ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2011 Математика. Механика. Информатика Вып.1(5)

УДК 532.516:536.25

Влияние зависимости коэффициента теплопроводности от температуры на жесткую неустойчивость течения бинарной смеси с термодиффузией

Л. Е. Сорокин
Пермский государственный университет, Россия, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15
(342) 2-396-409

В вертикальном плоском слое бинарной смеси, подогреваемой сбоку, исследовалось влияние зависимости коэффициента теплопроводности от температуры на развитие бесконечно малых (линейная теория) и конечных возмущений (нелинейная теория) в области аномальной термодиффузии. Получены границы устойчивости основного течения относительно наиболее опасных возмущений, изолинии функции тока, температуры и концентрации.

Ключевые слова: *бинарная смесь; аномальная термодиффузия; границы устойчивости.*

Введение

Обзор первых работ по устойчивости течений и равновесия бинарной смеси имеется в работах [1–2], а по жесткой неустойчивости течений жидкости – в [3]. Устойчивость стационарного течения бинарной смеси с термодиффузией в вертикальном плоском слое, подогреваемом сбоку, относительно малых возмущений (линейная теория) рассматривалась в работе [2], но там была допущена ошибка в стационарном решении для концентрации C_0. Результаты этой работы были пересчитаны заново и практически не отличаются от прежних результатов. Подкритические движения бинарной смеси с аномальной термодиффузией (коэффициент теплопроводности – константа) в вертикальном плоском слое, подогреваемом сбоку, рассматривались в работе [3]. Путем численного решения нелинейных уравнений движения жидкости методом сеток установлено, что в области термоконцентрационной и монотонной неустойчивости существуют подкритические движения, и неустойчивость относительно возмущений конечной амплитуды возбуждается "жестко". Получены амплитудные кривые (в статье не приводятся), границы устойчивости основного течения относительно наиболее опасных возмущений конечной амплитуды, изолинии функции тока, температуры и концентрации.

В данной работе изучается влияние зависимости коэффициента теплопроводности от температуры на характеристики жесткой неустойчивости.

1. Рассматривается бесконечный вертикальный плоский слой бинарной смеси с термодиффузией и твердыми границами $x=0$, $x=h$ (ось x направлена поперек, а ось z – вверх вдоль слоя). Температура на левой границе принимается равной нулю, а на правой постоянна и равна Θ.

Границы слоя предполагаются непроницаемыми для вещества. Благодаря явлению термодиффузии возникает дополнительный поток вещества, пропорциональный градиенту температуры. Неоднородность плотности, обусловленная градиентами температуры и концентрации, вызывает в слое конвективное течение.

Все параметры смеси, кроме плотности и коэффициента теплопроводности, предпола-

© Л. Е. Сорокин, 2011

гаются независящими от температуры T и концентрации C. Предполагается, что температура смеси мало отклоняется от некоторого среднего значения, а коэффициент теплопроводности линейно зависит от температуры:

$$\lambda = \lambda_0(1-\sigma T), \quad \sigma = -\frac{1}{\lambda_0}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial T}\right)_p,$$

где λ_0 – теплопроводность смеси при средней температуре T_0 , σ – коэффициент, характеризующий зависимость коэффициента теплопроводности от температуры. Для жидкостей $|\sigma|<0.01\text{K}-1$ может быть как положительным, так и отрицательным.

Выберем в качестве единиц длины h, времени h^2/ν, скорости ν/h, температуры Θ, концентрации $\beta_1\Theta/\beta_2$ и функции тока ν, где β_1 и β_2 – температурный и концентрационный коэффициенты плотности; остальные обозначения обычные. Конвективное течение бинарной смеси в приближении Буссинеска описывается уравнениями

$$\frac{\partial f^{(m)}}{\partial t} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial f^{(m)}}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial f^{(m)}}{\partial x}\right) + \frac{\Delta f^{(m)}}{P_m} + W^{(m)}$$

$$\Delta\psi = -\varphi, \qquad m = 1, 2, 3 \qquad (1.1)$$

с граничными условиями

$$x=0:\ \psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0,\ f^{(2)} = 0,\ \frac{\partial}{\partial x}(f^{(3)} - \varepsilon f^{(2)}) = 0$$

$$x=1:\ \psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0,\ f^{(2)} = 1,\ \frac{\partial}{\partial x}(f^{(3)} - \varepsilon f^{(2)}) = 0,$$

$$f^{(1)} = \varphi,\ P_1 = 1,\ W_1 = G\left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial x}\right)$$

$$f^{(2)} = T,\ P_2 = \frac{\text{Pr}}{1 - F\cdot T},\ W_2 = -\frac{F}{\text{Pr}}\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2\right]$$

$$f^{(3)} = C,\ P_3 = Sc,\ W_3 = -\frac{\varepsilon}{Sc}\Delta T$$

$$G = \frac{g\beta_1\theta h^3}{\nu^2},\ \text{Pr} = \frac{\nu}{\chi},\ Sc = \frac{\nu}{D},\ \varepsilon = -\frac{\alpha\beta_2}{\beta_1},\ F = \sigma\Theta$$

Уравнения (1.1) содержат пять безразмерных параметров: числа Грасгофа Gr, Прандтля Pr, Шмидта Sc, безразмерный параметр термодиффузии ε и коэффициент F, характеризующий зависимость коэффициента теплопроводности от температуры:

$$Gr = \frac{g\beta_1\Theta h^3}{\nu^2}, \quad \text{Pr} = \nu\rho_0\frac{C_p}{\lambda_0}, \quad Sc = \frac{\nu}{D},$$

$$\varepsilon = -\frac{\alpha\beta_2}{\beta_1}, \quad F = \sigma\Theta.$$

Задача имеет решение, описывающее стационарное плоскопараллельное течение с асимметричными профилями температуры и скорости:

$$T_0 = \left(1 - \sqrt{1 - 2Fx + F^2}\right)/F,$$

$$C_0 = \varepsilon x,$$

$$V_0 = \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{1+\varepsilon}{5F^3}[q_0 + q_1 x + q_2(x^2-1) +$$

$$\frac{1}{3}(1 - 2Fx + F^2)^{5/2}],$$

$$q_0 = -\frac{1}{6}[(1+F)^5 + (1-F)^5],$$

$$q_1 = \frac{1}{6}[(1+F)^5 - (1-F)^5], \qquad (1.2)$$

$$q_2 = \frac{3}{2}q_0 + [(1+F)^7 - (1-F)^7]/(28F).$$

При $F \to 0$ (1.2) переходит в известное решение, описывающее линейный профиль температуры и концентрации и кубический профиль скорости. Зависимость коэффициента теплопроводности от температуры приводит к асимметрии профиля скорости и температуры относительно оси z. Профиль скорости мало отличается от кубического вплоть до значений $|F|=0.7$. Более заметно отклонение распределения температуры от линейного профиля.

Стационарное движение (1.2) при достаточно больших числах Gr становится неустойчивым. В области аномальной термодиффузии ($\varepsilon<0$) согласно линейной теории [2] имеют место три вида неустойчивости: монотонная ($\varepsilon_w< \varepsilon < 0$), волновая ($-0.5 < \varepsilon < \varepsilon_w$) и длинноволновая термоконцентрационная ($-1< \varepsilon < -0.5$). В скобках указаны интервалы значений коэффициента термодиффузии, для которых наиболее опасна соответствующая мода. Граничное значение ε_w, разделяющее области монотонной и волновой неустойчивости, зависит от чисел Pr, Sc, F и изменяется от –0.5 до 0.

В данной работе рассматриваются подкритические движения, возникающие в области монотонной неустойчивости. Предполагается, что решения являются периодическими

вдоль бесконечного вертикального слоя. Условия периодичности имеют вид

$$f^{(m)}(x, z+l, t) = f^{(m)}(x, z, t), \quad m = 1, 2, 3,$$

где $l = 2\pi/k$ – период вдоль оси z (k – волновое число). Таким образом, задача решалась в области $0 \le x \le 1$, $0 \le z \le l$.

Сначала искалось решение в надкритической области. Затем параметр *Gr* решения постепенно уменьшался уже в подкритической области. В процессе установления решения контролировались амплитуды функции тока A_ψ, температуры A_T и концентрации A_C ($A_f = \max f - \min f$) на оси слоя.

2. Рассмотрим результаты расчетов в области $-0.5 \le \varepsilon < 0$. Подкритические движения зависят как от параметров смеси ε, Pr, Sc, F и числа Gr, так и от характеристик возмущений: амплитуды и волнового числа *k*.

Амплитудные кривые при различных значениях коэффициента F качественно не отличаются от амплитудных кривых при F = 0. Методика расчёта и поведение амплитудных кривых подробно обсуждаются в [3].

При $Gr < Gr_s$ течение устойчиво относительно возмущений любой амплитуды. Для $Gr > Gr_s$ стационарное течение неустойчиво относительно конечных возмущений, в области $Gr > Gr_l$ возмущения любой амплитуды, в том числе и бесконечно малые, развиваются в стационарный вихрь конечной амплитуды. Здесь Gr_l – критические числа Грасгофа, предсказываемые линейной теорией.

Гидродинамическая неустойчивость развивается в виде вихрей на границе раздела встречных потоков. Вихри неподвижны, если F=0. При F>0 они сносятся течением вверх, а при F<0 – вниз из-за асимметрии основного течения при F≠0. Граница $Gr_l(\varepsilon)$ гидродинамической неустойчивости согласно линейной теории практически не зависит от чисел Pr и Sc [2]. Иначе – для жесткой неустойчивости.

На рис. 1 приведены границы $Gr_s(\varepsilon)$ жёсткой неустойчивости для различных значений F и Sc. С увеличением F, а также при уменьшении числа Шмидта Sc течение становится более устойчивым к конечным возмущениям.

Наиболее опасны конечные возмущения при F=0. Кривые, соответствующие Sc = 30 и различным F, лежат на 9% выше кривых 4, 5, 6. А граница $Gr_l(\varepsilon)$ гидродинамической моды неустойчивости (линейная теория) расположена выше кривых 4, 5, 6 на 19% (она слабо зависит от коэффициента F).

Кривые $Gr_l(\varepsilon)$ и $Gr_S(\varepsilon)$ для Sc = 30 на рис. 1 не приведены (пришлось бы уменьшать масштаб и кривые 1, 2, 3 (а также 4, 5, 6) слились бы в одну кривую).

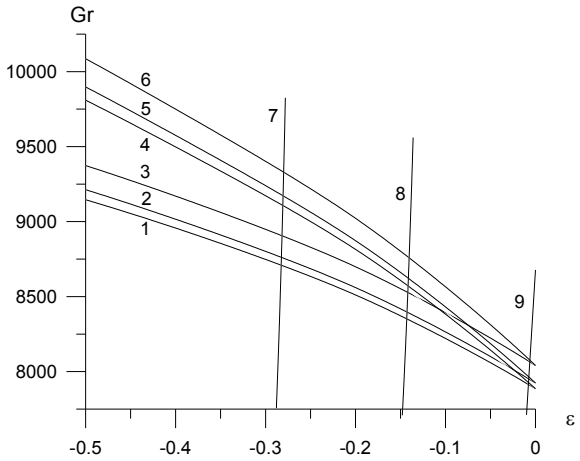


Рис. 1. *Границы жесткой неустойчивости при Pr=6.7 и Sc=676.7; 1-F=0;2-F=0.2; 3-F=0.4; Sc=200; 4-F=0; 5-F=0.2; 6-F=0.4; Sc=676.7; 7-F=0; 8-F=0.2; 9-F=0.4*

Согласно линейной (и нелинейной) теории границы волновой неустойчивости существенно зависят от F.

С увеличением |F| эта область расширяется, а с уменьшением числа Шмидта Sc увеличивается влияние коэффициента F на границы устойчивости.

При каких F и ε наиболее опасна жёсткая неустойчивость? Слева от кривых 7, 8, 9 находится область, где наиболее опасна волновая неустойчивость. Поэтому область справа от этих кривых, выше кривых 1–6 и ниже $Gr_l(\varepsilon)$ – это область жесткой неустойчивости для соответствующих значений параметров F, ε, Sc и Pr. Чем больше абсолютное значение параметра F, тем меньше область жесткой неустойчивости.

При достаточно малых F (F<0.2 при Sc=676.7 и Pr=6.7) существует область, где наиболее опасна жесткая неустойчивость.

Зависимость Gr_S от чисел Шмидта и Прандтля при различных значениях F приве-

дена на рис. 2. Критическое число Грасгофа Gr_S уменьшается при увеличении числа Шмидта и увеличивается с ростом числа Прандтля.

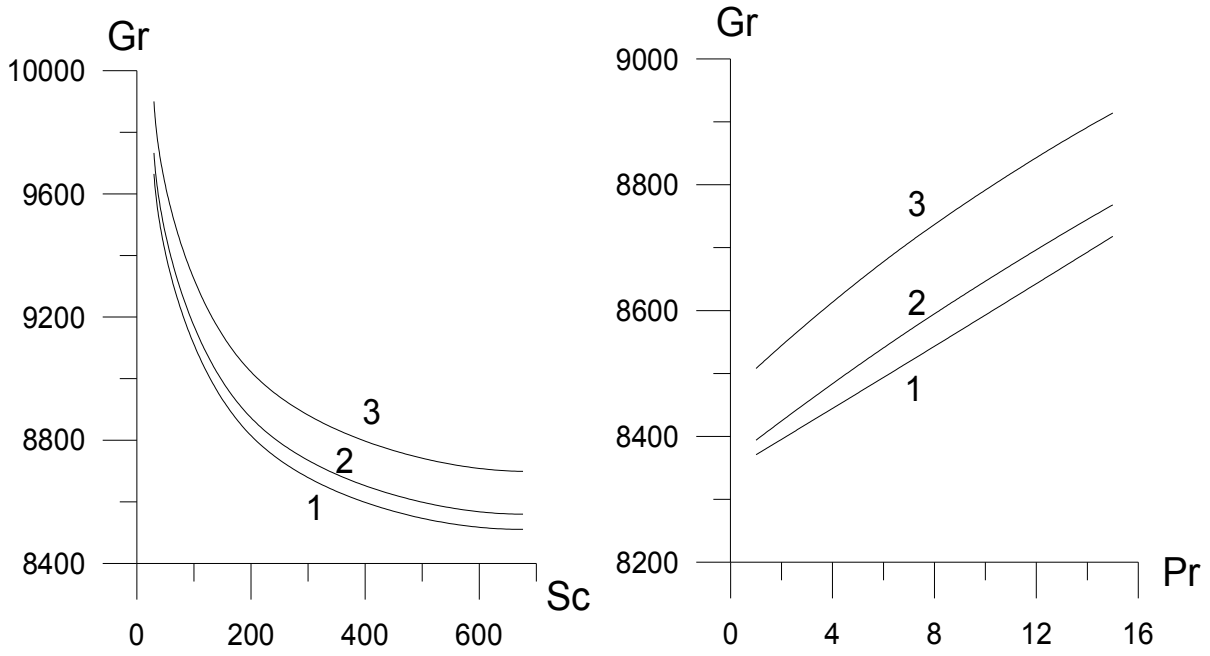


Рис. 2. *Зависимость Gr_S от чисел Шмидта (а) и Прандтля (б);* $\varepsilon = -0.2; 1 - F = 0; 2 - F = 0.2; 3 - F = 0.4.$

Изолинии функции тока на рис. 3 в моменты времени t=0, 0.687, 1.409, 2.846 свидетельствуют о дрейфе вихря вверх по течению; период повторения картины движения равен 4.465.

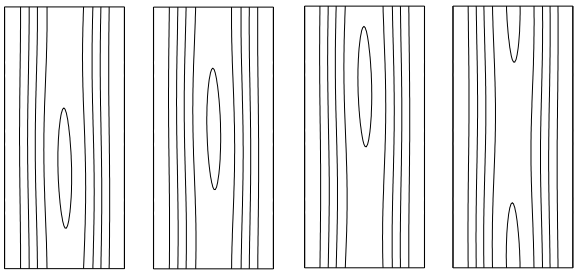


Рис. 3. *Изолинии функции тока при F=0.2; e=-0.2; P=6.7; Sc=676.7; k=2.88; G=9500*

Расчеты в основном велись для положительных значений F. Это связано с тем, что решения (3) обладают свойствами симметрии, которые позволяют сделать вывод о их поведении при отрицательных значениях F. Нетрудно проверить, что решения

$$T(x,z,F) = -T(-x,-z,-F),$$
$$C(x,z,F) = -C(-x,-z,-F),$$
$$\Psi(x,z,F) = \Psi(-x,-z,-F)$$

удовлетворяют уравнениям (1.1). Из этих свойств симметрии следует, что если при F>0 вихри гидродинамической моды сносятся течением вверх и возмущения наиболее опасны в восходящем потоке, то при F<0 вихри гидродинамической моды будут сноситься вниз, а возмущения будут наиболее опасны в нисходящем потоке. Также критические значения числа Грасгофа не зависят от знака параметра F.

Из-за дрейфа вихрей скорость течения в фиксированной точке слоя (x, y) изменяется периодически. Не следует трактовать это как волновую неустойчивость. При волновой неустойчивости для небольших надкритичностей (вблизи от нейтральной кривой) дважды в течение периода амплитуда вихрей равна нулю и изолинии в эти моменты времени распрямляются, чего нет при сносе вихрей гидродинамической моды.

Заключение. При увеличении параметров Fи Pr диапазон значений ε, где жесткая неустойчивость наиболее опасна, уменьшается.

Список литературы

1. *Joseph D*. Stability of fluid motions. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.

Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981. 638 с.
2. *Сорокин Л.Е.* Влияние зависимости коэффициента теплопроводности от температуры на устойчивость течения бинарной смеси с термодиффузией // Вестн. Перм. ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2005. Вып. 2(2).
3. *Сорокин Л.Е.* Подкритические движения бинарной смеси с аномальной термодиффузией в вертикальном слое // Изв. РАН. МЖГ. 2001. №1.С.14–19.

Stability of flow a binary mixture with the thermal conductivity depending linearly on the temperature

L. E. Sorokin
Perm State University, Russia, 614990, Perm, Bukirev st., 15
(342) 2-396-409

The borders of stability of the main flow rather most dangerous disturbances and characteristic these disturbances are received.

Key word: *binary mixture; the anomalous thermodiffusive; the borders of stability.*