u_x — продольное перемещение, u_φ — перемещение вдоль дуги окружности, u_r — радиальное перемещение в сечении, перпендикулярном оси. Для этих уравнений возможно решение вида $u_\varphi = B\exp(-i\omega t + i\rho x)$, что приводит к задаче о крутильных колебаниях (6). Будем искать решение вида

$$u_\varphi = 0, \quad u_x = \tilde{u}(x)e^{i\omega t}, \quad u_r = \tilde{w}(x)e^{i\omega t}.$$

Подстановка этого решения в (11) дает систему

$$\begin{cases} \tilde{u}'' - \dfrac{\nu}{R}\,\tilde{w}' = -\dfrac{1}{c^2}\,\omega^2 u, \\ \dfrac{\nu}{R}\,\tilde{u}' - \dfrac{1}{R^2}\,\tilde{w} = -\dfrac{1}{c^2}\,\omega^2 \tilde{w}, \end{cases}$$

откуда $\tilde{w} = \dfrac{\nu R c^2}{c^2 - R^2\omega^2}\,\tilde{u}$, а для $\tilde{u}(x)$ получим уравнение

$$\frac{(1-\nu^2)c^2 - R^2\omega^2}{c^2 - R^2\omega^2}\,\tilde{u}'' + \frac{\omega^2}{c^2}\,\tilde{u} = 0.$$

Для углеродной нанотрубки $\nu \approx 0{,}08$, поэтому $1 - \nu^2 \approx 1$, $c \approx a_1$, и для продольных колебаний получим задачу (1)–(3), т.е. для продольных колебаний спектр собственных колебаний будет таким же, как и при использовании стержневой теории. Спектр собственных частот радиальных колебаний в углеродной нанотрубке будет таким же, как спектр собственных частот продольных колебаний, а коэффициент Пуассона влияет только на амплитуду собственных колебаний.

Таким образом, показано, что спектры собственных колебаний углеродной нанотрубки (продольных, радиальных, крутильных и изгибных) находятся в сверхвысокочастотном диапазоне.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 06–01–00565а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тунгускова З.Г.* О представительном объеме упругих структурно-неоднородных материалов // Упругость и неупругость. Часть 1. М.: Изд-во МГУ, 1993. 128–138.
2. *Савинский С.С., Петровский В.Л.* Дискретная и континуальная модели для расчета спектров углеродных нанотрубок // Физ. твердого тела. 2002. **44**, вып. 9. 1721–1726.
3. Прочность. Устойчивость. Колебания: Справочник. Т. 3 / Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968.
4. *Тимошенко С.П.* Колебания в инженерном деле. М.: ГИФМЛ, 1959.
5. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: ГИФМЛ, 1963.

Поступила в редакцию
26.12.2007

УДК 531.3:681.5.01

ОЦЕНИВАНИЕ ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ В РЕЖИМЕ ЗАДАЧИ “ПЕРИОД ШУЛЕРА”

О. В. Демидов[1]

Контрольная задача “Период Шулера” — это специальный режим функционирования платформенной инерциальной навигационной системы ИНС-2000. Он используется для проверки соответствия калибровочных параметров чувствительных элементов ИНС их реальным значениям. В работе для указанного режима построена модель уравнений

[1] *Демидов Олег Викторович* — асп. каф. прикладной механики и управления мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: ovdemidiv@mail.ru.

ошибок ИНС-2000 и проверены на модельных данных возможные алгоритмы оценивания инструментальных погрешностей ИНС.

Ключевые слова: инерциальная навигационная система (ИНС), калибровка, уравнения ошибок, оценивание.

The control problem with consideration of the Schuler period is a special operation mode of the INS-2000 platform inertial navigation system. This mode is used to check the consistency between the calibration parameters of INS sensors and their actual values. Some error equations of INS-2000 are proposed for this mode. Feasible estimation algorithms for INS instrumental errors are tested on model data.

Key words: inertial navigation system (INS), calibration, error equations, estimation.

1. Введение. Контрольная задача "Период Шулера" — это специальный режим функционирования платформенной инерциальной навигационной системы ИНС-2000 Раменского приборостроительного конструкторского бюро. Режим используется для проверки соответствия калибровочных параметров чувствительных элементов ИНС — акселерометров, датчиков моментов — их реальным значениям.

Описание режима: система ИНС-2000 после начальной выставки переводится в режим навигации с большими начальными условиями (200 м/с) по линейным скоростям. В результате счисляемые скорости начинают совершать колебания с периодом Шулера $T_{\rm sch} \simeq 84{,}4$ мин. Теоретическую величину периода $T_{\rm sch}$ можно рассчитать заранее.

Наблюдая реализации счисляемых скоростей, можно найти оценку $\tilde{T}_{\rm sch}$ величины периода $T_{\rm sch}$. Существенное отличие $T_{\rm sch}$ от $\tilde{T}_{\rm sch}$ говорит о проблемном функционировании ИНС-2000, которое может быть обусловлено ошибками ее начальной выставки, несоответствием калибровочных параметров чувствительных элементов их реальным значениям.

По существующей методике выполняется пороговое сравнение величин $\tilde{T}_{\rm sch}$ и $T_{\rm sch}$, по результатам которого делается вывод только о том, прошла система тест или нет. Целью заметки является создание алгоритма оценивания инструментальных погрешностей чувствительных элементов ИНС-2000 для функциональной диагностики их работы.

Будем использовать следующие стандартные системы координат: инерциальную $O\xi$, гринвичскую $O\eta$, географическую Ox^0 и приборную Oz.

2. Постановка задачи. Инерциальная навигационная система устанавливается на неподвижном стенде с известными географическими координатами φ, λ, h и абсолютным значением g ускорения силы тяжести. После штатной начальной выставки на неподвижном основании ИНС переводится в следующий специальный режим навигации.

Счисление модельных скоростей V_1', V_2' осуществляется путем интегрирования следующих динамических уравнений:

$$\dot{V}_1' = f_1', \quad \dot{V}_2' = f_2', \quad V_1'(t_0) = 200 \text{ м/с}, \quad V_2'(t_0) = -200 \text{ м/с},$$

где f_i' — измерения горизонтальных акселерометров.

Модельный азимутальный угол A' формируется по закону

$$A'(t) = A'(t_0) + (t - t_0)\, u \sin\varphi.$$

Сигналы управления гироплатформой — модельные абсолютные угловые скорости ω' гироплатформы — формируются следующим образом:

$$\omega' = \Omega' + u' = \begin{pmatrix} \Omega_1' + u_1 \\ \Omega_2' + u_2 \\ 0, \end{pmatrix}, \quad \Omega' = \begin{pmatrix} -\dfrac{V_2'}{a_R} \\ \dfrac{V_1'}{a_R} \\ -u\sin\varphi, \end{pmatrix}, \quad u' = \begin{pmatrix} -u\cos\varphi\sin A' \\ u\cos\varphi\cos A' \\ u\sin\varphi, \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $a_R = 6371116{,}0$ — средний радиус земного шара, $u = 7292115{,}1467 \cdot 10^{-11}$ рад/с — угловая скорость вращения Земли. То есть моделируется абсолютно свободный в азимуте модельный трехгранник.

Формируемые по формулам (1) сигналы управления гироплатформой проходят через блок компенсации инструментальных и геометрических погрешностей чувствительных элементов. Значения параметров блока компенсации определяются на этапе калибровки системы на стенде и на этапе начальной выставки.

Примем следующие модели гироскопического ухода и инструментальных погрешностей акселерометров:

$$\nu = \begin{pmatrix} \nu_1^0 \\ \nu_2^0 \\ \nu_3^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_{11}\omega_1' \\ D_{22}\omega_2' \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nu_1^s \\ \nu_2^s \\ \nu_3^s, \end{pmatrix}, \qquad \Delta f = \begin{pmatrix} \Delta f_1^0 \\ \Delta f_2^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_{11} f_{z1} \\ K_{22} f_{z2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta f_1^s \\ \Delta f_2^s \end{pmatrix}.$$

Здесь ν_i^0 — постоянные составляющие гироскопического ухода, D_{ii} — погрешности масштабов датчиков моментов, ν_i^s — случайные составляющие гироскопического ухода, Δf_j^0 — смещения нулей акселерометров, K_{jj} — погрешности масштабных коэффициентов, Δf_j^s — случайные погрешности акселерометров.

3. Алгоритм решения задачи. Построим модель углового движения приборного трехгранника и сведем задачу оценивания инструментальных погрешностей к стандартной задаче калмановской фильтрации.

Кинематика приборного трехгранника Mz. Выпишем выражение для абсолютной угловой скорости ω_z'' приборного трехгранника Mz:

$$\omega_z'' = \dot{\bar{\alpha}}_1 + \dot{\bar{\alpha}}_2 + \dot{\bar{A}}_z + \bar{u}.$$

Здесь A_z — азимутальный угол между направлением на север (ось Mx_2^g) и приборной осью Mz_2; α_1, α_2 — угловые ошибки построения приборной вертикали.

С другой стороны, ω_z'' складывается из абсолютной модельной угловой скорости ω' и неконтролируемого дрейфа ν: $\omega_z'' = \omega' + \nu$. В результате получаем следующую замкнутую модель углового движения приборного трехгранника Mz:

$$\begin{aligned}
\dot\alpha_1 &= \left(-\frac{V_2'}{a_R} - u\cos\varphi\sin A' + \nu_1\right)\cos\alpha_2 + \nu_3\sin\alpha_2 + u\cos\varphi\sin A_z,\\
\dot\alpha_2 &= \frac{V_1'}{a_R} + u\cos\varphi\cos A' + \nu_2 + \operatorname{tg}\alpha_1\left[\left(-\frac{V_2'}{a_R} - u\cos\varphi\sin A' + \nu_1\right)\sin\alpha_2 - \nu_3\cos\alpha_2\right] -\\
&\quad - \frac{u\cos\varphi\cos A_z}{\cos\alpha_1},\\
\dot A_z &= -\frac{\nu_3\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1} + u\sin\varphi - u\cos\varphi\cos A_z\operatorname{tg}\alpha_1 + \frac{(-V_2'/a_R - u\cos\varphi\sin A' + \nu_1)\sin\alpha_2}{\cos\alpha_1},\\
\dot V_1' &= -g\cos\alpha_1\sin\alpha_2 + \Delta f_1,\\
\dot V_2' &= g\sin\alpha_1 + \Delta f_2,\\
\dot A' &= u\sin\varphi.
\end{aligned} \tag{2}$$

Приближенный анализ углового движения трехгранника Mz. Из системы (2) видно, что поведение скоростей и угловых ошибок определяется двумя составляющими — гармонической фракцией, порожденной большими начальными условиями по скоростям, и малыми вариациями, вызванными погрешностями ν_i, Δf_j $(i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2)$.

Чтобы найти уравнения гармонической фракции, предположим, что угловые ошибки α_{10}, α_{20} построения приборной вертикали малы и мала ошибка $\Delta A_0 = A'(t_0) - A_z(t_0)$ информации о начальной азимутальной ориентации. Предположим также, что мал уровень погрешностей гироскопов ν_i и акселерометров Δf_j. Тогда, делая замену $\sin\alpha_j = \alpha_j$, $\cos\alpha_j = 1$ и пренебрегая малыми величинами ν_i, Δf_j, получим упрощенную модель углового движения приборного трехгранника Mz нулевого приближения:

$$\begin{aligned}
&\dot\alpha_1^0 = -\frac{V_2'^0}{a_R}, \quad \dot{V_2'^0} = g\alpha_1^0, \quad \alpha_1^0(t_0) = 0, \quad V_2'^0(t_0) = -200 \text{ м/с},\\
&\dot\alpha_2^0 = \frac{V_1'^0}{a_R}, \quad \dot{V_1'^0} = -g\alpha_2^0, \quad \alpha_2^0(t_0) = 0, \quad V_1'^0(t_0) = 200 \text{ м/с}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Интегрируя (3), получим, что реализации α_i^0 и $V_i'^0$ имеют вид гармонических колебаний с частотой Шулера $\omega_0 = \sqrt{g/a_R}$.

Соответственно решение полной системы (2) будем искать в виде суммы двух составляющих — решений системы нулевого приближения при нулевых инструментальных погрешностях и вариаций при малых погрешностях:

$$V_i'(t) = V_i'^0(t) + \delta V_i, \quad \alpha_i(t) = \alpha_i^0(t) + \delta\alpha_i, \quad \delta A = A' - A_z, \quad i = 1, 2.$$

Уравнения первого приближения для вариаций δV_i, $\delta\alpha_i$, δA в линейном приближении будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \delta\dot\alpha_1 \\ \delta\dot\alpha_2 \\ \delta\dot V_1 \\ \delta\dot V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{a_R} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{a_R} & 0 \\ 0 & -g & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\alpha_1 \\ \delta\alpha_2 \\ \delta V_1 \\ \delta V_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \Delta f_1 \\ \Delta f_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -u\cos\varphi\cos A' \\ -u\cos\varphi\sin A' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \delta A,$$

$$\delta\dot A = \left(u\cos\varphi\cos A',\ \frac{V_2'^0}{a_R} + u\cos\varphi\sin A',\ 0,\ \frac{\alpha_2^0}{a_R} \right) \begin{pmatrix} \delta\alpha_1 \\ \delta\alpha_2 \\ \delta V_1 \\ \delta V_2 \end{pmatrix} + \nu_3 + \left(\frac{V_2'^0}{a_R} + u\cos\varphi\sin A' \right) \alpha_2^0 + u\cos\varphi\cos A'\alpha_1^0. \tag{4}$$

Формирование вектора корректирующих измерений. Сформируем вектор измерений $z = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)^T$.

1-я и 2-я компоненты вектора измерений z определяются следующим образом. Навигационная система вычисляет измерения модельных скоростей Z_{V_i}. Вычтем из измерений Z_{V_i} известную часть решений уравнений нулевого приближения (3):

$$z_{V_i} = Z_{V_i} - V_i'(t_0)\cos\omega_0(t - t_0).$$

Таким образом, модель скоростных измерений будет иметь вид

$$\begin{aligned} z_{V_1} &= \delta V_1 + \sqrt{a_R g}\,\alpha_2(t_0)\sin\omega_0(t - t_0) + \Delta V_1'^s, \\ z_{V_2} &= \delta V_2 - \sqrt{a_R g}\,\alpha_1(t_0)\sin\omega_0(t - t_0) + \Delta V_2'^s, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\Delta V_i'^s$ — случайные погрешности счисления горизонтальных скоростей, вызванные квантованием по уровню.

3, 4 и 5-я компоненты вектора измерений находятся по следующему алгоритму. В каждый момент времени инерциальная навигационная система определяет приборные углы гироскопического курса ψ_z, крена γ_z, тангажа ϑ_z и вычисляемое значение азимутального угла A'.

В нашем случае связанный трехгранник не меняет своего положения относительно географического трехгранника, поэтому истинные углы курса, крена и тангажа остаются постоянными. Отсюда можно получить измерения приборных углов Z_{α_1}, Z_{α_2} и Z_A [1]. Алгоритмически скомпенсируем известную часть этих измерений:

$$z_{\alpha_1} = Z_{\alpha_1} + \frac{V_2'(t_0)}{\sqrt{a_R g}}\sin\omega_0(t - t_0), \quad z_{\alpha_2} = Z_{\alpha_2} - \frac{V_1'(t_0)}{\sqrt{a_R g}}\sin\omega_0(t - t_0), \quad z_A = Z_A.$$

Таким образом, модель измерений для $\delta\alpha_1$, $\delta\alpha_2$, δA будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} z_{\alpha_1} &= \delta\alpha_1 - \alpha_{10}(1 - \cos\omega_0(t - t_0)) + \Delta_t\Delta\alpha_1^s, \\ z_{\alpha_2} &= \delta\alpha_2 - \alpha_{20}(1 - \cos\omega_0(t - t_0)) + \Delta_t\Delta\alpha_2^s, \\ z_A &= \cos(\Delta_t A')\,\delta A + (\cos(\Delta_t A') - 1)\Delta A_0 - \operatorname{tg}\vartheta_z(\cos(\psi_z - \Delta_t A') - \\ &\quad - \cos\psi_z)\alpha_{20} - \operatorname{tg}\vartheta_z(\sin(\psi_z - \Delta_t A') - \sin\psi_z)\alpha_{10} + \Delta_t\Delta A^s. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $\Delta_t v = v(t) - v(t_0)$ — первая разность по времени переменной v; $\Delta\alpha_i^s$, ΔA^s — случайные погрешности счисления углов карданова подвеса.

Задача оценивания инструментальных погрешностей ИНС-2000. Введем вектор состояния x:

$$x = (\delta\alpha_1, \delta\alpha_2, \delta V_1, \delta V_2, \delta A, \nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0, D_{11}, D_{22}, \Delta f_1^0, \Delta f_2^0, K_{11}, K_{22}, \alpha_{10}, \alpha_{20}, \Delta A_0)^T.$$

Тогда можно поставить задачу оценивания вектора состояния x линейной динамической системы с известным управлением (4) при помощи линейных измерений z (5) и (6):

$$\dot{x} = Ax + q + w, \qquad z = Hx + r.$$

Данная задача решается при помощи дискретного фильтра Калмана [1].

Обработка модельных данных. Описанные алгоритмы тестировались на модельных данных. Данные моделировались с помощью полной системы уравнений (2). Сравнивались реальные значения погрешностей и их реализации из фильтра Калмана.

Точность результатов работы алгоритма приведена в таблице, где СКО — среднеквадратичное отклонение.

Параметры	Характерное значение	Ошибка оценки	СКО ошибки оценки
ν_1^0, ν_2^0, ν_3^0	$\sim 0,2^\circ$/ч	$\sim 0,01^\circ$/ч	$\sim 0{,}03^\circ$/ч
D_{11}, D_{22}	$\sim 10^{-2}$	$\sim 10^{-3}$	$\sim 10^{-3}$
Δf_1^0, Δf_2^0	$\sim 10^{-2}$м/с^2	$\sim 10^{-3}$м/с^2	$\sim 10^{-3}$м/с^2
K_{11}, K_{22}	$\sim 10^{-2}$	$\sim 10^{-3}$	$\sim 10^{-3}$

4. Заключение. В работе построена модель уравнений ошибок инерциальной навигационной системы ИНС-2000 в режиме контрольной задачи "Период Шулера". Предложены и проверены на модельных данных возможные алгоритмы оценивания инструментальных погрешностей ИНС в этом режиме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голован А.А., Парусников Н.А.* Математические основы навигационных систем. 1: Математические модели инерциальной навигации. М.: Изд-во МГУ, 2007.

Поступила в редакцию
14.01.2008

УДК 51-72

АЛГОРИТМЫ ТЕСТИРОВАНИЯ КАЧЕСТВА РУЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ СПУСКОМ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА "СОЮЗ-ТМА" НА ДИНАМИЧЕСКОМ СТЕНДЕ

Е. С. Лобашов[1]

В статье рассмотрена задача построения третьего уровня системы управления динамическим стендом — центрифуги ЦФ-18 — на основе методики максиминного тестирования точности стабилизации управляемых объектов. Первый этап методики тестирования реализуется путем сведения исходной динамической игры к матричной игре большой размерности. В случае отсутствия седловой точки задача решается на смешанном расширении матричной игры сведением к задаче линейного программирования. Рассмотрен пример построения тестирующих возмущений, используемых на втором этапе методики тестирования.

Ключевые слова: динамический тренажер, максиминное тестирование, центрифуга, матричные игры.

The problem of developing the third level of the control system for a dynamic bench based on the CF-18 centrifuge is considered. The maximin testing method is used to check the

[1] *Лобашов Евгений Сергеевич* — асп. каф. прикладной механики и управления мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: ekaekaeka@mail.ru.