Бельмач Наталья Викторовна, канд. с.-х. наук, доцент, Дальневосточный ГАУ, belmach-natalya@mail.ru; **Маканникова Марина Васильевна**, канд. с.-х. наук, доцент, Дальневосточный ГАУ, markorschun@mail.ru; **Попова Елена Викторовна**, канд. техн. наук., доцент, Дальневосточный ГАУ, epop76@mail.ru; **Стекольникова Галина Анатольевна**, канд. с.-х. наук, доцент, Дальневосточный ГАУ, gala76.08@mail.ru.

Belmach Natalia Viktorovna, Cand. Agr. Sci., Ass. Prof., Far Eastern SAU, belmachnatalya@mail.ru; **Makannikova Marina Vasilevna**, Cand. Agr. Sci., Ass. Prof., Far Eastern SAU, markorschun@mail.ru; **Popova Elena Viktorovna**, Cand. Techn. Sci., Ass. Prof., Far Eastern SAU, epop76@mail.ru; **Stekolnikova Galina Anatolievna**, Cand. Agr. Sci., Ass. Prof., Far Eastern SAU, gala76.08@mail.ru.

УДК 528.2

П.А. Медведев, М.В. Новородская, С.А. Шаров
Омский государственный аграрный университет имени П.А. Столыпина, Омск

НЕИТЕРАТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ШИРОТЫ ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ПРЯМОУГОЛЬНЫМ КООРДИНАТАМ

При построении глобальных геодезических сетей и решения геодезических задач по определению положения точек земной поверхности применяют пространственные прямоугольные координаты *X*, *Y*, *Z* и геодезические *B*, *L*, *H*. В связи с этим возникает задача по преобразованию этих систем координат. В статье указаны недостатки математических решений задачи вычисления геодезической широты *B* методом итераций по известным пространственным прямоугольным координатам *X, Y, Z.* Это обусловлено тем, что при их выполнении не доказывается сходимость итерационного процесса к искомой величине, не определяется область и скорость сходимости итерационного процесса, не выводятся оценки приближений по итерациям, не выполняется сравнительный анализ, не выявляются достоинства и недостатки предлагаемых формул по отношению к известным. Не учитывая недостатки, Госстандартом РФ предложен алгоритм вычисления широты способом введения вспомогательного угла. На основе разработанной ранее теории анализа решений трансцендентного уравнения, используя принцип отделения его корня, выведен неитеративный высокоточный алгоритм для определения геодезической широты. С этой целью предварительно уменьшен промежуток изоляции корня и выведена формула для вычисления широты с высокой точностью по способу касательных при одной итерации. Получена формула для вычисления погрешности предложенного алгоритма, на ее основе установлены предельные по точности результаты определяемой широты. Для предвычисления точности и расчета вычислительной длины разрядной сетки погрешность алгоритма выражена через исходные данные. Достоверность выполненных исследований подтверждена в статье числовым примером.

Ключевые слова: неитеративный алгоритм, пространственные прямоугольные координаты, геодезическая широта, погрешность широты.

Введение

При решении геодезических задач, связанных с определением положения точек на земной поверхности, применяют пространственные геодезические координаты: геодезическую широту *B*, геодезическую долготу *L*, геодезическую высоту *H*. Обработка спутниковых наблюдений при построений глобальных геодезических сетей выполняется в пространственной прямоугольной системе координат *X*, *Y*, *Z*.

Эти системы координат связаны соотношениями [1]:

$$\begin{cases} X = \left(N + H\right)\cos B \cos L; \\ Y = \left(N + H\right)\cos B \sin L; \\ Z = \left(N\left(1 - e^2\right) + H\right)\sin B; \end{cases} \tag{1}$$

где N – радиус кривизны первого вертикала; e – первый эксцентриситет земного эллипсоида.

По системе (1) определяются прямоугольные координаты X, Y, Z по заданным геодезическим – B, L, H.

При обратных преобразованиях, т.е. при вычислениях геодезических координат B, L, H по прямоугольным X, Y, Z, наибольшие трудности вызывает определение геодезической широты B при решении трансцендентного уравнения [1]

$$tgB = \left(Z + e^2 N \sin B\right)\Big/R\,; \;\; R = \sqrt{X^2 + Y^2}\,. \tag{2}$$

Для приближенного решения транцендентного уравнения (2), коэффициенты которого являются функциями прямоугольных координат, чаще применяют метод последовательных приближений [1; 2; 3]. Однако при выводе рекуррентных формул многие авторы не уделяют должного внимания, а то и вообще не рассматривают условия сходимости итерационных процессов, скорость приближения их к корню, оценку точности получаемых результатов; не выявляют достоинств и недостатков предлагаемых формул по отношению к известным. Иногда аналитические методы исследования функций подменяются приемом сравнения вычисленных по ним результатов с их более точными величинами для отдельных значений аргументов. Анализ на таком уровне носит поверхностный характер, а выводы и предложения, сделанные на его основе, выглядят малоубедительными, а то и несостоятельными. Для осуществления таких исследований необходимо отделить корень уравнения (2), т.е. указать промежуток как можно меньшей длины, внутри которого он заключен.

С этими же недостатками Госстандартом РФ предложен итеративный алгоритм [4], полученный решением (2) способом введения вспомогательного угла.

Результаты исследований

Для анализа решений уравнения (2) разработана теория и методология отделения корня этого уравнения [5], на основе которой выполнены исследования. Доказано, что уравнение (2) в функциях с приведенной широтой u принимает более простой вид

$$tgu = \left(Z\sqrt{1 - e^2} + ae^2 \sin u\right)\Big/R\,. \tag{3}$$

Эта закономерность позволяет с наименьшими затратами строить алгоритмы и определять решения уравнения (3), а затем полученные результаты с помощью подстановки

$$tgu = \sqrt{1 - e^2}\cdot tgB \tag{4}$$

использовать для построения решений уравнения (2).

Из итеративных методов решения уравнения (3) более быструю квадратичную сходимость обеспечивают приближения методом касательных [5]

$$tgu = \frac{Z\sqrt{1 - e^2} + ae^2 \sin^3 u}{R - ae^2 \cos^3 u} = \frac{E_1}{E_2}\,. \tag{5}$$

Следовательно, на основе этой математической модели (5) можно построить неитеративное высокоточное решение, представленное только через исходные данные X,

Y, Z. Для этого величины $\sin u$ и $\cos u$, содержащиеся в (5), выразим через X, Y, Z с помощью зависимости [5]

$$tgu = Z\sqrt{1-e^2}\cdot c_0 \big/ R\,, \tag{6}$$

где $c_0 = b_0 \big/ \left(b_0 - ae^2\right)$; $\quad b_0 = \sqrt{R^2 + Z^2\left(1-e^2\right)}$ (7)

Геометрически величина b_0 – малая полуось воздушного эллипсоида, проходящего через точку Р (X, Y, Z) и имеющего тот же эксцентриситет и центр, что и земной эллипсоид.

Для упрощения исследований введем вспомогательные величины:

$$Д_1 = \sqrt{R^2 + \left(1-e^2\right)c_0 Z^2}\,;\quad Z_1 = Z/Д_1\,;\quad R_1 = R/Д_1\,. \tag{8}$$

Тогда $\cos u = 1\Big/\sqrt{1+tg^2u} = 1\Big/\sqrt{1+\left(1-e^2\right)c_0^2\,Z^2/R^2} = R/Д_1 = R_1$;

$$\sin u = tgu\cos u = c_0\sqrt{1-e^2}\cdot Z_1$$

и выражения формулы (5) принимают вид:

$$E_2 = R - ae^2\cos^3 u = R_1 Д_1 - ae^2 R_1^3 = R_1(Д_1 - ae^2 R_1^2)\,;$$

$$E_1 = Z\sqrt{1-e^2} + ae^2\sin^3 u = Z_1\sqrt{1-e^2}\left(Д_1 + ae^2\left(1-e^2\right)c_0^3 Z_1^2\right).$$

Для дальнейших преобразований E_1 используем зависимость (7), представленную в форме

$$\left(1-e^2\right)c_0^2 Z_1^2 = 1 - R_1^2\,,$$

поэтому

$$E_1 = Z_1\sqrt{1-e^2}\left(Д_1 + ae^2 c_0 - ae^2 c_0 R_1^2\right).$$

С полученными результатами E_1 и E_2 алгоритм (5) принимает вид

$$tgu = \frac{Z_1\sqrt{1-e^2}}{R_1}\cdot\frac{Д_1 + ae^2 c_0 - ae^2 c_0 R_1^2}{Д_1 - ae^2 R_1^2}\,.$$

После деления числителя на знаменатель, с учетом соотношения (4), получаем формулу для вычисления тангенса геодезической широты

$$tgB = \frac{Z}{R}\left(1 + \frac{c_0 + \left(1-c_0\right)R_1^2}{Д_1\big/\left(ae^2\right) - R_1^2}\right). \tag{9}$$

Погрешность формулы (9) вычисляем по выражению [5, с. 64]

$$\varDelta B = \frac{3}{2}\left(\frac{ae^2}{a+H}\right)^5\cdot\sin^7 B\cos^3 B\,. \tag{10}$$

Исследованиями на экстремум функции (10) устанавливаем, что ее наибольшая величина получается при $B = 33°13'$ и $H = 0$, составляет $\varDelta B = 0{,}0000002'' = 2''\cdot 10^{-7}$, или в линейной мере $\varDelta B = 0{,}006$ мм. С этими погрешностями $\varDelta B$ широта определяется и в точках земной поверхности при $\left|H\right| \le 10$ км. С увеличением высоты погрешность $\varDelta B$ убывает и при $H \to \infty$; $\varDelta B \to 0$. Для высот спутниковых траекторий $H \approx 3a$ получаем $\varDelta B = 1{,}9''\cdot 10^{-10}$.

Для предвычисления точности и расчета вычислительной длины разрядной сетки погрешность (10) выразим через исходные данные с помощью приближенных зависимостей:

$a + H = b_0;\ \sin B = Z/b_0;\ \cos B = R/b_0,$

расчетная формула (10) принимает вид

$$\Delta B'' = \frac{3}{2}\left(\rho'' \cdot e^{10}\right) \cdot \left(\frac{a}{b_0}\right)^5 \cdot \left(\frac{7}{b_0}\right)^7 \cdot \left(\frac{R}{b_0}\right)^3. \qquad (11)$$

При использовании формулы (11) достаточно вести вычисления с тремя значащими цифрами. Например, по исходным данным:

$X = 2773149,800965$ м; $Y = 1601078,784090$ м; $Z = 5509233,846979$ м

получаем $b_0 = 636 \cdot 10^4$; $a/b_0 = 1,00$; $Z/b_0 = 0,867$; $R/b_0 = 0,504$;

$\Delta B'' = \frac{3}{2} \cdot 2,76'' \cdot 10^{-6} \cdot 1^5 \cdot 0,867^7 \cdot 0,504^3 = 1,95'' \cdot 10^{-7}$, или в радианной мере $\Delta B = 10^{-12}$ рад.

Отсюда следует, чтобы определить широту *B* по формуле (9) с этой погрешностью, нужно исходные данные *X*, *Y*, *Z* иметь с 13 верными значащими цифрами и вести вычисления, сохраняя один запасной знак. Тогда получим

$B = 1,0471975511976 = 60^\circ 00'00'',0000002.$

Точное значение $B = 60^\circ$. Погрешность $\Delta B = 2'' \cdot 10^{-7}$ подтверждает достоверность как алгоритма (9), так и его оценки (10), (11).

Заключение

Итак, по результатам исследований предлагается следующий высокоточный алгоритм для вычисления геодезической широты:

1. Вычисляем постоянные величины

$k_0 = 1 - e^2 = \left((f-1)/f\right)^2;$

$k_1 = ae^2 = a(2f-1)/f^2,$

где f – знаменатель сжатия $\alpha = (a-b)/a = 1/f$.

На эллипсоиде Красовского: $a = 6378245$ м; $f = 298,3$.

В геодезической системе координат 2011 г.: $a = 637813,5$ м; $f = 298,2564151$.

2. Вычисляем широту *B*.

1) $R = X\sqrt{1 + (Y/X)^2}$;

2) $c_1 = k_0 (Z/R)^2$;

3) $b_0 = R\sqrt{1 + c_1}$;

4) $c_0 = b_0/(b_0 - k_1)$;

5) $Д_1 = R\sqrt{1 + c_1 \cdot c_0^2}$;

6) $Z_1 = Z/Д_1$; $R_1 = R/Д_1$;

7) $B = arctg\left[\frac{Z}{R}\left(1 + \frac{c_0 + (1 - c_0)R_1^2}{Д_1/\mathrm{k}_1 - R_1^2}\right)\right].$

P.A. Medvedev, M.V. Novorodskaya, S.A. Sharov
Omsk State Agrarian University named after P.A. Stolypin, Omsk

Non-iterative algorithm for calculating geodetic latitude at a spatial rectangular coordinates

When construction of global geodetic networks associated with processing of satellite observations, and the solution of geodetic problems to determine the position of point on the earth surface are applied the spatial rectangular coordinates and geodetic coordinates. In this context arise the problem of transforming these systems of coordinates. This article illustrates the shortcomings of mathematical solutions of the problem of calculating the geodetic latitude *B* using the method of iterations, having applied the known spatial rectangular coordinates *X, Y, Z.* Iteration process convergence to an sought quantity does not prove, area and speed of iteration process convergence is not determined, analysis of approaching due to iterations is not carried, comparative study is not carried, advantages and disadvantages of suggested formulas in comparison with existing formulas are not shown. With these drawbacks, the Russian Federation Standard proposes an algorithm for calculating the latitude using the auxiliary angle. On the basis of the previously developed theory of transcendental analysis of solutions a non-iterative algorithm for determination the precise geodetic latitude is derived. To this end, root gap insulation is pre-reduced and a formula for calculating the latitude with high precision by the method of the tangents at one iteration is made. The formula for calculating the error of the proposed algorithm is derived, on the basis of which limits on the accuracy of the results determined by the latitude are set. For the prediction of accuracy and computational calculation of the length of the bit error grid algorithm expressed by the original data. The reliability of the research confirmed in a numerical example.

Keywords: non-iterative algorithm, spatial rectangular coordinates, geodetic latitude, the latitude error.

Список литературы

1. *Морозов В.П.* Курс сфероидической геодезии / В.П. Морозов. – М. : Недра, 1979. – 296 с.
2. *Герасимов А.П.* Уравнивание государственной геодезической сети / А.П. Герасимов. – М. : Картгеоцентр-Геодезиздат, 1996. – 216 с.
3. *Урмаев М.С.* Космическая фотограмметрия / М.С. Урмаев. – М. : Недра, 1989. – 279 с.
4. *ГОСТ* Р 51794–2008. Глобальные навигационные спутниковые системы. Системы координат. Методы преобразований координат определяемых точек. – М. : Изд-во стандартов, 2008. – 16 с.
5. *Медведев П.А.* Анализ преобразований пространственных прямоугольных координат в геодезические / П.А. Медведев. – Омск : Изд-во ОмГАУ, 2000. – 104 с.

References

1. *Morozov V.P.* Kurs sferoidicheskoj geodezii / V.P. Morozov. – M. : Nedra, 1979. – 296 s.
2. *Gerasimov A.P.* Uravnivanie gosudarstvennoj geodezicheskoj seti / A.P. Gerasimov. – M. : Kartgeocentr-Geodezizdat, 1996. – 216 s.
3. *Urmaev M.S.* Kosmicheskaya fotogrammetriya / M.S. Urmaev. – M. : Nedra, 1989. – 279 s.
4. *GOST* R 51794–2008. Global'nye navigacionnye sputnikovye sistemy. Sistemy koordinat. Metody preobrazovanij koordinat opredelyaemyx tochek. – M. : Izd-vo standartov, 2008. – 16 s.
5. *Medvedev P.A.* Analiz preobrazovanij prostranstvennyx pryamougol'nyx koordinat v geodezicheskie / P.A. Medvedev. – Omsk : Izd-vo OmGAU, 2000. – 104 s.

Медведев Павел Александрович, д-р техн. наук, доцент, Омский ГАУ, math@rambler.ru; **Новородская Марина Владимировна**, аспирант, Омский ГАУ, nvg78@yandex.ru; **Шаров Серикбай Агыбаевич,** магистрант, Омский ГАУ, seriksharov@mail.ru.

Medvedev Pavel Aleksandrovich, Dr. Tech. Sci., Prof., Omsk SAU, math@rambler.ru; **Novorodskaya Marina Vladimirovna,** Postgraduate, Omsk SAU, nvg78@yandex.ru; **Sharov Serikbai Agybaevich**, Master Student, Omsk SAU, seriksharov@mail.ru.