

для $k = (k_x, k_y)$, далеких от $(0, 0)$, поскольку при выполнении условий, накладываемых на выбор функций $\Psi^{[m]}$,

$$\int_0^\infty |\omega|^2 I(|\mu| \langle |2^j \omega| \rangle) \left| (\widehat{R_{-\mu/2^j} \Psi^{[m]}})(\omega, \theta) \right|^2 d\omega \rightarrow \int_0^\infty \left| (\widehat{R_0 \Psi^{[m]}})(\omega, \theta) \right|^2 d\omega$$

при $j \rightarrow \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федоров Г.А. Вычислительная эмиссионная томография. М., 1990.
2. Donoho D.L. Nonlinear solution of linear inverse problems by wavelet-vaguelette decomposition // Appl. Comput. Harm. Anal. 1995. **2**. P. 101–126.
3. Kolaczyk E.D. A wavelet shrinkage approach to tomographic image reconstruction // J. Am. Statist. Assoc. 1996. **91**. P. 1079–1090.
4. Johnstone I.M., Silverman B.W. Wavelet threshold estimators for data with correlated noise // J. Roy. Statist. Soc. Ser. 1997. **B59**. P. 319–351.

Поступила в редакцию
31.05.05

УДК 519.214.4

Д. И. Жданов

НОРМАЛЬНАЯ СХОДИМОСТЬ САМОНОРМИРОВАННОЙ СТАТИСТИКИ ПИРСОНА

(кафедра математической статистики факультета ВМиК)

1. Введение и основные обозначения. Пусть производится n независимых наблюдений случайной величины ξ и H_0 — гипотеза, состоящая в том, что результаты наблюдений образуют случайную выборку из генеральной совокупности с функцией распределения $G(x)$, которая полностью определена. Одним из наиболее известных методов проверки статистической гипотезы H_0 является критерий хи-квадрат. Его суть состоит в следующем. Множество E всех возможных значений случайной величины ξ разбивается на s непересекающихся подмножеств $E_1, E_2, \dots, E_s$, и для оценки расхождения между теоретическим (гипотетическим) и эмпирическим распределениями используется статистика

Пирсона $\chi_n^2 = \sum_{k=1}^s \frac{n}{p_k} \left(\frac{\nu_k}{n} - p_k \right)^2$, где $p_k = \int_{E_k} dG$, ν_k/n — относительная частота наблюдений, принад-

лежащих множеству E_k , $k = 1, \dots, s$. Известно [1, с. 455], что случайный вектор $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_s)$ имеет полиномиальное распределение, другими словами,

$$P \{ \nu_1 = m_1, \dots, \nu_s = m_s \} = \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_s!} p_1^{m_1} \dots p_s^{m_s}$$

для любых неотрицательных целых чисел $m_1, \dots, m_s$, сумма которых равна n . Заметим, что сумма $p_1, \dots, p_s$ равна единице. Проверка гипотезы H_0 сопряжена с вычислением распределения статистики χ_n^2 . Вычисления становятся чрезвычайно громоздкими при больших n и s . Поэтому распределение статистики χ_n^2 заменяют нормальным распределением. Эта замена оправдана не всегда. При определенных условиях такая замена обоснована теоремой Туманяна [2]. Проверка гипотезы H_0 может быть

осуществлена также с помощью какой-либо модифицированной статистики χ_n^2 , например с помощью самонормированной статистики

$$Y_n = \frac{\sum_{k=1}^s \left[\frac{n}{p_k} \left(\frac{\nu_k}{n} - p_k \right)^2 - E \left(\frac{n}{p_k} \left(\frac{\nu_k}{n} - p_k \right)^2 \right) \right]}{\sqrt{\sum_{k=1}^s \left[\frac{n}{p_k} \left(\frac{\nu_k}{n} - p_k \right)^2 - E \left(\frac{n}{p_k} \left(\frac{\nu_k}{n} - p_k \right)^2 \right) \right]^2}}. \quad (1)$$

Традиционно модифицированные статистики χ_n^2 строят с помощью подходящих центрирующих и нормирующих постоянных. Главное отличие статистики Y_n от известных модификаций статистики Пирсона состоит в том, что роль нормирующих постоянных выполняет функция от слагаемых статистики Пирсона. Это дает надежду, что статистический критерий для проверки гипотезы H_0 , построенный по статистике Y_n , окажется более эффективным. Следующая теорема составляет главное содержание предлагаемой заметки.

2. Условия слабой сходимости к стандартной нормальной случайной величине.

Теорема. *Предположим, что s и $p_1, \dots, p_s$ зависят от n таким образом, что $\lim_{n \rightarrow \infty} s = \infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} n \min_{1 \leq k \leq s} p_k = \infty$. Тогда*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{Y_n < x\} = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du \quad (2)$$

равномерно по $x \in (-\infty, \infty)$.

Доказательство. Обозначим $\phi_k = n(\frac{\nu_k}{n} - p_k)^2/p_k$, $b_n = (\phi_1 - E\phi_1)^2 + \dots + (\phi_s - E\phi_s)^2$. Известно [1, с. 454], что $E\chi_n^2 = s - 1$. С учетом этого замечания статистику (1) можно записать в следующем виде: $Y_n = [(\chi_n^2 - (s - 1))/\sqrt{2(s - 1)}] \sqrt{2(s - 1)/b_n}$. Если выполнены условия теоремы, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\chi_n^2 - (s - 1)}{\sqrt{2(s - 1)}} < x \right\} = \Phi(x) \quad (3)$$

для каждого вещественного числа x . Это утверждение составляет содержание упомянутой выше теоремы Туманяна. Ниже будет доказано, что $\lim_{n \rightarrow \infty} 2(s - 1)/b_n = 1$ по вероятности. Отсюда и из (3) следует (2) для каждого x . Так как функция Φ непрерывна, то (2) выполняется равномерно по $x \in (-\infty, \infty)$. Мы видим, что доказательство теоремы сводится к доказательству того, что $\lim_{n \rightarrow \infty} 2(s - 1)/b_n = 1$ по вероятности. Для этого достаточно показать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} E(A_n - 1)^2 = 0$, где $A_n = b_n/2(s - 1)$, или, что то же самое, $\lim_{n \rightarrow \infty} EA_n = 1$ и $\limsup_{n \rightarrow \infty} EA_n^2 \leq 1$. Заметим, что компоненты случайного вектора $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_s)$ имеют биномиальные распределения. Более точно, случайная величина ν_k имеет биномиальное распределение с параметрами n и p_k . С учетом этого замечания мы получим

$$EA_n = \frac{1}{2s} \sum_{k=1}^s E(\phi_k - E\phi_k)^2 = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^s q_k^2 + \frac{1}{2sn} \sum_{k=1}^s \frac{q_k}{p_k} (1 - 6p_k q_k),$$

где $q_k = 1 - p_k$. Так как $p_1 + \dots + p_s = 1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} n \min_{1 \leq k \leq s} p_k = 0$, то

$$\frac{1}{s} \left| \sum_{k=1}^s (p_k^2 - 2p_k + 1) \right| \leq \frac{4}{s} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{2sn} \left| \sum_{k=1}^s \frac{q_k}{p_k} (1 - 6p_k q_k) \right| \leq \frac{7}{n \min_{1 \leq k \leq s} p_k} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$ и, следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} EA_n = 1$. Величину EA_n^2 можно записать в следующем виде:

$$EA_n^2 = \frac{1}{4s^2} \sum_{k=1}^s E(\phi_k - E\phi_k)^4 + \frac{1}{2s^2} \sum_{1 \leq k < m \leq s} E[(\phi_k - E\phi_k)^2 (\phi_m - E\phi_m)^2].$$

Несложные, но утомительные вычисления дают:

$$\begin{aligned} E(\nu_k - np_k)^{10} = & 945n^5 p_k^5 q_k^5 + 3150n^4 p_k^4 q_k^4 (3 - 14p_k q_k) + 105n^3 p_k^3 q_k^3 (65 - 944p_k q_k + 2892p_k^2 q_k^2) + \\ & + 3n^2 p_k^2 q_k^2 (167 - 8146p_k q_k + 80280p_k^2 q_k^2 - 93292p_k^3 q_k^3) + \\ & + np_k q_k (1 - 510p_k q_k + 17640p_k^2 q_k^2 - 151200p_k^3 q_k^3 + 362880p_k^4 q_k^4). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} E\phi_k^5 = \frac{E(\nu_k - np_k)^{10}}{(np_k)^5} = & 945q_k^5 + \frac{3150q_k^4(3 - 14p_k q_k)}{np_k} + \frac{105q_k^3(65 - 944p_k q_k + 2892p_k^2 q_k^2)}{n^2 p_k^2} + \\ & + \frac{3q_k^2(167 - 8146p_k q_k + 80280p_k^2 q_k^2 - 93292p_k^3 q_k^3)}{n^3 p_k^3} + \\ & + \frac{q_k(1 - 510p_k q_k + 17640p_k^2 q_k^2 - 151200p_k^3 q_k^3 + 362880p_k^4 q_k^4)}{n^4 p_k^4}. \end{aligned}$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} n \min_{1 \leq k \leq n} p_k = \infty$, то $\sup_{n \geq 1} \max_{1 \leq k \leq s} E\phi_k^5 = c < \infty$. Привлекая неравенство Гельдера, мы получим $E|\phi_k - E\phi_k|^5 \leq 2^6 E\phi_k^5$ и, следовательно,

$$\sup_{n \geq 1} \max_{1 \leq k \leq s} E|\phi_k - E\phi_k|^5 \leq c. \quad (4)$$

По неравенству Гельдера $E(\phi_k - E\phi_k)^4 \leq (E(\phi_k - E\phi_k)^5)^{4/5}$. Поэтому $\sup_{n \geq 1} \max_{1 \leq k \leq s} E|\phi_k - E\phi_k|^4 \leq c^{4/5}$.

В силу этой оценки мы получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4s^2} E \left[\sum_{k=1}^s (\phi_k - E\phi_k)^4 \right] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c^{5/2}}{4s} = 0.$$

Нам осталось доказать, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2s^2} \sum_{1 \leq k < m \leq s} E[(\phi_k - E\phi_k)^2 (\phi_m - E\phi_m)^2] \leq 1. \quad (5)$$

Пусть $\varepsilon > 0$, $T_n = \{(k, m) : 1 \leq k, m \leq s, \min\{p_k, p_m\} \leq \varepsilon\}$, t_n — мощность множества $T'_n = \{(k, m) : 1 \leq k, m \leq s\} \setminus T_n$. Множество T'_n состоит из пар (k, m) таких, что $\min\{p_k, p_m\} > \varepsilon$. Нетрудно видеть, что $1 = p_1 + \dots + p_s > \varepsilon \sqrt{t_n}$ и, следовательно, $t_n < 1/\varepsilon^2$. Запишем выражение под знаком верхнего предела в (4) в виде двух слагаемых

$$\frac{1}{2s^2} \sum_{1 \leq k < m \leq s} E[(\phi_k - E\phi_k)^2 (\phi_m - E\phi_m)^2] = \frac{1}{2s^2} \left[\sum_{(k, m) \in T_n, k < m} + \sum_{(k, m) \in T'_n, k < m} \right] E[(\phi_k - E\phi_k)^2 (\phi_m - E\phi_m)^2].$$

Привлекая неравенство Коши–Буняковского, мы получим

$$\sup_{n \geq 1} \sup_{1 \leq k, m \leq s} E[(\phi_k - E\phi_k)^2 (\phi_m - E\phi_m)^2] \leq \left[\sup_{1 \leq k \leq s} \sqrt{(\phi_k - E\phi_k)^4} \right]^2 = c^{5/2} < \infty.$$

Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2s^2} \sum_{(k, m) \in T'_n, k < m} E[(\phi_k - E\phi_k)^2 (\phi_m - E\phi_m)^2] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c^{5/2}}{2s\varepsilon^2} = 0. \quad (6)$$

Мощность множества $\{(k, m) \in T_n : k < m\}$ равна $s^2/2 - t'_n$, где t'_n — мощность множества $\{(k, m) \in T'_n, k < m\}$. Заметим, что $t'_n < t_n$. С учетом этого замечания мы получим

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2s^2} \sum_{(k, m) \in T_n, k < m} E[(\phi_k - E\phi_k)^2 (\phi_m - E\phi_m)^2] \leq \frac{1}{4} \limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{(k, m) \in T_n, k < m} E[(\phi_k - E\phi_k)^2 (\phi_m - E\phi_m)^2].$$

Ниже будет доказано, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{(k,m) \in T_n, k < m} E[(\phi_k - E\phi_k)^2 (\phi_m - E\phi_m)^2] \leq 4 + 56\varepsilon. \quad (7)$$

Утверждение (5) следует из (6) и (7), так как число ε можно взять произвольно малым.

Докажем (7). Из определения верхнего предела следует, что найдется последовательность натуральных чисел $\{r_n\}_{n \geq 1}$ такая, что верхний предел в (7) совпадает с пределом

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[(\phi_{k_n} - E\phi_{k_n})^2 (\phi_{m_n} - E\phi_{m_n})^2],$$

где $(k_n, m_n) \in T_{r_n}$, $k_n < m_n$. Напомним, что величины $p_1, \dots, p_s$ зависят от n и ограничены. Поэтому найдется подпоследовательность $\{l_n\}_{n \geq 1}$ последовательности $\{r_n\}_{n \geq 1}$ такая, что существуют пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{k_{l_n}}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{m_{l_n}}$. Без ограничения общности рассуждений можно считать, что существуют пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{k_{l_n}} = p'$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{m_{l_n}} = p''$. В силу определения множества T_n выполняется, по крайней мере, одно из неравенств $p' \leq \varepsilon$ или $p'' \leq \varepsilon$. Обозначим $X_n = (\nu_{k_n} - r_n p_{k_n}) / \sqrt{r_n p_{k_n}}$, $Y_n = (\nu_{m_n} - r_n p_{m_n}) / \sqrt{r_n p_{m_n}}$, $Z_n = n - X_n - Y_n$. Указанные случайные величины имеют полиномиальное распределение. Более точно,

$$P\{X_n = l_1, Y_n = l_2, Z_n = l_3\} = \frac{r_n!}{l_1! l_2! l_3!} p_{k_n}^{l_1} p_{m_n}^{l_2} (1 - p_{k_n} - p_{m_n})^{l_3}$$

для любых неотрицательных целых чисел l_1, l_2, l_3 , сумма которых равна r_n . Совместная характеристическая функция случайных величин X_n, Y_n, Z_n имеет следующий вид:

$$f_n(u_1, u_2, u_3) = E e^{iu_1 X_n + iu_2 Y_n + iu_3 Z_n} = e^{i\sqrt{r_n}(u_1 \sqrt{p_{k_n}} + u_2 \sqrt{p_{m_n}} + u_3 \sqrt{1-p_{k_n}-p_{m_n}})} \times \\ \times \left(p_{k_n} e^{iu_1 / \sqrt{r_n p_{k_n}}} + p_{m_n} e^{iu_2 / \sqrt{r_n p_{m_n}}} + p_{k_n} e^{iu_3 / \sqrt{r_n(1-p_{k_n}-p_{m_n})}} \right).$$

Здесь u_1, u_2, u_3 — произвольные вещественные числа. С помощью несложных вычислений мы получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(u_1, u_2, u_3) = e^{-u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 + (u_1 \sqrt{p'} + u_2 \sqrt{p''} + u_3 \sqrt{1-p'-p''})^2}.$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(u_1, u_2, 0) = e^{-(1-p')u_1^2 + 2\sqrt{p'p''}u_1 u_2 - (1-p'')u_2^2}.$$

Функция справа является совместной характеристической функцией нормальных случайных величин X и Y . При этом $EX = EY = 0$, $EX^2 = 1 - p'$, $EY^2 = 1 - p''$. По теореме о непрерывности [1, с. 119] совместное распределение случайных величин X_n и Y_n сходится слабо при $n \rightarrow \infty$ к распределению случайных величин X и Y .

Обозначим $I[A]$ индикаторную функцию множества A . Привлекая (4) и неравенство Коши–Буняковского, мы получим для любого $\lambda > 0$, что

$$E((\phi_k - E\phi_k)^2 (\phi_m - E\phi_m)^2 I[(\phi_k - E\phi_k)^2 (\phi_m - E\phi_m)^2 > \lambda]) \leq \lambda^{-1/4} E[|\phi_k - E\phi_k|^{5/2} |\phi_m - E\phi_m|^{5/2}] \leq \\ \leq \lambda^{-1/4} \left(E|\phi_k - E\phi_k|^5 E|\phi_m - E\phi_m|^5 \right)^{1/2} \leq \frac{c}{\lambda^4}$$

и, следовательно,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_{1 \leq k < m \leq s} E((\phi_k - E\phi_k)^2 (\phi_m - E\phi_m)^2 I[(\phi_k - E\phi_k)^2 (\phi_m - E\phi_m)^2 > \lambda]) = 0.$$

Это означает, что последовательность случайных величин

$$(\phi_{k_n} - E\phi_{k_n})^2 (\phi_{m_n} - E\phi_{m_n})^2 = (X_n^2 - EX_n^2)(Y_n^2 - EY_n^2), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

равномерно интегрируема. Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[(\phi_{k_n} - E\phi_{k_n})^2 (\phi_{m_n} - E\phi_{m_n})^2] = E[(X^2 - EX^2)(Y^2 - EY^2)] = \\ = E[X^4 Y^4 - 2X^2 Y^4 EX^2 + Y^4 (EX^2)^2 - 2X^4 Y^2 EY^2 + 4X^2 Y^2 EX^2 EY^2 - \\ - 2Y^2 EY^2 (EX^2)^2 + X^4 (EY^2)^2 - 2X^2 EX^2 (EY^2)^2 + (EX^2)^2 (EY^2)^2].$$

Выше были указаны значения для EX^2 и EY^2 . Известно также, что $EX^4 = 3(1-p')^2$, $EY^4 = 3(1-p'')^2$. Оставшиеся смешанные моменты можно вычислить по известным правилам с помощью совместной характеристической функции случайных величин X и Y . Вот результаты подсчетов: $E(X^4Y^4) = 9(1-p')^2(1-p'')^2 + 72p'p''(1-p')(1-p'') + 24(p'p'')^2$, $E(X^2Y^4) = 3(1-p')(1-p'')^2 + 12p'p''(1-p'')$, $E(X^4Y^2) = 3(1-p')^2(1-p'')^2 + 12p'p''(1-p')$, $E(X^2Y^2) = 2p'p'' + (1-p')(1-p'')$. Подытоживая, мы приходим к равенству

$$E[(X^2 - EX^2)^2(Y^2 - EY^2)^2] = 4(1-p')^2(1-p'')^2 + 32p'p''(1-p')(1-p'') + 24(p'p'')^2.$$

Отсюда следует (7), так как $0 \leq \min\{p', p''\} \leq \varepsilon$ и $\max\{p', p''\} \leq 1$. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность В.М. Круглову за помощь, оказанную при выполнении данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1975.
2. Туманян С.Х. Асимптотическое распределение критерия χ^2 при одновременном возрастании объема наблюдений и числа групп // Теория вероятн. и ее применен. 1956. 1. Вып. 1. С. 131–145.

Поступила в редакцию
31.05.05

УДК 517.977.56, 519.633.6

В. Е. Когutowский

ПОСТРОЕНИЕ КОНЕЧНОМЕРНОЙ H_∞ -ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ¹

(кафедра системного анализа факультета ВМиК)

1. Введение. В условиях первой краевой задачи для параболического уравнения с пространственной переменной размерности “три” приводится схема построения оценок конечного состояния системы в смысле H_∞ -критерия [1] по результатам наблюдений, подверженным неопределенным возмущениям. Предполагается, что начальное и краевое состояния, правая часть и помеха неизвестны и стеснены совместными квадратичными ограничениями [2]. При этом число, задающее ограничение на интегральный квадратичный функционал от неизвестных функций, также неизвестно. В связи со сказанным ставится задача о построении таких оценок, при которых коэффициент пропорциональности между ошибкой оценки “выходов” системы и нормой вектора “входов” (являющейся мерой неопределенности неизвестных “входных функций”) являлся бы наименьшим из возможных.

Для указанной первой краевой задачи построена последовательность аппроксимирующих конечномерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью метода прямых [3], записаны конечномерные аналоги уравнения наблюдения с сенсором интегрального вида и квадратичных ограничений. Указан вид конечномерных H_∞ -оценок конечного состояния аппроксимирующей системы. Для этого рассмотрены последовательность операторных уравнений Риккати [4, 5] и их конечномерные аналоги. Сформулировано определение информационного множества соответствующей аппроксимирующей задачи.

Основным результатом работы является доказательство поточечной, равномерной по времени сходимости построенной последовательности решений конечномерных уравнений Риккати. Также сформулированы достаточные условия и показана равномерная по времени сходимость последовательности

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ, № 03-01-00663, программы “Университеты России — Фундаментальные исследования”, грант № УР.03.02.521 и программы поддержки ведущих научных школ Российской Федерации, грант № НШ-1889.2003.1.