УДК 514

А. И. Долгарев

ГАЛИЛЕЕВЫ НАТУРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЕВКЛИДОВОЙ КРИВОЙ (I. АФФИННЫЕ И ГАЛИЛЕЕВЫ ПОНЯТИЯ)

Аннотация. В евклидовой геометрии возможно использование галилеевых методов исследования. Галилеевы кривизны евклидовой кривой естественны для нее так же, как и евклидовы кривизны. Подготовлены условия для использования галилеевых методов.

Ключевые слова: евклидова кривая, галилеева кривизна, галилеево кручение, плоскость галилеевых кривизн, эклиптика, стабилизация евклидова пространства.

Abstract. In Euclidean geometry use the Galileo methods of research are possible. Galileo curvature of Euclidean curve are natural to it also, as well as Euclidean curvature. To prepare the conditions for employment Galileo methods.

Keywords: Euclidean curve, Galilean curvature, Galileo torsion, Galileo plane curvatures, ecliptic, stabilization of the Euclidean space.

Введение

Работа разделена на две части. В первой части обосновывается общий подход к кривым евклидова и галилеева пространств, излагается идея аффинного метода с последующим использованием как соответствующих метрических свойств, так и методов одной из геометрий в изучении свойств кривой в другой геометрии. Приводится изложение главных результатов второй, основной части работы.

Теория евклидовых кривых изучается, согласно [1, с. 414–416], с первой половины XVIII в., в это время была построена теория плоских кривых. Далее выяснилось, что всякая регулярная евклидова кривая в окрестности своей обыкновенной точки является малым отрезком либо прямой линии, либо окружности, либо винтовой линии. Основная теорема теории кривых устанавливает, что функции кривизны и кручения кривой определяют кривую однозначно, с точностью до положения в пространстве. Указанные функции называются натуральными уравнениями кривой. Получение векторного задания евклидовой кривой по ее натуральным уравнениям довольно сложно, см., например, [1, с. 137–144, 196–208]. При этом используются векторы сопровождающего репера кривой, формулы Френе и естественная параметризация кривой.

Развитие теории евклидовых кривых происходило последовательно, альтернативных вариантов не появлялось; нужно было преодолевать возникающие на этом единственном пути трудности. Альтернатива возникла в связи с появлением различных геометрий, изучающих одни и те же объекты, в том числе кривые. К ним относится и геометрия Галилея, возникшая позже.

Появился другой смысловой уровень: к кривым и другим геометрическим фигурам применяются методы исследования из различных геометрий, которые имеют общую основу. В частности, методы различных геометрий пространств со скалярным произведением векторов используются в изучении свойств аффинных кривых – объектов аффинной геометрии, на которой базируются различные евклидовы геометрии. Галилеевы методы применяются для изучения евклидовых кривых. Ситуация естественная и, естественно, приносящая новые плоды.

Евклидову геометрию можно получить из аффинной геометрии. Кривые могут быть заданы и в аффинном пространстве. После введения в линейном пространстве аффинного пространства евклидова скалярного произведения векторов заданные аффинные кривые становятся евклидовыми. А после введения галилеева скалярного произведения векторов те же аффинные кривые становятся галилеевыми. К изучению евклидовых кривых можно пытаться применять и галилеевы методы. Линиями постоянных кривизн в пространстве-времени Галилея являются прямая, галилеев цикл (парабола), винтовая линия. В евклидовой геометрии установлено, что во всякой обыкновенной точке регулярная евклидова кривая обладает соприкасающейся параболой [2, с. 160], в [3, с. 74–75] такая парабола описывается, но термин «соприкасающаяся парабола» не используется. Тем самым всякая регулярная евклидова кривая в окрестности ее обыкновенной точки является малым отрезком или прямой, или параболы, или винтовой линии. Точно так же описывается и всякая регулярная кривая пространства Галилея, что опять указывает на возможность использования галилеевых методов для изучения евклидовых кривых. С изучением 3-мерного пространства-времени Галилея [4, 5] появились галилеевы методы исследования кривых и возможность их использования в евклидовой геометрии.

Для евклидовых кривых в [6] определены галилеевы кривизна и кручение, определены и векторы галилеевых кривизн. Во второй части работы в каждой обыкновенной точке кривой получена плоскость галилеевых кривизн евклидовой кривой. С каждой точкой евклидовой кривой связан репер, содержащий вектор касательной и векторы галилеевых кривизн – галилеев сопровождающий репер евклидовой кривой; репер не является ортогональным. При движении точки по кривой плоскость галилеевых кривизн перемещается параллельно сама себе, см. ниже теорему 3. То есть положение плоскости галилеевых кривизн евклидовой кривой не зависит от точки на кривой. А если все евклидовы кривые рассматривать в одном репере, то они имеют общую плоскость галилеевых кривизн с точностью до параллельности. Плоскость галилеевых кривизн является аналогом плоскости эклиптики Солнечной системы. Это некоторая выделенная плоскость евклидова пространства. Если евклидовы кривые рассматриваются в различных реперах, то движениями евклидова пространства реперы можно совместить, что равносильно изучению кривых в одном и том же репере.

Классическая евклидова геометрия изучает евклидово пространство, используя его однородность – одинаковость во всех направлениях. Применяя в евклидовой геометрии галилеевы методы исследования, мы изучаем неоднородность евклидова пространства. Эта неоднородность присутствует; дело только в том – замечаем мы ее или не замечаем. Плоскость галилеевых кривизн есть элемент стабилизации евклидова пространства, выделение такой плоскости стабилизирует евклидово пространство.

Ниже приводятся основные положения геометрии Галилея, необходимые для определения галилеевых кривизн евклидовой кривой, рассмотрения плоскости галилеевых кривизн, ее свойств и доказательства теоремы о галилеевых натуральных уравнениях евклидовой кривой.

1. Об аффинном действительном пространстве

1.1. Линии и поверхности аффинного пространства

Рассматривается 3-мерное действительное аффинное пространство $\mathbf{A}^3$, его линейным пространством является пространство $\mathbf{L}^3$ над полем $\mathbf{R}$ действительных чисел. Базис $\mathbf{Б} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ линейного пространства позволяет ввести координаты векторов в $\mathbf{L}^3$: $\vec{v} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = (x, y, z)$. С использованием репера $\mathbf{B} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ аффинного пространства $\mathbf{A}^3$ вводятся координаты точек M как координаты векторов $\overrightarrow{OM}$. Если в базисе $\mathbf{Б}$: $\overrightarrow{OM} = (x, y, z)$, то в репере $\mathbf{B}$: $M = (x, y, z)$. Всяким двум точкам $A = (a^1, a^2, a^3)$ и $B = (b^1, b^2, b^3)$ аффинного пространства соответствует вектор

$$\overrightarrow{AB} = (b^1 - a^1, b^2 - a^2, b^3 - a^3).$$

Прямая линия аффинного пространства определяется точкой и ненулевым вектором. Точка A и вектор $\vec{m} \neq \vec{o}$ определяют прямую, обозначаемую $< A, \vec{m} >$; эта прямая есть множество точек:

$$< A, \vec{m} > = \{M \mid \overrightarrow{AM} = t\vec{m}, \quad t \in \mathbf{R}\},$$

M – произвольная точка прямой. Пусть $A = (a^1, a^2, a^3)$, $M = (x, y, z)$, $\vec{m} = (m^1, m^2, m^3)$ в репере $\mathbf{B}$. Векторная функция, описывающая прямую $< A, \vec{m} >$, есть

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (m^1 t + a^1, m^2 t + a^2, m^3 t + a^3).$$

Прямая является одним из отображений λ: $\mathbf{R} \to \mathbf{A}^3$. Произвольное отображение $\mathbf{R} \to \mathbf{A}^3$ или $\mathbf{I} \to \mathbf{A}^3$, где $\mathbf{I}$ – интервал в $\mathbf{R}$ или $\mathbf{R}$, задает произвольную линию в $\mathbf{A}^3$, которая описывается векторной функцией

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \ t \in \mathbf{I} \subseteq \mathbf{R}.$$

Примеры линий:

$$\vec{r}(t) = \left(t, \frac{1}{2}t^2, \frac{1}{6}t^3\right), \ t \in \mathbf{R}, \ \vec{r}(t) = (t, t\cos\ln t, t\sin\ln t), \ t > 0, \text{ и т.д.}$$

Одна и та же линия может быть задана различными отображениями $\mathbf{I} \to \mathbf{A}^3$, т.е. различными параметризациями. Плоская линия может быть задана явной функцией

$$y = f(x)$$

или параметрически векторной функцией

$$\vec{r}(x) = (x, f(x)).$$

Точка A и независимые векторы $\vec{m}, \vec{n}$ определяют в аффинном пространстве $\mathbf{A}^3$ плоскость

$$< A,\vec{m},\vec{n} > = \{M \mid \overrightarrow{AM} = u\vec{m} + v\vec{n},\ (u,v) \in \mathbf{R}^2\};$$

M – произвольная точка плоскости. Если $A = (a^1, a^2, a^3)$, $M = (x, y, z)$, $\vec{m} = (m^1, m^2, m^3)$, $\vec{n} = (n^1, n^2, n^3)$, то плоскость $< A,\vec{m},\vec{n} >$ описывается векторной функцией

$$\vec{r}(u,v) = (m^1u + n^1v + a^1\ , m^2u + n^2v + a^2\ \ , m^3u + n^3v + a^3).$$

Это отображение вида $\pi: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{A}^3$. Поверхность аффинного пространства $\mathbf{A}^3$ задается отображением $\varphi:\ \mathbf{R}^2 \supseteq \mathbf{D} \to \mathbf{A}^3$, которое конкретизируется функцией

$$\vec{r}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big),\ (u,v) \in \mathbf{D} \subseteq \mathbf{R}^2;$$

например, $\vec{r}(u,v) = \left(u, v, \dfrac{1}{2}(u^2 - v^2)\right)$.

1.2. Метризация аффинного пространства

Наделяя аффинное пространство метрическими свойствами, приходим к пространствам, в которых возможны измерения расстояний между точками и других величин. Этого можно добиться на основе определения скалярного произведения векторов в линейном пространстве аффинного пространства.

Скалярные произведения векторов есть отображения $\mathbf{L}^3 \times \mathbf{L}^3 \to \mathbf{R}$ с некоторыми свойствами, их можно задать функциями координат. Скалярные произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначаются: $\vec{a}\vec{b}$. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, если $\vec{a}\vec{b} = 0$. В частности, получается скалярный квадрат $\vec{a}^2 = \vec{a}\vec{a}$ вектора $\vec{a}$; на его основе вводится норма вектора. Длиной, модулем, нормой вектора $\vec{a}$ называется $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$. Вектор $\vec{x}$ называется изотропным, если $\vec{x} \neq \vec{o}$ и $|\vec{x}| = 0$. Пусть паре точек (A, B) аффинного пространства $\mathbf{A}^3$ соответствует вектор $\vec{m}$ его линейного пространства $\mathbf{L}^3$, этот факт записывается в виде $\vec{m} = \overrightarrow{AB}$. Расстоянием $|AB|$ между точками A и B аффинного пространства $\mathbf{A}^3$ со скалярным произведением векторов называется величина

$$|AB| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}\ .$$

Свойства расстояний между точками определяются свойствами соответствующего скалярного произведения векторов.

Рассматриваем два вида скалярных произведений векторов: евклидово и галилеево. Зададим их в координатах векторов; свойства скалярных произведений векторов обусловлены их заданием.

Рассматриваются отображения $r: \mathbf{I} \to \mathbf{L}^3$, определяющие векторную функцию: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in \mathbf{I} \subseteq \mathbf{R}$. Числу t из интервала $\mathbf{I}$ соответствует вектор $\vec{r}(t)$ в линейном пространстве $\mathbf{L}^3$. Если в $\mathbf{L}^3$ задано евклидово скалярное произведение векторов, то имеем евклидову векторную функцию; если задано галилеево скалярное произведение векторов, то имеем галилееву векторную функцию. Считаем, что действительные скалярные функции $x(t), y(t), z(t)$ являются функциями класса C^k, т.е. не менее k раз дифференцируемыми, $k \geq 3$. И векторная функция $\vec{r}(t)$ имеет класс C^k.

1.3. Евклидово скалярное произведение векторов

Евклидовым скалярным произведением векторов $\vec{x} = (x, y, z)$ и $\vec{u} = (u, v, w)$ называется число

$$\vec{x}\vec{u} = xu + yv + zw.$$

Скалярный квадрат вектора $\vec{x}$ равен

$$\vec{x}^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Выполняются:

– свойство неотрицательности:

$$\vec{x}^2 \geq 0;\ \vec{x}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{o};$$

– неравенство треугольника:

$$\vec{x}^2 + \vec{u}^2 \leq (\vec{x} + \vec{u})^2;$$

норма $|\vec{x}|$ вектора $\vec{x}$ равна

$$|\vec{x}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Линейное пространство с евклидовым скалярным произведением векторов называется евклидовым и обозначается $\mathbf{V}^3$. Евклидово векторное пространство не содержит изотропных векторов.

1.4. Галилеево скалярное произведение векторов

Галилеевым скалярным произведением векторов $\vec{x} = (x, y, z)$ и $\vec{u} = (u, v, w)$ называется число

$$\vec{x}\vec{u} = \begin{cases} xu, \text{ если } x \neq 0, \text{ или } u \neq 0; \\ yv + zw, \text{ если } x = u = 0; \end{cases}$$

галилеев скалярный квадрат вектора равен

$$\vec{x}^2 = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \neq 0; \\ y^2 + z^2, \text{ если } x = 0; \end{cases}$$

галилеева норма $|\vec{x}|$ вектора $\vec{x}$ равна

$$|\vec{x}| = \begin{cases} |x|, \text{ если } x \neq 0; \\ \sqrt{y^2 + z^2}, \text{ если } x = 0. \end{cases}$$

Введено галилеево скалярное произведение векторов в [4, с. 10; 5, с. 32–36]. Линейное пространство $\mathbf{L}^3$ с галилеевым скалярным произведением векторов называется галилеевым и обозначается $\mathbf{V}_\Gamma^3$. Компонента x вектора $(x, y, z) = \vec{x}$ называется временной, компоненты y, z называются пространственными. Векторы из $\mathbf{V}_\Gamma^3$ с ненулевой временной составляющей называются галилеевыми, это векторы (x, y, z), $x \neq 0$; векторы с нулевой временной составляющей называются евклидовыми, это векторы $(0, y, z)$. Базисом пространства $\mathbf{V}_\Gamma^3$ является $\mathbf{Б} = (\vec{e}, \vec{i}, \vec{j})$, где $\vec{e} = (1,0,0)$, $\vec{i} = (0,1,0)$, $\vec{j} = (0,0,1)$. Для всякого вектора $\vec{x} = (x, y, z)$ имеется однозначное разложение по векторам базиса $\vec{x} = x\vec{e} + y\vec{i} + z\vec{j}$ и однозначное разложение в сумму временного и пространственного слагаемых:

$$\vec{x} = x\vec{e} + \vec{r}\,,\ \vec{r} = y\vec{i} + z\vec{j} \in \langle \vec{i}, \vec{j} \rangle.$$

Оболочка $\mathbf{V}^1 = \langle \vec{e} \rangle$ вектора $\vec{e}$ является временной составляющей пространства $\mathbf{V}_\Gamma^3$, оболочка $\langle \vec{i}, \vec{j} \rangle = \mathbf{V}^2$ – пространственной составляющей пространства $\mathbf{V}_\Gamma^3$, галилеево векторное пространство $\mathbf{V}_\Gamma^3$ есть прямая сумма $\mathbf{V}_\Gamma^3 = \mathbf{V}^1 + \mathbf{V}^2$, каждая из составляющих является евклидовым пространством, $\mathbf{V}_\Gamma^3$ – это векторное пространство-время. Вектор $\vec{e}$ галилеев, его норма $|\vec{e}| = 1$, векторы $\vec{i}, \vec{j}$ евклидовы, $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$, $\vec{e}\vec{i} = 0$, $\vec{e}\vec{j} = 0$. Всякий галилеев вектор перпендикулярен всякому евклидову вектору. Базис $\mathbf{Б} = (\vec{e}, \vec{i}, \vec{j})$ ортонормирован. В $\mathbf{V}_\Gamma^3$ нет изотропных векторов.

Временное направление в $\mathbf{V}_\Gamma^3$ есть полупространство в $\mathbf{V}_\Gamma^3$, состоящее из галилеевых векторов, временные компоненты которых имеют один и тот же знак. Одно из направлений считается положительным, противоположное направление считается отрицательным. Пространственное направление в $\mathbf{V}_\Gamma^3$ совпадает с направлением в $\mathbf{V}^2$. Угол между галилеевыми векторами никак не определяется, так как временное пространство 1-мерно. Угол между евклидовыми векторами в $\mathbf{V}_\Gamma^3$ определяется, как в евклидовом векторном пространстве.

В $\mathbf{V}_\Gamma^3$ неравенство треугольника не выполняется. Например, для векторов $\vec{a} = (2,3,1), \vec{b} = (-2,1,2)$ имеем: $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 24$, $\vec{a} + \vec{b} = (0,4,3)$, $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = 5$, $|\vec{a}| + |\vec{b}| < |\vec{a} + \vec{b}|$. Производная функции $\vec{r}(t)$ в векторных пространствах $\mathbf{V}^3$ и $\mathbf{V}_\Gamma^3$ есть функция $\vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.

2. Пространства со скалярным произведением векторов

2.1. Расстояния

Аффинное пространство $\mathbf{A}^3$, в линейном пространстве $\mathbf{L}^3$ которого введено евклидово скалярное произведение векторов, называется евклидовым пространством и обозначается $\mathbf{E}^3$; если же в $\mathbf{L}^3$ определено галилеево скалярное произведение векторов, то аффинное пространство $\mathbf{A}^3$ превращается в пространство-время Галилея $\mathbf{Г}^3$.

Свойства евклидовых векторных пространств переносятся на аффинное пространство, в линейном пространстве которого определено соответствующее скалярное произведение векторов. Аффинное пространство становится метризованным. Тем самым получаем пространства, в которых возможны измерения расстояний между точками и величин углов. Эта возможность реализуется посредством скалярного произведения векторов на основе равенства $|AB|=\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$ из п. 1.2.

Рассмотрим два пространства со скалярным произведением векторов: евклидово пространство и пространство Галилея.

2.2. Евклидово пространство

В пространстве $\mathbf{E}^3$ рассматриваются ортонормированные реперы. Для точек $A=(a^1,a^2,a^3)$ и $B=(b^1,b^2,b^3)$ (согласно п. 1.1–1.3) имеем

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(b^1-a^1)^2+(b^2-a^2)^2+(b^3-a^3)^2}\ .$$

Линии и поверхности аффинного пространства являются линиями и поверхностями евклидова пространства. Это относится, в частности, к прямым и плоскостям.

Кривая $\vec{r}(t)$ со свойствами $\vec{r}(t)$ есть функция класса C^k, $k\geq 3$, $\vec{r}''\notin<\vec{r}'>, \vec{r}'\neq\vec{o}$, называется регулярной класса C^3, каждая точка такой кривой называется обыкновенной. Регулярные кривые рассматриваются в окрестности ее обыкновенной точки, которая обычно обозначается $P=P(t_0)$, $t_0\in\mathbf{I}$. Отображение $r:\mathbf{I}\to\mathbf{E}^3$ называется параметризацией кривой $\vec{r}(t)$.

2.3. Пространство-время Галилея

Аффинное пространство $\mathbf{A}^3$, в линейном пространстве $\mathbf{L}^3$ которого введено Галилеево скалярное произведение векторов, называется пространством Галилея и обозначается $\mathbf{Г}^3$. Репер $\mathbf{B}$ = $(O,\vec{e},\vec{i},\vec{j})$ пространства $\mathbf{Г}^3$, содержащий ортонормированный базис $\mathbf{Б}=(\vec{e},\vec{i},\vec{j})$ векторного пространства $\mathbf{V}^3_{Г}$, см. п. 1.4, называется ортонормированным. Первые координаты x точек (x,y,z) пространства $\mathbf{Г}^3$ называются временными, вторые и третьи y,z координаты точек называются пространственными. Наряду с обычными обозначениями координат точек $M(x,y,z)$ используются специализированные обозначения $M(t,x,y)$, подчеркивая тем самым указанный выше характер координат. Точки из $\mathbf{Г}^3$ называются еще событиями, в связи с чем пространство-время $\mathbf{Г}^3$ называется еще пространством событий. Событие $M(t,x,y)$ происходит в момент времени t в точке, характеризующейся координатами x,y. Расстоянием между событиями $A(t_1,x_1,y_1)$ и $B(t_2,x_2,y_2)$, см. п. 1.4, называется число

$$|AB| = \begin{cases} |t_2 - t_1|, \text{если } t_2 \neq t_1; \\ \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \text{если } t_2 = t_1. \end{cases}$$

Величина $|t_2 - t_1|$ называется еще длительностью события $\overrightarrow{AB}$, величина $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ называется еще протяженностью события $\overrightarrow{AB}$. События $A(t, x_1, y_1)$ и $B(t, x_2, y_2)$, происходящие в один и тот же момент времени, называются одновременными, такие события характеризуются только длительностью, неодновременные события характеризуются только протяженностью. Множество всех событий $M(t, x, y)$, одновременных с данным событием $P(t, a, b)$, согласно определению галилеева расстояния между точками-событиями является 2-мерным евклидовым пространством – евклидовым подпространством пространства-времени Галилея $\mathbf{\Gamma}^3$, это евклидова плоскость $\mathbf{E}^2$ в пространстве Галилея. Таким образом, выполняется

Свойство 1. *Через всякую точку пространства-времени Галилея* $\mathbf{\Gamma}^3$ *проходит единственная евклидова плоскость*.

Время в пространстве-времени Галилея $\mathbf{\Gamma}^3$ 1-мерно. Временное направление в $\mathbf{\Gamma}^3$ определяется галилеевым вектором (t, x, y), $t \neq 0$; все галилеевы векторы с ненулевой временной компонентой одного и того же знака определяют одно и то же временное направление. Временное направление в точке P пространства-времени Галилея $\mathbf{\Gamma}^3$ есть полупространство, границей которого является евклидова плоскость, проходящая через точку P и содержащая заданную точку Q, чтобы $\overrightarrow{PQ} = (t, x, y)$.

Прямая $< A, \vec{v} >$, все ненулевые векторы которой являются галилеевыми, называется галилеевой. Остальные прямые пространства-времени Галилея являются евклидовыми. Плоскость, имеющая галилеевы векторы, называется галилеевой; остальные плоскости являются евклидовыми. Всякая галилеева плоскость может быть задана одним галилеевым и одним евклидовым векторами.

3. Галилеевы кривые

3.1. Виды кривых пространства Галилея

Свойства кривых 3-мерного пространства-времени Галилея изучаются в [4; 5, с. 46–69]. Отображение интервала $\mathbf{I}$ действительной оси $\mathbf{R}$ в аффинное пространство называется кривой, или линией аффинного пространства. Если в аффинном пространстве введена галилеева норма, то имеем кривую пространства-времени Галилея $\mathbf{\Gamma}^3$. Если $(O, \vec{e}, \vec{i}, \vec{j})$ – репер пространства $\mathbf{\Gamma}^3$, $\vec{e}$ – временной вектор, $\vec{i}, \vec{j}$ – пространственные векторы, то кривая описывается галилеевой векторной функцией

$$\gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big), \; t \in \mathbf{I} \subseteq \mathbf{R}, \qquad (1)$$

с временной компонентой $x(t)$.

Кривая $\gamma(t)$ называется регулярной класса C^3, если функция $\gamma(t)$, а значит, и функции $x(t), y(t), z(t)$ не менее трех раз дифференцируемы, $\gamma'(t) \neq 0$, векторы $\gamma'(t)$, $\gamma''(t)$ не коллинеарны. Точки регулярной кривой называются обыкновенными. Рассматриваем регулярные кривые в окрестности обыкновенной точки.

Если $x'(t) = 0$ в окрестности обыкновенной точки P, то касательный вектор $\gamma'(t)$ кривой (1) евклидов. В окрестности точки P кривая (1) лежит в евклидовой плоскости. Такие кривые изучает евклидова геометрия. Мы рассматриваем случай

$$x'(t) \neq 0 .$$

Касательный вектор такой кривой галилеев. Функция $x(t)$ обратима, существует функция $t = t(x)$. Кривая с галилеевыми касательными векторами записывается в естественной параметризации:

$$\gamma(t) = \big(t, x(t), y(t)\big),\ t \in \mathbf{I} \subseteq \mathbf{R} . \tag{2}$$

Интервал $\mathbf{I}$ по сравнению с (1) может измениться. Касательный вектор этой кривой в любой обыкновенной точке P является единичным:

$$\dot{\gamma}(t) = (1, \dot{x}(t), \dot{y}(t)) ,$$

вектор второй производной евклидов:

$$\ddot{\gamma}(t) = (0, \ddot{x}(t), \ddot{y}(t)) ,$$

он перпендикулярен вектору первой производной $\dot{\gamma}(t)$; $\ddot{\gamma}(t) \perp \dot{\gamma}$.

3.2. Кривизны галилеевой кривой

Выделим единичный вектор второй производной:

$$\ddot{\gamma}(t) = k_1(t)\vec{n},\ |\vec{n}| = 1,\ k_1(t) = |\ddot{\gamma}| . \tag{3}$$

Вектор $\vec{n}$ называется единичным вектором главной нормали галилеевой кривой, $k_1(t) \geq 0$; $\ddot{\gamma}$ называется вектором кривизны:

$$\vec{n} = \frac{1}{k_1}(0, \ddot{x}, \ddot{y}) .$$

Плоскость $< P, \dot{\gamma}, \vec{n} >$ называется соприкасающейся для кривой (2). Положение касательной и соприкасающейся плоскости галилеевой кривой не зависит от параметризации кривой.

Для евклидова вектора $\vec{u}(u^1, u^2)$ определена каппа-функция $\kappa(\vec{u})$ [5, с. 59–61], в результате дифференцирования единичного вектора $\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$:

$\left(\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right)' = \kappa(\vec{u})\vec{g}$, $|\vec{g}| = 1$, имеем

$$\kappa(\vec{u}) = \frac{u^1 u'^2 - u^2 u'^1}{|\vec{u}|^2}, \ \vec{g} = \left(-\frac{u^2}{|\vec{u}|}, \frac{u^1}{|\vec{u}|} \right).$$

Каппа-функция вектора $\ddot{\gamma}$ называется кручением галилеевой кривой (2), единичный вектор направления $\left(\frac{\ddot{\gamma}}{k_1} \right)'$, т.е. вектора кручения, обозначается $\vec{b}$ и называется единичным вектором бинормали линии (2):

$$k_2(t) = \frac{\ddot{x} \ \ \dddot{y} - \dddot{x} \ \ \ddot{y}}{k_1^2}, \ \vec{b} = \left(-\frac{\ddot{y}}{k_1}, \frac{\ddot{x}}{k_1} \right). \qquad (4)$$

Репер $(P, \dot{\gamma}, \vec{n}, \vec{b})$ является ортонормированным сопровождающим репером галилеевой линии (2). Нормальная плоскость $< P, \vec{n}, \vec{b} >$ кривой (2) евклидова, это *плоскость кривизн* галилеевой кривой. Выполняется

Свойство 2. *При движении точки P по галилеевой кривой ее плоскость кривизн перемещается параллельно сама себе.*

Если $k_2 = 0$, то $\gamma(t)$ – плоская линия. Только прямая имеет нулевую кривизну.

Существуют следующие кривые пространства-времени Галилея, кривизны которых постоянны:

а) прямая $k_1 = 0$, $k_2 = 0$;

б) парабола (галилеев цикл) $k_1 \neq 0$, $k_2 = 0$;

в) винтовая линия $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$.

В малой окрестности обыкновенной точки галилеева кривая есть либо отрезок прямой, либо дуга параболы, либо дуга винтовой линии.

Аналог формул Френе галилеевой линии:

$$\ddot{\gamma} = k_1 \vec{n}, \quad \dot{\vec{n}} = k_2 \vec{b}, \quad \dot{\vec{b}} = -k_2 \vec{n}.$$

3.3. Натуральные уравнения галилеевой кривой

Функции кривизн $k_1(t) \geq 0$ и $k_2(t)$ галилеевой кривой, определенные в (3) и (4), могут быть записаны в координатах. Обозначим: $k_1(t) = k$, $k_2(t) = m$. На основании определений кривизны и кручения получается система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 = k^2, \\ \ddot{x} \ \ \dddot{y} - \dddot{x} \ \ \ddot{y} = k^2 m. \end{cases} \qquad (5)$$

Теорема 1 (Основная теорема теории кривых). *При заданных функциях*

$$k_1(t) = k \geq 0, \ k_2(t) = m$$

решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений (5) *являются функции* $x(t), y(t)$ *– пространственные компоненты галилеевой кривой* (2), *тем самым кривая пространства-времени Галилея определяется одно-*

значно с точностью до положения в пространстве. Ее кривизна и кручение равны заданным величинам $k_1(t) \geq 0$ *и* $k_2(t)$. *Начальные условия*

$$t = t_0,\ x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0,\ \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0,\ \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0 \qquad (6)$$

выделяют кривую, проходящую через точку $P = (t_0, x_0, y_0)$ *в направлении касательного вектора* $\gamma_0 = (1, \dot{x}_0, \dot{y}_0)$.

Схема получения кривой по функциям $k_1(t) \geq 0$ и $k_2(t)$ содержится в [6]. Эта схема такова. Обозначим по виду первого уравнения системы (5):

$$\ddot{x} = k\cos\ M(t),\quad \ddot{y} = k\sin\ M(t),\quad M(t) = \int m dt.$$

Указанные функции удовлетворяют и второму уравнению системы (5). Дважды интегрируя функции $k\cos\ M(t),\ k\sin\ M(t)$, находим составляющие $x(t), y(t)$ вектора $\gamma(t) = (t, x(t), y(t))$. По начальным условиям (6) записываем конкретную функцию (2). Ее кривизна и кручение совпадают с заданными функциями $k_1(t) \geq 0$ и $k_2(t)$.

Основные положения второй части работы

Как отмечено в начале предисловия, первая часть настоящей работы излагает основную идею общего подхода к кривым различных евклидовых пространств. Рассматриваются аффинные кривые и метрические свойства этих кривых в метризованных пространствах. Используется другой смысловой уровень такого подхода, согласно которому кривая одного из евклидовых пространств обладает и свойствами других евклидовых пространств. Собственно евклидово пространство и пространство Галилея относятся к евклидовым пространствам – пространствам со скалярными произведениями векторов. Определения соответствующих скалярных произведений приведены в п. 1.3 и 1.4.

В изучении евклидовых кривых используется каппа-функция евклидова вектора, рассматриваемая в [5, с. 59–61; 7]. На основе этой функции в [4, 5, 7] определены кривизны галилеевых линий и далее евклидовых линий. Обсуждается вопрос об однородности аффинного и евклидова пространств, как в [8, с. 209–210, 214]. Евклидова кривая рассматривается в выделенной параметризации, которая введена в [7]. Так как кривая $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in \mathbf{I} \subseteq \mathbf{R}$, регулярна класса C^3, то функция $x(t)$ обратима, и та же самая кривая задается в параметризации $\vec{r}(x) = (x, y(x), z(x))$, называемой выделенной. Так же выглядит галилеева кривая в естественной параметризации, см. (2). В выделенной параметризации определяется галилеева кривизна и галилеево кручение евклидовой кривой. Доказана основная теорема об однозначной определяемости евклидовой кривой галилеевыми натуральными уравнениями. Найдена зависимость между евклидовыми кривизнами, каппа-функцией евклидова вектора и галилеевыми кривизнами евклидовой кривой.

Определена плоскость галилеевых кривизн евклидовой линии в каждой точке линии, она натягивается на векторы галилеевых кривизн. При движении обыкновенной точки по кривой плоскость галилеевых кривизн движется параллельно сама себе. Таким свойством обладает нормальная плоскость галилеевой кривой. Плоскость галилеевых кривизн напоминает плоскость эклиптики Солнечной системы. Она является элементом стабилизации евклидова пространства. Таким образом, евклидово пространство обладает и свойством однородности, и свойством, выделяющим плоскость галилеевых кривизн, т.е. свойством, уплощающим пространство. Эти два свойства напоминают ситуацию в квантовой теории (например, электрон имеет массу покоя, или, двигаясь, является волной, не имея массы). Стабилизация евклидова пространства достигается выделением плоскости галилеевых кривизн, которая одна для всех кривых. Ее единственность есть результат однородности пространства. Другим элементом стабилизации является наличие направления двойной галиллеевой кривизны евклидовой линии. Для 3-мерной линии в соответствующей параметризации после четырехкратного дифференцирования функции, задающей линию, получается 1-мерный вектор.

Список литературы

1. **Рашевский, П. К.** Курс дифференциальной геометрии / П. К. Рашевский. – М. : Гостехиздат. – 1956. – 420 с.
2. **Выгодский, М. Я.** Дифференциальная геометрия / М. Я. Выгодский. – М. ; Л. : Гостехиздат. – 1949. – 512 с.
3. **Фиников, С. П.** Курс дифференциальной геометрии / С. П. Фиников. – Изд. 2-е. – М. : КомКнига, 2006. – 344 с.
4. **Долгарев, А. И.** Элементы дифференциальной галилеевой геометрии и одуль галилеевых преобразований / А. И. Долгарев. – Саранск : Средневолжское математическое общество, 2003. – 116 с. – (Препринт 63).
5. **Долгарев, А. И.** Классические методы в дифференциальной геометрии одулярных пространств : монография / А. И. Долгарев. – Пенза : Информационно-издательский центр ПензГУ, 2005. – 306 с.
6. **Долгарев, А. И.** Некоторые приложения галилеевых методов / А. И. Долгарев, И. А. Долгарев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 2 (9). – С. 39–59.
7. **Долгарев, А. И.** Кривые 4-мерного пространства-времени Галилея / А. И. Долгарев, И. А. Долгарев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2007. – № 3. – С. 2–11.
8. **Рашевский, П. К.** Риманова геометрия и тензорный анализ / П. К. Рашевский. – Изд. 3-е. – М. : Наука, 1967. – 664 с.

Долгарев Артур Иванович
кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет

Dolgarev Artur Ivanovich
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, sub-department of mathematics and supercomputer modeling, Penza State University

E-mail: delivar@yandex.ru

УДК 514

Долгарев, А. И.

Галилеевы натуральные уравнения евклидовой кривой (I. Аффинные и галилеевы понятия) / А. И. Долгарев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 2 (14). – С. 20–31.