

Оценка точности инженерных методик расчета толщины потери импульса в ламинарном пограничном слое на непроницаемой поверхности полусферы в сверхзвуковом воздушном потоке

© В.В. Горский^{1,2}, В.А. Сысенко¹

¹ОАО «ВПК «НПО машиностроения», Московская область, г. Реутов, 143966, Россия

²МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 105005, Россия

Толщина потери импульса в ламинарном пограничном слое относится к числу важных его характеристик, а вопрос о точности ее расчета по известным формулам не получил удовлетворительного освещения в литературе. В данной статье эта проблема решается на базе проведения систематических численных расчетов уравнений пограничного слоя.

Ключевые слова: толщина потери импульса, ламинарный пограничный слой, сверхзвуковой воздушный поток.

Введение. Понятие толщины потери импульса в ламинарном пограничном слое широко используют в теории пограничного слоя. В процессе численного решения уравнений пограничного слоя параметры этой толщины однозначно определяются ее интегральным выражением [1]. Однако при использовании различных интегральных решений уравнений пограничного слоя информацию о толщине потери импульса можно получить только путем введения определенных допущений о профилях газодинамических функций в пограничном слое.

Для полусферы, в частности, в работе [2] приведена методика расчета толщины потери импульса в ламинарном пограничном слое, полученная методом эффективной длины и скорректированная по результатам численного решения уравнений пограничного слоя. Однако информация о точности этой методики в литературе отсутствует. Решению этой задачи и рассмотрению возможности построения более корректной методики на базе систематических решений уравнений ламинарного пограничного слоя посвящена настоящая работа.

Физико-математическая постановка задачи. Расчетно-теоретические исследования проведены в широком диапазоне изменения таких определяющих факторов, как число Маха M_∞ в набегающем воздушном потоке, давление торможения p_0 этого потока и энтальпийный фактор R_h , под которым понимают отношение энтальпии воздуха при температуре стенки к энтальпии торможения газового потока. Стенкой называют поверхность тела, обтекаемую набегающим на него воздушным потоком.

Исследования выполнены для многокомпонентной воздушной смеси в пограничном слое на абсолютно каталитичной стенке, находящейся в состоянии термохимического равновесия, при этом проведен расчет диффузионного тепломассопереноса в рамках уравнений Стефана – Максвелла.

В процессе проведения исследований принимали, что:

состав газовой смеси ограничен набором химических веществ: O, O₂, N, N₂, NO, Ar, которые образованы из химических элементов O, N, Ar;

в нормальных условиях воздух характеризуется мольной концентрацией следующих химических веществ [3]: $\kappa_{O_2} = 0,2095$, $\kappa_{N_2} = 0,7808$, $\kappa_{Ar} = 0,0097$;

область изменения определяющих параметров задана в виде $M_\infty \in [4, 25]$, $p_0 \in [0, 001, p_{\max}]$, $R_h \in [R_{h, \min}, R_{h, \max}]$;

для расчета переносных свойств многокомпонентной воздушной смеси используется метод Гиршфельдера [4];

применены потенциальная функция межмолекулярного взаимодействия Леннарда – Джонса [4] и методика расчета параметров этой функции из работы [5], базирующаяся на современных расчетно-теоретических данных по вязкости воздуха, находящегося в состоянии термохимического равновесия [6, 7];

уточненные значения параметров идеального газа, набегающего на стенку, получены методом сплайновой аппроксимации [8];

давление торможения $p_{\max} = 10$ МПа при $M_\infty > 10$ и 1 МПа в противном случае;

энтальпийный фактор, соответствующий температуре стенки, $R_{h, \min} = 300$ К;

минимальное значение $R_{h, \max}$ находится между 0,7 и значением энтальпийного фактора, соответствующим температуре кипения атомарного углерода.

Результаты расчетно-теоретических исследований. Толщина ϑ потери импульса относится к числу основных интегральных толщин пограничного слоя и определяется интегральным выражением:

$$\vartheta = \int_0^\infty \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e} \right) dy. \quad (1)$$

Здесь y — координата, отсчитываемая от стенки в направлении внешней нормали к ней; ρ, u — плотность воздушной смеси и тангенциаль-

ная составляющая вектора скорости в пограничном слое. Индекс «е» относится к внешней границе пограничного слоя, а индекс «∞» означает, что граница интегрирования располагается вне этого слоя.

При использовании переменных ξ, η Лиза – Дородницына

$$\xi(s) = \int_0^s \rho_e \mu_e u_e r^2 ds', \quad \eta(s, y) = \frac{u_e r}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y \rho dy'$$

и безразмерной функции тока f , определяемой выражением $f = u / u_e$, формула (1) принимает вид

$$\vartheta = \int_0^{\eta_e} f_\eta (1 - f_\eta) d\eta. \quad (2)$$

Здесь s — криволинейная координата, отсчитываемая вдоль образующей сферы от ее критической точки, т. е. от точки торможения набегающего на сферу газового потока; r — удаление образующей сферы от оси, проходящей через ее критическую точку в направлении вектора скорости набегающего газового потока. Индекс « η » означает частную производную по этой координате.

Численное интегрирование уравнений пограничного слоя в рассматриваемой работе проведено на неравномерной сетке по координате η , в которой шаг между узлами этой координаты увеличивается в соответствии с определенным законом по мере удаления от стенки, а интегрирование функции, входящей в формулу (2), — методом трапеций. При этом область интегрирования ограничивается узловым значением η_j координаты η , для которого выполняется условие

$$|1 - f_\eta| < 0,005 \text{ для } \eta \in [y_j, y_e].$$

Толщина потери импульса на непроницаемой стенке в тонком ламинарном пограничном слое для полусферы [1]

$$\vartheta_{lit}(s) = 0,664 \sqrt{\frac{\mu_e(s) x_{eff}(s)}{\rho_e(s) u_e(s)} \frac{\mu_{ekk}(s) \rho_{ekk}(s)}{\mu_e(s) \rho_e(s)} / \chi_9(s)}, \quad (3)$$

где
$$\chi_9(s) = 1 + 2 \frac{h_{00}}{h_e(s)} \frac{s}{u_e(s)} \frac{du_e}{ds}(s) [1 + 2,6 R_h];$$

$$\begin{aligned} \mu_{ekk}(s) &= \mu(h_{ekk}(s), p_e(s)); \quad \rho_{ekk}(s) = \rho(h_{ekk}(s), p_e(s)); \quad h_{ekk}(s) = \\ &= 0,5(h_e(s) + h_w) + 0,22(h_r(s) - h_e(s)); \quad h_r(s) = h_e(s) + [h_{00} - h_e(s)] \times \\ &\times (h_{00} - h_e(s)) \sqrt{\text{Pr}}. \end{aligned}$$

Здесь h_{00} — энтальпия торможения набегающего воздушного потока; h_{ekk} — определяющая энтальпия Эккерта [9]; h_r — энтальпия восстановления набегающего воздушного потока [2]; h_w — энтальпия газовой смеси при температуре стенки; μ — динамическая вязкость воздушной смеси; Pr — число Прандтля; $x_{eff}(s)$ — длина цилиндра, обтекаемого воздушным потоком с параметрами, соответствующими точке полусферы с координатой s , для которого выполняются следующие два условия [2]:

удельный тепловой поток в его концевом сечении равен аналогичному потоку на полусфере в точке с координатой s ;

интегральный тепловой поток к поверхности цилиндра равен аналогичному потоку на поверхности полусферы, ограниченной сверху сечением с координатой s .

На рис. 1 приведены результаты сопоставления толщины потери импульса на поверхности полусферы, рассчитанные по формуле (3), с аналогичными результатами численных решений уравнений пограничного слоя. На рисунке приняты следующие обозначения: $\Xi_9 = \vartheta_{lit} / \vartheta_{num}$; $\alpha_{eff} = \pi/2 - s$ — эффективный угол атаки, рад; $\alpha_{eff,lim} = \max(\alpha_{eff}; 0,01)$ — эффективный угол атаки, ограниченный снизу значением, равным 0,01; ϑ_{num} — толщина потери импульса, найденная в результате численного решения уравнений пограничного слоя.

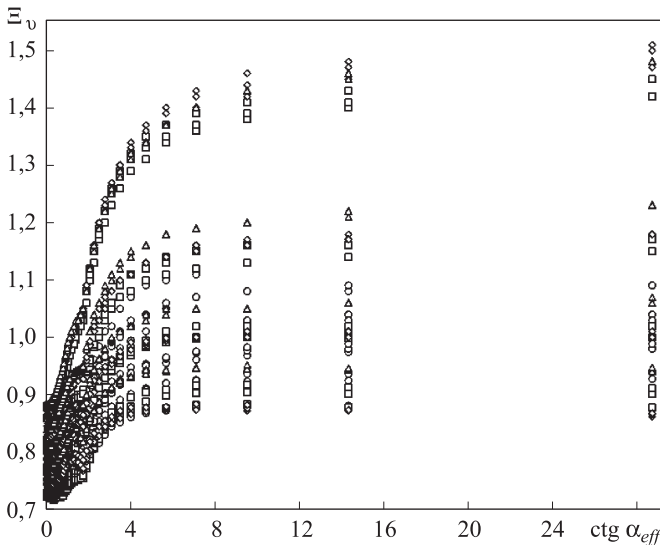


Рис. 1. Зависимость отношения толщин потери импульса в ламинарном пограничном слое, рассчитанных по формуле (3) и по результатам численного решения уравнений пограничного слоя, от эффективного угла атаки:

○ — $M_\infty = 25$, □ — 15,
◇ — 8, Δ — 4

Из рис. 1 следует, что погрешность инженерного расчета по формуле (3) во многих случаях оказывается весьма значительной. Это, в свою очередь, свидетельствует об актуальности проведения исследований, направленных на создание аналогичной инженерной методики расчета толщины потери импульса, характеризующейся существенно меньшей погрешностью вычисления, чем формула (3).

Как показали результаты проведенных исследований, наиболее просто эту задачу можно решить следующим образом:

ввести поправочную функцию к формуле (3), т. е. рассчитать толщину потери импульса по формуле

$$\vartheta_{eng}(\alpha_{eff}) = \vartheta_{lit}(\alpha_{eff}) F_{\vartheta}(R_h, \alpha_{eff, lim}); \quad (4)$$

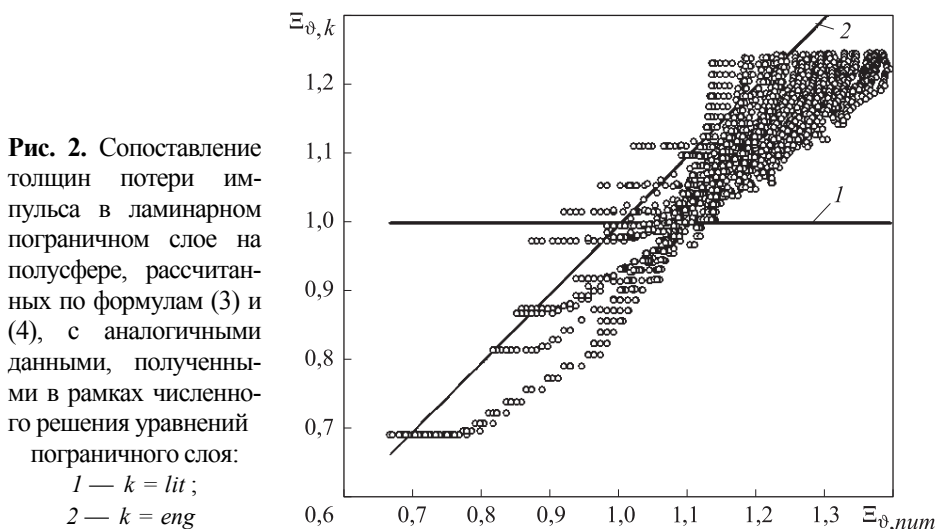
ввести функцию $\zeta(\alpha_{eff, lim})$, определенную на области значений $[0, 1]$:

$$\zeta(\alpha_{eff, lim}) = \frac{1}{2} \min \left[4, \operatorname{ctg}(\alpha_{eff, lim}) \right] \left\{ 1 - \frac{1}{8} \min \left[4, \operatorname{ctg}(\alpha_{eff, lim}) \right] \right\};$$

рассчитать поправочную функцию по формуле

$$F_{\vartheta} = \left[0,8 + (0,094 + 0,6013R_h - 1,1214R_h^2 + 1,9856R_h^3) \zeta(\alpha_{eff, lim}) \right]^{-1};$$

На рис. 2 приведено сопоставление толщин потери импульса в ламинарном пограничном слое на поверхности полусферы, рассчитанных по формулам (3) и (4), с аналогичными данными, полученными в рамках численного решения уравнений пограничного слоя, где $\Xi_{\vartheta, k} = \vartheta_k / \vartheta_{lim}$, $k = lit, eng, num$.



Согласно данным, представленным на рис. 2, переход в инженерных расчетах от использования формулы (3) к применению формулы (4) позволяет качественно снизить погрешность вычисления. В частности, максимальная погрешность вычислений снижается в диапазоне 51...18 %.

Выводы:

1) установлено, что погрешность широко используемой на практике инженерной формулы, предназначенной для расчета толщины потери импульса в ламинарном пограничном слое на полусфере, сопряжена с внесением в расчет погрешностей, достигающих 51 %.

2) предложена модификация (4) этой инженерной формулы, применение которой позволяет снизить максимальную погрешность вычислений до 18 %, т. е. до уровня, приемлемого для большинства практических приложений.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Авдудевский В.С., Галицейский Б.М., Глебов Г.А. и др. *Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике*. В.К. Кошкин, ред. Москва, Машиностроение, 1975, 624 с.
- [2] Землянский Б.А., Лунев В.В., Власов В.И. и др. *Конвективный теплообмен летательных аппаратов*. Москва, ФИЗМАТЛИТ, 2014, 377 с.
- [3] Предводителев А.С., Ступоченко Е.В., Плешанов А.С. и др. *Таблицы термодинамических функций воздуха (для температур от 200 до 6000 К и давлений от 0,00001 до 100 атм.)*. Москва, Вычислительный центр АН СССР, 1962, 268 с.
- [4] Гиршфельдер Дж., Кертис Ч., Берд Р. *Молекулярная теория газов и жидкостей*. Москва, Изд-во иностранной литературы, 1961, 929 с.
- [5] Горский В.В., Федоров С.Н. Об одном подходе к расчету вязкости диссоциированных газовых смесей, образованных из кислорода, азота и углерода. *Инженерно-физический журнал*, 2007, т. 80, № 5, с. 97–101.
- [6] Соколова И.А. Коэффициенты переноса и интегралы столкновений воздуха и его компонент. В кн.: *Физическая кинетика. Аэрофизические исследования*. Новосибирск, Институт теоретической и прикладной механики СО АН СССР. Сб. тр., № 4, 1974, с. 39–104.
- [7] Capitelli M., Colonna G., Gorse C., D'Angola A. Transport properties of high temperature air in local thermodynamic equilibrium. *The European Physical Journal*, 2000, № 11, pp. 279–289.
- [8] Горский В.В. Метод сплайновой аппроксимации. *Журнал вычислительной математики и вычислительной физики РАН*, 2007, т. 47, № 6, с. 939–943.
- [9] Эккерт Л. Инженерные методы расчета ламинарного и турбулентного теплообмена при обтекании поверхностей с постоянным давлением и температурой. *Вопросы ракетной техники*, 1957, № 4, с. 3.

Статья поступила в редакцию 10.10.2014 г.

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Горский В.В., Сысенко В.А. Оценка точности инженерных методик расчета толщины потери импульса в ламинарном пограничном слое на непроницаемой поверхности полусферы в сверхзвуковом воздушном потоке. *Инженерный журнал: наука и инновации*, 2014, вып. 10.

URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/aero/1245.html>

Горский Валерий Владимирович родился в 1939 г., окончил Московский авиационный институт им. Серго Орджоникидзе в 1963 г. Главный научный сотрудник ОАО «ВПК «НПО машиностроения». Д-р техн. наук, профессор кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 100 научных работ. Область научных интересов: абляционная тепловая защита, высокотемпературный тепломассообмен, численные методы решения уравнений математической физики. e-mail: gorsknat@yandex.ru

Сысенко Валентина Алексеевна родилась в 1978 г., окончила МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2001 г. Канд. техн. наук, старший научный сотрудник отдела аэродинамики в ОАО «ВПК «НПО машиностроения». Автор 12 научных работ в области прикладной математики. Область научных интересов: высокотемпературный тепло-массоперенос, численные методы решения уравнений математической физики. e-mail: dv-sys@yandex.ru

Estimated accuracy of the analysis of momentum loss thickness in the laminar boundary layer on a hemisphere impermeable surface in a supersonic air flow

© Gorskiy V.V.^{1,2}, Sysenko V.A.¹

¹JSC "MIC "NPO Mashinostroyeniya", Moscow region, Reutov-town, 143966, Russia

²Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

The momentum loss thickness in the laminar boundary layer is one of its important characteristics, and the question of the accuracy of its calculation from the known formulae has not been satisfactory described in the literature. In this paper, this problem is solved on the basis of systematic numerical calculations of boundary layer equations.

Key words: momentum loss thickness, laminar boundary layer, supersonic airflow

REFERENCES

- [1] Avduevskiy V.S., Galitsiyskiy B.M., Glebov G.A., et al. *Osnovy teploperedachi v aviatsionnoy i raketno-kosmicheskoy tekhnike* [Fundamentals of Heat Transfer in the Aviation and Aerospace Technology]. Koshkin V.K., ed. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1975, 624 p.
- [2] Zemlyanskiy B.A., Lunev V.V., Vlasov V.I., et al. *Konvektivnyi teploobmen v letatelnykh apparatakh* [Convective Heat Transfer in Aircrafts]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2014, 377 p.
- [3] Predvoditelev A.S., Stupochenko E.V., Pleshanov A.S. *Tablitsy termodinamicheskikh funktsiy vozdukha (dlya temperature ot 200 do 6000 K i davleniya ot 0,00001 do 100 atm.)* [Tables of Air Thermodynamic Functions (for Temperatures between 200 and 6000 K and Pressures from 0.00001 to 100 atm.)]. Moscow, Vychislitelnyi Tsentr AN SSSR Publ., 1962, 268 p.
- [4] Hirschfelder J.O., Curtiss Ch.F., Bird R.B. *Molecular Theory of Gases and Liquids*. John Wiley & Sons, Inc., New York Chapman And Hall, Ltd., London 1954.
- [5] Gorskiy V.V., Fedorov S.N. *Inzhenerno-Fizicheskii Zhurnal – Journal of Engineering Thermophysics*, 2007, vol. 80, no. 5, pp. 97–101.
- [6] Sokolova I.A. Koeffitsienty perenosa i integraly stolknoveniy vozdukha i ego component [Transfer coefficients and collision integrals of air and its components]. In: *Fizicheskaya kinetika. Aerofizicheskie issledovaniya* [Physical kinetics. Aerophysical Research.]. Novosibirsk, Proceedings of the Institute of Theoretical and Applied Mechanics SO AS USSR, no. 4, 1974, pp. 39–104.
- [7] Capitelli M., Colonna G., Gorse C., D'Angola A. Transport properties of high temperature air in local thermodynamic equilibrium. *The European Physical Journal*, 2000, № 11, pp. 279–289.
- [8] Gorskiy V.V. *Zhurnal vychislitelnoy matematiki i vychislitelnoy fiziki RAN – Journal of Computational Mathematics and Computational Physics RAS*, 2007, vol. 47, no. 6, pp. 939–943.
- [9] Ekkert L. *Voprosy raketnoy tekhniki – Rocket Technology*, 1957, no. 4, p. 3.

Gorskiy V.V. (b.1939) graduated from Moscow Aviation Institute named after Sergo Ordzhonikidze in 1963. Senior staff scientist at the JSC (open joint-stock company) "MIC "NPO Mashinostroyenia". Dr. Sci. (Eng.), Professor of the Computational Mathematics and Mathematical Physics Department at Bauman Moscow State Technical University. The author of more than 133 publications. Scientific interests: ablation heat protection, high temperature heat-mass transfer, numerical methods of solving equations of mathematical physics. e-mail: gorskmat@yandex.ru

Sysenko V.A. (b.1978) graduated from Bauman Moscow State Technical University in 2001, Ph.D., Senior Scientist of the Aerodynamics Department at the JSC (open joint-stock company) "MIC "NPO Mashinostroyenia". The author of 12 publications in the field of applied mathematics. Scientific interests: high temperature heat-mass transfer, numerical methods of solving equations of mathematical physics. e-mail: dv-sys@yandex.ru