ g_n(t)dt}{(\operatorname{ch}\pi t+\operatorname{ch}\pi\tau)(\operatorname{ch}\pi t+\operatorname{ch}\pi u)},\quad \varepsilon=\frac{G_1}{G},$$

* Работа выполнена по госзаданию Минобрнауки РФ (проект 2941).

$$W_n(\tau) = \pm\frac{\mathrm{ch}2\alpha\tau \mp \cos 2\alpha}{\mathrm{sh}2\alpha\tau \pm \tau\sin 2\alpha},$$

$$g_n(\tau) = \frac{\sin^2 2\alpha}{\mathrm{ch}2\alpha\tau \mp \cos 4\alpha}\begin{cases}\mathrm{cth}\alpha\tau\\ \mathrm{th}\alpha\tau\end{cases},$$

$$Q(\tau) = \frac{2(\mathrm{sh}^2(\pi-2\alpha)\tau - \tau^2\sin^2 2\alpha)}{\mathrm{sh}2(\pi-2\alpha)\tau - \tau\sin 4\alpha} \text{ (задача А)},$$

$$Q(\tau) = \frac{\mathrm{sh}2(\pi-2\alpha)\tau - \tau\sin 4\alpha}{\mathrm{ch}2(\pi-2\alpha)\tau - \cos 4\alpha} \text{ (задача Б)}.$$

Здесь и ниже при $n = 1$ берется верхний знак (функция), а при $n = 2$ − нижний. Правые части уравнений (1) экспоненциально убывают при $\tau \to \infty$. Для численного решения системы (1) применим метод механических квадратур.

Контактные задачи затем сводятся к ИУ относительно $q(r,z)$:

$$\iint_{\Omega} q(x,y)K(r,z,x,y)dxdy = \frac{2\pi G}{1-\nu}[\delta - f(r,z)], \quad (2)$$

$$(r,z) \in \Omega,$$

$$K(r,z,x,y) = \quad (3)$$

$$= \frac{1}{R} + \frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{sh}\pi\tau\left\{\left[\frac{W_1(\tau)-W_2(\tau)}{2} - \mathrm{cth}\pi\tau\right]K_{i\tau}(\lambda x) + \right.$$

$$\left. + \frac{W_1(\tau)\Phi_1(\tau) - W_2(\tau)\Phi_2(\tau)}{2\mathrm{ch}(\pi\tau/2)}K_{i\tau}(\lambda r)\cos\lambda(z-y)d\lambda d\tau. \right.$$

Здесь функции $\Phi_n(\tau)$ (n=1, 2) удовлетворяют системе (1). Главный член R^{-1} в ядре (3) соответствует случаю однородного упругого полупространства [3]. При ε=0 ядро (3) совпадает с известным [3] для однородного клина с одной свободной от напряжений гранью, символом ядра которого служит функция

$$\frac{W_1(\tau)-W_2(\tau)}{2} = \frac{\mathrm{sh}4\alpha\tau + \tau\sin 4\alpha}{\mathrm{ch}4\alpha\tau - \tau^2(1-\cos 4\alpha) - 1}.$$

В частном случае, когда ν=0,5, система (1) имеет точное решение

$$\Phi_n(\tau) = \frac{\mp\varepsilon Q(\tau)[W_1(\tau)+W_2(\tau)]}{2+\varepsilon Q(\tau)[W_1(\tau)-W_2(\tau)]}\mathrm{ch}\frac{\pi\tau}{2}K_{i\tau}(\lambda x).$$

При ν=0,5, ε=1, $2\alpha=\pi/2$ (две одинаковые несжимаемые четверти пространства, соединенные скользящей заделкой) символ ядра ИУ (2)

$$\frac{W_1(\tau)-W_2(\tau)}{2} - \frac{Q(\tau)[W_1(\tau)+W_2(\tau)]^2}{4+2Q(\tau)[W_1(\tau)-W_2(\tau)]} = \quad (4)$$

$$= \frac{\mathrm{sh}^2\pi\tau - 2\tau^2\mathrm{ch}^2(\pi\tau/2)}{2\mathrm{sh}\pi\tau(\mathrm{sh}^2(\pi\tau/2)-\tau^2)} \text{ (задача А)}$$

$$\text{или } = \frac{\mathrm{sh}\pi\tau}{2\mathrm{sh}^2(\pi\tau/2)-\tau^2} \text{ (задача Б)}.$$

Функции в правой части формулы (4) совпадают с известными символами ядер интегральных уравнений плоской и пространственной контактных задач, рассмотренных ранее. Задача А в случае (4) соответствует задачам А [1] и В [2]. Задача Б в случае (4) соответствует задачам Б [1] и А [2]. При этом в соответствующих формулах [1] следует взять e=1, $\alpha=\beta=\pi/2$, а в [2, (1.5)−(1.9)] следует положить ν=0,5, ε=1, $\alpha=\beta=\pi/2$, μ=0.

Для численного решения ИУ (2) применим метод Галанова нелинейных граничных ИУ, позволяющий одновременно определить область контакта и контактные давления [3]. Предположим, что область контакта содержится в прямоугольнике S, который покроем равномерной сеткой. При расчете значений ядра (3) в узлах сетки его особенности сглаживались путем регуляризации [3]. Как показывают расчеты, в случае задачи А значения контактного давления и вдавливающей силы несколько меньше, чем в задаче Б (при тех же значениях задаваемых параметров).

Литература

1. *Пожарский Д.А.* Смешанные задачи теории упругости для составного плоского клина // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2008. № 5. С. 36–38.

2. *Александров В.М., Пожарский Д.А.* Пространственные контактные задачи с трением для составного упругого клина // Прикладная математика и механика. 2010. Т. 74, вып. 6. С. 969–977.

3. *Александров В.М., Пожарский Д.А.* Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. М., 1998. 288 с.

References

1. Pozharskii D.A. Smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya sostavnogo ploskogo klina [Mixed elasticity problem for a composite plane wedge]. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskii region. Estestvennye nauki*, 2008, no 5, pp. 36-38.

2. Aleksandrov V.M., Pozharskii D.A. Prostranstvennye kontaktnye zadachi s treniem dlya sostavnogo uprugogo klina [The spatial contact problem with friction for the composite elastic wedge]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2010, vol. 74, no 6, pp. 969-977.

3. Aleksandrov V.M., Pozharskii D.A. *Neklassicheskie prostranstvennye zadachi mekhaniki kontaktnykh vzaimodeistvii uprugikh tel* [Non-classical spatial problems of mechanics of contact interactions of elastic bodies]. Moscow, 1998, 288 p.

Поступила в редакцию **2 апреля 2015 г.**