ИНФОРМАТИКА

УДК 519.6

П. А. Зубов, Г. Г. Меньшиков

ОБ ЕДИНИЦЕ МЛАДШЕГО РАЗРЯДА МАШИННОГО ЧИСЛА

Лемма 1. *Для единицы младшего разряда* (ЕМР) *машинного числа*

$$x = \sigma \cdot \mu^p \cdot m \tag{1}$$

(где σ – знак числа, натуральное μ – основание позиционной системы счисления, p – порядок числа, $s+1$ – число разрядов мантиссы), не равного нулю и удовлетворяющего нормирующему условию

$$1 \leqslant m < \mu, \tag{2}$$

верна формула

$$\text{ЕМР}(x) = Q(x) = \mu^{-s+Int \log_\mu |x|}. \tag{3}$$

Здесь $Int(x)$ – наибольшее целое, содержащееся в x.

Доказательство. Рассмотрим мантиссу m данного машинного числа как отдельное число, т. е. полагаем $p = 0$. Тогда ясно, что ее ЕМР равна μ^{-s} (рис. 1).

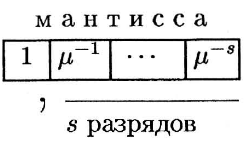

Рис. 1.

Рис. 2.

Если $m = 1$, то подставим данный $x = 1$ в (3). Так как $\log_\mu 1 = 0$, то $Q(1) = \mu^{-s}$, т. е. (3) выполнено.

Если же $m > 1$, но все равно выполнено (2), то по-прежнему $0 \leqslant \log_\mu |x| < 1$, и потому $Int \log_\mu |x| = 0$. Равенство (3) выполняется.

Пусть теперь $p \neq 0$. Тогда $= \mu^p \mu^{-s} = \mu^{p-s}$. Далее проверим (3). Подставим в (3) $|x| = \mu^p m$. Тогда

$$Q(x) = \mu^{-s+Int \log_\mu \mu^p m} = \mu^{-s+Int\left(p+\log_\mu m\right)} =$$

$$= \mu^{-s+p+Int \log_\mu m} = \mu^{-s+p}, \tag{4}$$

так как $0 \leqslant \log_\mu m < 1$. Как видно, соотношение (3) верно. Лемма доказана.

© П. А. Зубов, Г. Г. Меньшиков, 2006

Лемма 2. *Для единицы младшего разряда* (ЕМР) *машинного числа* (1), *не равного нулю и удовлетворяющего нормирующему условию*

$$\frac{1}{\mu} \leqslant m < 1, \tag{5}$$

верна формула (3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим мантиссу m данного машинного числа как отдельное число, т. е. полагаем $p = 0$. Предположим сначала, что мантисса равна $\frac{1}{\mu}$. Тогда младший разряд по счету $- s + 1$-й (рис..2) и потому $= \mu^{-s-1}$.

Проверим соотношение (3). Подставим $|x| = \frac{1}{\mu}$ в (3). Пишем:

$$Q(x) = \mu^{-s+Int \log_\mu \frac{1}{\mu}} = \mu^{-s+Int(-1)} = \mu^{-s-1}.$$

Те же рассуждения верны, если $m > \frac{1}{\mu}$, поскольку

$$Q(x) = \mu^{-s+Int \log_\mu m} = \mu^{-s+Int(-1)} = \mu^{-s-1}.$$

Эти рассуждения верны и в случае $p \neq 0$. Тогда $= \mu^p \mu^{-s} = \mu^{p-s}$. Далее проверим (3). Подставим в (3) $|x| = \mu^p m$. Тогда

$$Q(x) = \mu^{-s+Int \log_\mu \mu^p m} = \mu^{-s+Int\left(p+\log_\mu m\right)} = \mu^{-s+p+Int \log_\mu m}. \tag{6}$$

Так как $-1 \leqslant \log_\mu m < 0$, то

$$Q(x) = \mu^{-s+p-1}. \tag{7}$$

Как видно, соотношение (3) верно.

Лемма доказана.

Из лемм следует

Теорема. *В случаях* 1 *и* 5 *верно соотношение* (3).

Следствие. Имеет место неравенство

$$\mu^{-s-1}|x| < Q(x) \leqslant \mu^{-s} \tag{8}$$

Действительно, из выражения (4) получаем

$$Q(x) = \mu^{-s+p} = \mu^p \frac{m}{m} \mu^{-s} = |x| \frac{\mu^{-s}}{m}.$$

Применяя к m двустороннее неравенство (2), находим неравенство (8). Затем из выражения (7) имеем

$$Q(x) = \mu^{-s+p-1} = \mu^p \frac{m}{m} \mu^{-s-1} = |x| \frac{\mu^{-s-1}}{m}.$$

Применяя к m двустороннее неравенство (5), получаем неравенство (8).

Для случая (2) оно было выведено в монографии одного из авторов статьи (*Меньшиков Г. Г.* Локализующие вычисления: Конспект лекций. Вып. 1: Введение в интервально-локализующую организацию вычислений. СПб., 2003. С. 25, 26).

Summary

Zubov P. A., Menshekov G . G. Least-significant digit of machine number.

An expresssion is obtained for the least-significant digit of machine number.

Статья поступила в редакцию 6 марта 2006 г.