

УДК 519.2:528.1

О КОРРЕЛЯЦИИ ФУНКЦИЙ СЛУЧАЙНЫХ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ

Наталья Борисовна Лесных

Сибирская государственная геодезическая академия, 630108, Россия, г. Новосибирск, ул. Плахотного, 10, кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник, тел. (383)343-18-53

Владимир Евгеньевич Мизин

Сибирская государственная геодезическая академия, 630108, Россия, г. Новосибирск, ул. Плахотного, 10, кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры геодезии, тел. (383)344-36-60, e-mail: ssga221@mail.ru

Исследована корреляция повторных определений координат пунктов полигонометрического хода как функций случайных ошибок измерений.

Ключевые слова: корреляция, координаты, анализ, разности, ошибки, функции.

CORRELATION OF ACCIDENTAL MEASUREMENT ERRORS FUNCTIONS

Natalya B. Lesnykh

Siberian State Academy of Geodesy, 630108, Russia, Novosibirsk, 10 Plakhotnogo St., Ph. D., leading researcher, tel. (383)343-18-53

Vladimir E. Mizin

Siberian State Academy of Geodesy, 630108, Russia, Novosibirsk, 10 Plakhotnogo St., Ph. D., senior lecturer, Department of Geodesy, tel. (383)344-36-60, e-mail: ssga221@mail.ru

The authors investigate correlation of repeated determinations of polygon traverse points coordinates as functions of random measurement errors.

Key words: correlation, coordinates, analysis, differences, errors, functions.

Корреляционная (вероятностная) связь между случайными величинами возникает тогда, когда имеются общие факторы, влияющие на значения этих величин. Показателем тесноты линейной связи между случайными величинами системы $X_1, X_2, \dots, X_n$ служит коэффициент корреляции

$$r_{i,j} = \frac{k_{i,j}}{\sigma_i \sigma_j}, \quad (1)$$

где $k_{i,j} = M\{[X_i - M(X_i)] \cdot [X_j - M(X_j)]\}$ – корреляционный момент пары X_i, X_j ; σ_i, σ_j – средние квадратические отклонения X_i и X_j . Для независимых (некоррелированных) случайных величин $k_{i,j} = r_{i,j} = 0$.

Для функций накопленных случайных ошибок измерений

$$f = \left\{ \begin{array}{c} \Delta_1 \\ \Delta_1 + \Delta_2 \\ \dots \\ \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n \end{array} \right\} \text{ и } f' = \left\{ \begin{array}{c} \Delta'_1 \\ \Delta'_1 + \Delta'_2 \\ \dots \\ \Delta'_1 + \Delta'_2 + \dots + \Delta'_n \end{array} \right\}; \quad (3)$$

$$k_{ff'} = M \left\{ \left(\begin{array}{c} \Delta_1 \\ \Delta_1 + \Delta_2 \\ \dots \\ \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_n \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{cccc} \Delta'_1 & \Delta'_1 + \Delta'_2 & \dots & \Delta'_1 + \Delta'_2 + \dots + \Delta'_n \end{array} \right) \right\} = 0$$

функции f и f' также некоррелированы, $M(f) = 0$, $M(f') = 0$.

Разности повторных определений координат полигонометрического хода содержат информацию о стабильности пунктов геодезической основы при мониторинге инженерного сооружения. Если координаты, вычисленные по результатам независимых повторных измерений, некоррелированы, предельно допустимое значение их разностей можно определить по формуле [1]:

$$|d|_{пред.} = t \cdot m_x \cdot \sqrt{2}. \quad (4)$$

На моделях ходов полигонометрии 4-го класса исследована корреляционная связь между координатами пунктов, полученными по результатам повторных, независимых измерений углов и сторон.

Представим разности координат $d(x)$, $d(y)$ как функции их истинных случайных ошибок Δ_x , Δ_y , Δ'_x , Δ'_y :

$$d(x) = x - x' = X + \Delta_x - X - \Delta'_x = \Delta_x - \Delta'_x; \quad d(y) = y - y' = \Delta_y - \Delta'_y.$$

Истинные ошибки координат можно получить через истинные ошибки приращений:

$$\Delta_{dx}^{(i)} = \Delta_S^{(i)} \cos \alpha_i - \frac{dy_i}{\rho''} \Delta_\alpha^{(i)}, \quad \Delta_{dy}^{(i)} = \Delta_S^{(i)} \sin \alpha_i + \frac{dx_i}{\rho''} \Delta_\alpha^{(i)}. \quad (5)$$

Случайные ошибки дирекционных углов и координат являются функциями накопленных аргументов – случайных ошибок измеренных углов и приращений координат соответственно:

$$\Delta_\alpha^{(i)} = \sum_{j=1}^i \Delta_\beta^{(j)}, \quad \Delta_x^{(i)} = \sum_{j=1}^i \Delta_{dx}^{(j)}, \quad \Delta_y^{(i)} = \sum_{j=1}^i \Delta_{dy}^{(j)}. \quad (6)$$

Функции (5), (6) аналогичны (2), (3) и теоретически не коррелированы с результатами их повторных определений. Проверим это утверждение экспериментально. Оценка коэффициента корреляции вычисляется по формуле:

$$\bar{r}_{x,x'} = \frac{[\delta x \cdot \delta x']}{\bar{\sigma}_x \cdot \bar{\sigma}_{x'} (n-1)}, \quad (7)$$

где $\delta x_i = x_i - \bar{x}$, $\bar{M}_x = \bar{x} = [x]/n$ – оценка математического ожидания,

$\bar{\sigma}_x = \sqrt{[\delta x^2]/n-1}$ – оценка среднего квадратического отклонения.

Значимость $\bar{r}_{x,x'}$, $\bar{r}_{y,y'}$ устанавливалась с использованием функции z Фишера для доверительной вероятности $\Phi(t) = 0,997$, $t = 3$ [2].

Характеристики ходов полигонометрии и оценки коэффициентов корреляции истинных ошибок координат первого и второго циклов наблюдений представлены в табл. 1.

Таблица 1

Корреляция повторных определений координат

Варианты	1	2	3	4	5
Характеристики	$\alpha = 170^\circ - 195^\circ$ $s = 300$ м, $n = 20$, $\sigma_\beta = 2''$ $\sigma_s = 2$ см	$\alpha = 170^\circ - 195^\circ$ $s = 500$ м, $n = 20$, $\sigma_\beta = 2''$ $\sigma_s = 3$ см	$\alpha = 85^\circ - 96^\circ$ $s = 300$ м, $n = 20$, $\sigma_\beta = 2''$ $\sigma_s = 2$ см	$\alpha = 85^\circ - 96^\circ$ $s = 300$ м, $n = 20$, $\sigma_\beta = 2''$ $\sigma_s = 2$ см	$\alpha = 10^\circ - 180^\circ$ $s = 300$ м, $n = 20$, $\sigma_\beta = 2''$ $\sigma_s = 2$ см
$\bar{r}_{x,x'}$	-0,237	-0,583	-0,379	-0,984	0,963
$r_2 - r_1$	1,199	0,944	1,127	0,064	0,141
Корреляция	–	–	–	+	+
$\bar{r}_{y,y'}$	-0,993	-0,980	-0,229	-0,288	0,230
$r_2 - r_1$	0,029	0,077	1,203	1,178	1,202
Корреляция	+	+	–	–	–

В четырех случаях из десяти между координатами первого и второго циклов установлено наличие корреляционной связи. Почему некоторые функции (5) оказались коррелированы? Вероятностно-статистический анализ закона распределения [3–5] ошибок приращений координат Δ_{dx} , $\Delta_{dx'}$, Δ_{dy} , $\Delta_{dy'}$, выполненный по каждому из пяти вариантов хода, выявил несоответствие распределения коррелированных рядов ошибок нормальному закону.

В частности, критерием равенства средних, статистика которого

$$t_3 = \frac{|\bar{\Delta} - M(\Delta)|}{\bar{\sigma} / \sqrt{n}}, \quad (8)$$

установлено существенное отклонение оценки математического ожидания случайных ошибок приращений координат от нуля, что противоречит теоретическим предпосылкам некоррелированности координат (табл. 2).

Таблица 2

Закон распределения

№	1		2		4		5	
Критерии	Δ_{dy}	$\Delta_{dy'}$	Δ_{dy}	$\Delta_{dy'}$	Δ_{dx}	$\Delta_{dx'}$	Δ_{dx}	$\Delta_{dx'}$
$\bar{\Delta}$ (см)	-0,80	0,68	-2,82	2,07	-0,98	0,72	-0,53	-1,27
$\bar{\sigma}$ (см)	0,70	0,43	1,48	1,50	0,47	0,30	1,40	1,46
t_3	5,1	7,1	8,5	6,2	9,3	10,8	1,67	3,89
$P(t > t_3)$	$6 \cdot 10^{-5}$	$9 \cdot 10^{-7}$	$7 \cdot 10^{-8}$	$6 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-9}$	0,08	$9 \cdot 10^{-4}$
Три свойства	$\pm$	—	—	—	—	—	+	$\pm$

Знак «—» в табл. 2 означает, что свойства случайных ошибок не выполняются.

В формулах (5), в зависимости от значения дирекционного угла, преобладают слагаемые $\Delta_s \cos \alpha$, $\Delta_s \sin \alpha$ или $(-s \cdot \sin \alpha / \rho) \cdot \Delta_\alpha$, $(s \cdot \cos \alpha / \rho) \cdot \Delta_\alpha$. Закон распределения первого слагаемого соответствует закону случайных, нормально распределенных ошибок Δ_s с математическим ожиданием $M(\Delta_s) = 0$ и оценкой математического ожидания, несущественно отличающейся от нуля. Ошибки дирекционных углов второго слагаемого являются функциями накопленных аргументов – случайных ошибок угловых измерений (6). Подобные функции могут на значительном протяжении сохранять один и тот же знак и вследствие этого, по своим статистическим свойствам не совпадать со свойствами случайных, нормально распределенных ошибок измерений.

Представим эту ситуацию в табл. 3 примерами из варианта 1.

Закон распределения преобладающего слагаемого в формулах ошибок приращений координат определил закон распределения суммы слагаемых. В формулах Δ_{dx} преобладает первое слагаемое. Ошибки Δ_{dx} распределены нормально, как и случайные ошибки Δ_s , оценка математического ожидания $\bar{\Delta}_{dx}$ пренебрегаемо мало отличается от нуля, между результатами повторных определений координат корреляционной связи не установлено.

Таблица 3

Слагаемые формул ошибок приращений координат

α	Δ''_{α}	Δ_{dx} (см)		Δ_{dy} (см)	
		$\Delta_s \cos \alpha$	$-(dy / \rho'') \Delta_{\alpha}$	$\Delta_s \sin \alpha$	$(dx / \rho'') \Delta_{\alpha}$
170 °	0,93	-0,256	-0,023	0,045	-0,133
195	1,05	4,878	0,040	1,308	-0,146
170	4,02	0,699	-0,102	-0,123	-0,576
175	6,06	0,936	-0,077	-0,082	-0,878
190	8,85	1,093	0,224	0,193	-1,268
.....					

В формулах Δ_{dy} преобладает, в основном, второе слагаемое. Закон распределения ошибок Δ_{dy} , как и Δ_{α} , не является нормальным, среднее арифметическое $\bar{\Delta}_{dy}$ существенно отличается от нуля, что и привело к значительному увеличению оценки коэффициента корреляции $\bar{r}_{y,y'}$.

Появление в полигонометрическом ходе невязок, близких к предельным значениям, свидетельствует о накоплении ошибок одного знака и возможном искажении случайных свойств в рядах истинных ошибок дирекционных углов и координат.

Очевидно, исследование устойчивости пунктов геодезической основы требует комплексного подхода и не может быть ограничено единственно расчетом допустимого значения разности повторных определений координат [2, 6–10].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Мизин В. Е. Допустимые значения разностей повторных определений координат полигонометрического хода // ГЕО-Сибирь-2011. VII Междунар. науч. конгр. : сб. материалов в 6 т. (Новосибирск, 19–29 апреля 2011 г.). – Новосибирск: СГГА, 2011. Т. 3, ч. 2. – С. 42–45.
2. Мизин В. Е. Корреляционный анализ разностей повторных наблюдений геодезической основы при мониторинге линейных объектов // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2011. – № 3. – С. 26–28.
3. Лесных Н. Б. Законы распределения случайных величин в геодезии: монография. – Новосибирск: СГГА, 2005. – 128 с.
4. Лесных Н. Б. Объекты статистического анализа в геодезии: монография. – Новосибирск: СГГА, – 2010. – 128 с.
5. Лесных Н. Б., Мизин В. Е. Сравнительная характеристика результатов двух статистических методов анализа разностей повторных измерений // Вестник СГГА. – Новосибирск: СГГА, 2012. – Вып. 1 (17). – С. 41–46.
6. Мизин В. Е. Оценка точности геодезических измерений при мониторинге линейных объектов // ГЕО-Сибирь-2006. Междунар. науч. конгр. : сб. материалов в 6 т. (Новосибирск, 24–28 апреля 2006 г.). – Новосибирск: СГГА, 2006. Т. 2, ч. 1. – С. 91–94.

7. Мизин В. Е. Проектирование полигонометрического хода методом моделирования // ГЕО-Сибирь-2010. VI Междунар. науч. конгр. : сб. материалов в 6 т. (Новосибирск, 19–29 апреля 2010 г.). – Новосибирск: СГГА, 2010. Т. 1, ч. 1. – С. 123–126.

8. Мизин В. Е. Предрасчет точности координат полигонометрического хода для целей мониторинга земель линейных объектов // ГЕО-Сибирь-2010. VI Междунар. науч. конгр. : сб. материалов в 6 т. (Новосибирск, 19–29 апреля 2010 г.). – Новосибирск: СГГА, 2010. Т. 2, ч. 1. – С. 127–130.

9. Мизин В. Е. О систематических ошибках повторных // ГЕО-Сибирь-2011. VII Междунар. науч. конгр. : сб. материалов в 6 т. (Новосибирск, 19–29 апреля 2011 г.). – Новосибирск: СГГА, 2011. Т. 3, ч. 2. – С. 38–41.

10. Лесных Н. Б. Две ошибки проверки гипотезы об отсутствии систематических влияний // ГЕО-Сибирь-2010. VI Междунар. науч. конгр. : сб. материалов в 6 т. (Новосибирск, 19–29 апреля 2010 г.). – Новосибирск: СГГА, 2010. Т. 1, ч. 1. – С. 85–90.

Получено 15.06.2013

© Н. Б. Лесных, В. Е. Мизин, 2013