УДК 621.396.6

Власов М.А., Горопашный В.А., Сергин С.Ф., Орлова Н.А.

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИТФ им. академ. Е.И.Забабахина»

К ВОПРОСУ О РАСЧЕТЕ ПРОЧНОСТНОЙ НАДЕЖНОСТИ КОНСТРУКЦИЙ ДЛЯ ПЛАНА ИСПЫТАНИЙ ДО РАЗРУШЕНИЯ

1 Формулировка исходных данных

Испытания конструкции производятся до разрушения. Среднее значение разрушающей нагрузки вычисляется по результатам испытаний:

$$\bar{Q} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} Q_i \ .$$

Разрушающая нагрузка Q распределена нормально с известным коэффициентом вариации ν_Q. Величина действующей нагрузки F постоянна.

По этим исходным данным требуется определить надежность конструкции.

2 Расчетные формулы

Поставленную задачу оценки надёжности можно решить приближенным методом, подробно описанным еще в 1976 году сотрудниками РФЯЦ-ВНИИЭФ Н.А. Билыком, В.А. Хариным и Ю.В. Хомутининым [1]. Их работа была опубликована в Бюллетене технической информации (выпуск 3(86) за 1976 год). Согласно этой работе задача решается следующем образом:

Исходя из предположения о нормальном законе распределения, среднее значение оценки надежности определяется по формуле:

$$\bar{P} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u_{\bar{P}}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad (1)$$

для квантиля:

$$u_{\bar{P}} = \frac{\bar{Q} - F}{\bar{Q} \cdot \nu_Q \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \ , \ (2)$$

а среднеквадратическое отклонение рассчитывается следующим образом:

$$\sigma_P = \frac{e^{-\frac{u_{\bar{P}}^2}{2}}}{\hat{\eta} \cdot \sqrt{2\pi \cdot (n+1)}} \ , \quad (3)$$

где $\hat{\eta} = \frac{\bar{Q}}{F}$ - коэффициент запаса.

Нижняя доверительная граница оценки надежности, на уровне доверия 0,9, рассчитывается по формуле:

$$P_{0,9} = \bar{P} - 1,28 \cdot \sigma_P \ . \qquad (4)$$

Приведенные формулы получены путем нескольких последовательных линеаризаций.

Таким образом, расчет оценки надежности сводится к последовательному определению параметров распределения линейных функций по известным значениям параметров распределения случайного аргумента, при этом распределение самой оценки предполагается нормальным.

3 Метод статистического моделирования

Недостатки приближенного метода расчета надежности легко преодолеваются с помощью метода статистического моделирования. Аналогично решалась ранее задача для плана испытаний с запасом [2].

При нормальном распределении величины разрушающей нагрузки Q её среднее значение $\bar{Q}$ будет распределено также нормально с тем же математическим ожиданием:

$$Mo(\bar{Q}) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} Q_i \ ,$$

и среднеквадратическим отклонением

$$\sigma_{\bar{Q}} = \frac{\nu_Q \cdot Mo(Q)}{\sqrt{n}} \ .$$

Следовательно, выражение для плотности распределения среднего значения $\bar{Q}$ записывается следующим образом:

$$f(\bar{Q}) = \frac{\sqrt{n}}{\nu_Q \cdot \bar{Q} \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{n}{2}\left(\frac{\bar{Q} - Mo(Q)}{\nu_Q \cdot \bar{Q}}\right)^2} \ . \qquad (5)$$

Если принять за основу соотношение (5), то достаточно получить массив случайных чисел, подчиненных этому распределению, затем по этим числам с использованием промежуточных функциональных связей сформировать выборку значений оценки надежности P, по которой и определить параметры распределения этой оценки.

Таким образом, в практических расчетах трудность реализации этого метода заключается только в генерировании случайных чисел подчиненных распределению (5). Одним из простейших способов решения этой задачи является следующий, детально описанный в книге И.С. Соболя [3]:

генерируется случайное число Rnd из массива чисел, распределенных по равновероятному закону в интервале [0, 1];

учитывая, что это число характеризует вероятность попадания случайной величины, на участок [0, Rnd], решением уравнения:

$$\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot\int\limits_{-\infty}^{q_{rnd}} e^{\frac{-(t-Mo)^2}{2\cdot\sigma^2}}dt = Rnd$$

относительно q_{rnd} находится случайное число, подчиненное распределению (5).

Сам алгоритм расчета надежности методом статистического моделирования заключается в следующем.

Моделируемой случайной величиной q_{rnd} в данном случае является $\tilde{Q}$, распределённая нормально с параметрами:

$$Mo = Mo\left(\tilde{Q}\right) = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} Q_i \ ,$$

$$\sigma = \sigma_{\tilde{Q}} = \frac{\nu_Q\cdot Mo(Q)}{\sqrt{n}} \ .$$

По этим данным генерируется массив значений $\tilde{Q}_i$. Для каждого значения $\tilde{Q}_i$ рассчитывается квантиль:

$$(u_P)_i = \frac{\tilde{Q}-F}{\tilde{Q}\cdot\nu_Q\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \ ,$$

и для каждого $(u_P)_i$ определяется детерминированная оценка:

$$P_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{(u_P)_i} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \ .$$

По сформированной выборке определяются параметры распределения оценки надежности $\tilde{P}, \sigma_P$ *и* $P_{0,9}$.

Приведенный алгоритм хорошо поддается программированию.

4 Метод, основанный на использовании аналитической формулы для плотности распределения оценки надежности

Недостатки приближенного метода расчета надежности также преодолеваются при отказе от линеаризации и переходе на использование фактических функциональных связей при составлении формулы для плотности распределения оценки надежности. Аналогично решалась ранее задача для плана испытаний с запасом [4].

Полагая функциональную связь между величинами u_P и $\tilde{Q}$ в виде (2) и используя известный механизм получения формулы для плотности распределения функции по известной плотности распределения аргумента (описанный, например, в [5]), получим:

$$\tilde{Q} = \frac{F}{1-u_p\cdot\nu_Q\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \ ; \qquad \frac{\partial\tilde{Q}}{\partial u_P} = \frac{\nu_Q\cdot F\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\left(1-u_P\cdot\nu_Q\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)^2} \ ;$$

$$g(u_P) = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2\pi}\cdot\left(1-u_P\cdot\nu_Q\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)^2}\cdot e^{-\frac{n}{2}\cdot\left[\frac{F-Mo\left[\tilde{Q}\right]\cdot\left(1-u_P\cdot\nu_Q\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}{\nu_Q\cdot F}\right]^2} \ .$$

Переходим к построению выражения для плотности распределения оценки надежности *P*. Функциональная связь между функцией P и случайным аргументом u_P в данном случае осуществляется соотношением (1). Тогда:

$$u_P = \Phi^{-1}(P) \ ; \qquad \frac{\partial u_P}{\partial P} = \sqrt{2\pi}\cdot e^{\frac{\left[\Phi^{-1}(P)\right]^2}{2}} \ ;$$

$$g(P) = \frac{n-1}{1-\Phi^{-1}(P)\cdot\nu_Q\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\cdot e^{-\frac{n}{2}\cdot\left[\frac{F-Mo\left[\tilde{Q}\right]\cdot\left(1-\Phi^{-1}(P)\cdot\nu_Q\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}{\nu_Q\cdot F}\right]^2}\cdot e^{\frac{\left[\Phi^{-1}(P)\right]^2}{2}} \ . \quad (6)$$

Далее по полученной плотности распределения оценки надежности (6) определяются параметры самого распределения $\tilde{P}, \sigma_P$ *и* $P_{0,9}$ путем поиска значений двух интегралов – первого и второго начальных моментов.

Точность проводимых расчетов по вышеописанному методу определяется точностью интегрирования функции (6) и связанных с нею функций, а она (точность), в свою очередь, зависит от формы кривой плотности, то есть от комбинации параметров $\bar{Q}$, F, v_Q и n.

5 Апробирование

Описанные методы расчета надежности были всесторонне апробированы для весьма широкого диапазона изменения исходных данных. Для проведения расчетов была составлена отдельная программа, алгоритмически мало отличающаяся от составленной ранее для плана испытаний с запасом [6]. Результаты расчетов представлены в таблице 1.

Таблица 1– результаты расчетов

метод	параметры	$\bar{Q}=1000$ $F=800$ $v_Q=0.1$ $n=5$	$\bar{Q}=1000$ $F=800$ $v_Q=0.1$ $n=3$	$\bar{Q}=1000$ $F=800$ $v_Q=0.15$ $n=5$	$\bar{Q}=1000$ $F=800$ $v_Q=0.05$ $n=5$	$\bar{Q}=1100$ $F=800$ $v_Q=0.1$ $n=5$	$\bar{Q}=1200$ $F=800$ $v_Q=0.1$ $n=5$
приближенный по формулам (1)-(4)	$\bar{P}$	0.9661	0.9584	0.8882	0.9999	0.9936	0.9988
	σ_P	0.0246	0.0356	0.0621	0.0002	0.0053	0.0011
	$P_{0.9}$	0.9346	0.9128	0.8087	0.9997	0.9868	0.9975
статистическое моделирование	$\bar{P}$	0.9585	0.9428	0.8714	0.9999	0.9911	0.9987
	σ_P	0.0330	0.0520	0.0731	0.0005	0.0087	0.0021
	$P_{0.9}$	0.9164	0.8805	0.7760	0.9994	0.9815	0.9962
аналитический	$\bar{P}$	0.9598	0.9482	0.8801	0.9997	0.9918	0.9984
	σ_P	0.0288	0.0429	0.0638	0.0026	0.0076	0.0034
	$P_{0.9}$	0.9223	0.8927	0.7936	0.9994	0.9831	0.9966

Первые два примера показывают, как реагируют результаты расчетов на изменение числа опытов, третий и четвертый – на изменение коэффициента вариации, пятый и шестой – на изменение уровня разрушающей нагрузки.

Анализ апробации показывает, что метод статистического моделирования и аналитический метод дают не только близкие результаты, но и отличающиеся от приближенного метода в сторону уменьшения точечной оценки и увеличения среднеквадратического отклонения. Это может означать, что применение линеаризации при расчете надежности для плана испытаний «до разрушения» стабильно завышает оценку. Следовательно, для данного плана испытаний более предпочтительно проводить оценки либо аналитическим, либо методом статистического моделирования для получения более гарантированного результата.

Заключение

Представлены два метода расчета прочностной надежности конструкции для плана испытаний до разрушения, основанные на применении статистического моделирования и использовании аналитической формулы для плотности распределения оценки надежности. Оба метода хорошо поддаются программированию и дают возможность избежать ошибок, обусловленных линеаризацией.

ЛИТЕРАТУРА

1. Приближенный метод оценки показателей надежности элементов по выборкам малых объемов. Н.А. Билык, В.А. Харин, Ю.В. Хомутинин. Бюллетень технической информации. Выпуск 3(86) Москва 1976.

2. Методика расчета прочностной надежности конструкции для плана испытаний с запасом, основанная на применении статистического моделирования. М.А. Власов, В.А. Горопашный, С.Ф. Сергин, Н.А. Орлова. Надежность и качество 2013: труды международного симпозиума. В 2-х томах. – Пенза: Изд-во ПГУ, 2013. – Т.1. – С. 106-108.

3. Численные методы Монте-Карло. И.С. Соболь. Издательство «Наука», Москва 1973г. 312с.

4. Методика расчета прочностной надежности конструкции для плана испытаний с запасом, основанная на использовании аналитической формулы для плотности распределения оценки надежности. М.А. Власов, В.А. Горопашный, С.Ф. Сергин, Н.А. Орлова. Надежность и качество 2013: труды международного симпозиума. В 2-х томах. – Пенза: Изд-во ПГУ, 2013. – Т.1. – С. 103-106.

5. Теория вероятностей. Е.С. Вентцель. Государственное издательство физико-математической литературы. Москва 1962г. 560с.

6. Программная реализация усовершенствованной методики расчета прочностной надежности конструкции для плана испытаний с запасом. М.А. Власов, С.Ф. Сергин. Надежность и качество 2013: труды международного симпозиума. В 2-х томах. – Пенза: Изд-во ПГУ, 2013. – Т.1. – С. 108-109.