ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Вестник Сыктывкарского университета.
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.
Выпуск 2 (23). 2017

УДК 539.3

О КОЛЕБАНИЯХ КОЛЬЦА, ПОДКРЕПЛЕННОГО НИТЯМИ

А. В. Михайлов

Рассматриваются задачи о колебаниях упругих колец, подкрепленных упругими нитями; задачи об устойчивости упругих колец, находящихся под действием пульсирующей нагрузки.
Ключевые слова: кольцо, колебание, устойчивость, собственная частота, уравнение Эйлера – Остроградского, матрица монодромии, уравнение Матье.

1. Свободные колебания кольца в упругой среде. Дано кольцо радиуса R. Пусть s – длина дуги кольца, ϑ – центральный угол, отсчитываемый от оси x, $\varphi(s)$ – угол между касательной к деформированной оси кольца и осью абсцисс, w – перемещения точек кольца по нормали к недеформированной оси кольца, v – перемещения точек кольца по касательной (рис. 1).

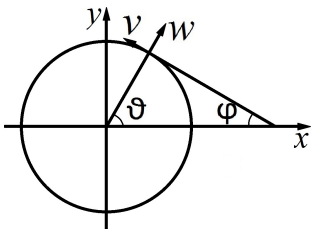


Рис. 1. Кольцо

Для данного случая имеют место уравнения

$$\begin{cases} x'_s(s) = \cos\varphi(s), \\ y'_s(s) = \sin\varphi(s). \end{cases}$$

Предполагаем, что ось кольца является нерастяжимой, т. е. $ds = Rd\vartheta$. Таким образом, координаты и перемещения точек кольца можно рассматривать как функции от центрального угла ϑ, которые будем обозначать $x(\vartheta)$, $y(\vartheta)$, $w(\vartheta)$, $v(\vartheta)$ и т.д. Далее штрихом будем обозначать производную по центральному углу ϑ, а точкой – производную по времени t.

© Михайлов А. В., 2017.

Координаты точек деформированного кольца по известным перемещениям вычисляются по формулам

$$\begin{cases} x(\vartheta) = (R + w(\vartheta))\cos\vartheta - v(\vartheta)\sin\vartheta, \\ y(\vartheta) = (R + w(\vartheta))\sin\vartheta + v(\vartheta)\cos\vartheta. \end{cases} \tag{1}$$

Дифференцируя равенства (1), получаем

$$\begin{cases} x' = (w' - v)\cos\vartheta - (R + w + v')\sin\vartheta, \\ y' = (w' - v)\sin\vartheta + (R + w + v')\cos\vartheta. \end{cases} \tag{2}$$

Упругая энергия деформированного кольца в квадратичном приближении [3] равна

$$U = \frac{D}{2R^3}\int_0^{2\pi}(w'' + w)^2 d\vartheta, \tag{3}$$

где D – цилиндрическая жесткость кольца при изгибе.

В случае прямоугольного сечения кольца она вычисляется по формуле $D = Eab^3/12$, где E – модуль Юнга, a и b – длины сторон прямоугольника, причем $a > b$.

Кинетическая энергия кольца определяется формулой

$$T = \frac{R\rho}{2}\int_0^{2\pi}(\dot{w}^2 + \dot{v}^2)d\vartheta,$$

где ρ — линейная (погонная) плотность материала кольца.

Условие несжимаемости оси кольца $x'^2 + y'^2 = R^2$ с учетом выражений (2) принимает вид

$$(w' - v)^2 + (R + w + v')^2 = R^2. \tag{4}$$

Проинтегрировав выражение (4), учитывая периодичность $v(\vartheta)$

$$\int_0^{2\pi} v' d\vartheta = v(2\pi) - v(0) = 0$$

и отбросив нелинейные слагаемые, получаем условие несжимаемости в виде

$$v' = -w. \tag{5}$$

Также предполагаем, что кольцо подкреплено нитями, обладающими жесткостью c. Упругая энергия нитей вычисляется по формуле

$$U_1 = \frac{c}{2}\int\limits_0^{2\pi} w^2 d\vartheta. \tag{6}$$

С учетом (6) упругая энергия кольца (3) принимает вид

$$U = \frac{D}{2R^3}\int_0^{2\pi}(w''+w)^2 d\vartheta + \frac{c}{2}\int\limits_0^{2\pi} w^2 d\vartheta.$$

Для получения уравнений колебания кольца применим принцип наименьшего действия [3]: если T — кинетическая энергия системы, U — потенциальная энергия, то «истинное движение» в фазовом пространстве дает минимум функционалу:

$$J = \int\limits_{t_0}^{t_1}(T-U)dt.$$

В нашем случае функционал действия J имеет вид:

$$J = \int\limits_{t_0}^{t_1}\left[\frac{R\rho}{2}\int\limits_0^{2\pi}(\dot{w}^2+\dot{v}^2)d\vartheta - \frac{D}{2R^3}\int\limits_0^{2\pi}(w''+w)^2 d\vartheta - \frac{c}{2}\int\limits_0^{2\pi} w^2 d\vartheta\right]dt. \tag{7}$$

С учетом (5), (7) функционал J запишем в виде

$$J = \int\limits_{t_0}^{t_1}\left[\frac{R\rho}{2}\int\limits_0^{2\pi}(\dot{v}^2+\dot{v}'^2)d\vartheta - \frac{D}{2R^3}\int\limits_0^{2\pi}(v'''+v')^2 d\vartheta - \frac{c}{2}\int\limits_0^{2\pi} v'^2 d\vartheta\right]dt. \tag{8}$$

Выпишем для функционала (8) уравнение Эйлера – Остроградского:

$$R\rho(\ddot{v}-\ddot{v}'') = \frac{D}{R^3}(v^{VI}+2v^{IV}+v'') + cv''. \tag{9}$$

Решение уравнения (9) ищем в виде

$$v(\vartheta,t) = \xi(t)\eta(\vartheta). \tag{10}$$

С учетом (10) получаем

$$R\rho(\ddot{\xi}\eta - \ddot{\xi}\eta'') = \frac{D}{R^3}(\xi\eta^{VI} + 2\xi\eta^{IV} + \widetilde{c}\xi\eta''), \text{ где } \widetilde{c} = 1 + \frac{cR^3}{D}. \tag{11}$$

Разделяем переменные:

$$\frac{R^4\rho}{D}\frac{\ddot{\xi}}{\xi} = \frac{\eta^{VI} + 2\eta^{IV} + \widetilde{c}\eta''}{\eta - \eta''} = -p^2. \tag{12}$$

Уравнение (12) разбивается на два уравнения:

$$\ddot{\xi} + \frac{D}{R^4\rho}p^2\xi = 0, \tag{13}$$

$$\eta^{VI} + 2\eta^{IV} + \widetilde{c}\eta'' + p^2(\eta - \eta'') = 0. \tag{14}$$

Уравнение (13) означает, что движение носит колебательный характер, а уравнение (14) описывает форму колебаний [6].

Решение (13) имеет вид

$$\xi = C_1 \sin\omega_k t + C_2 \cos\omega_k t,$$

где $\omega_k = \sqrt{\frac{Dp_k^2}{R^4\rho}}$ — частота собственных колебаний.

Решение уравнения (14) должно быть 2π-периодическим. Этому условию удовлетворяет функция вида

$$\eta_k = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(t)sin(k\vartheta) + b_k(t)cos(k\vartheta)). \tag{15}$$

Подставляем ряд (15) в (14) и с учетом ортогональности системы $\{\sin(k\vartheta); \cos(k\vartheta)\}$ получаем

$$\eta = \left[-k^6 + 2k^4 - (\widetilde{c} - p^2)k^2 + p^2\right](sin(k\vartheta) + cos(k\vartheta)).$$

Нетривиальное решение существует, если

$$k^6 - 2k^4 + (\widetilde{c} - p^2)k^2 - p^2 = 0.$$

Откуда находим зависимость частоты собственных колебаний от номера гармоники [6]

$$p_k^2 = \frac{k^6 - 2k^4 + \widetilde{c}k^2}{k^2 + 1}.$$

Общее решение (9) определяется формулой:

$$v(\vartheta,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(C_{1k}\sin(\omega_k t)+C_{2k}\cos(\omega_k t)\Big)\sin(k\vartheta)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\widetilde{C_{1k}}\sin(\omega_k t)+\widetilde{C_{2k}}\cos(\omega_k t)\Big)\cos(k\vartheta). \qquad (16)$$

Для определения движения необходимы начальные условия:

$$v(\vartheta,0)=v_0(\vartheta),\quad \dot v(\vartheta,0)=\dot v_0(\vartheta),$$

где v_0 и $\dot v_0$ — известные значения.

Раскладывая их в ряд Фурье, используя (16), можно определить коэффициенты C_{1k}, C_{2k}, $\widetilde{C_{1k}}$, $\widetilde{C_{2k}}$.

Например, пусть заданы следующие начальные условия

$$v(\vartheta,0)=\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k\sin(\vartheta)+\beta_k\cos(\vartheta)),$$

$$\dot v(\vartheta,0)=\sum_{k=1}^{\infty}(\gamma_k\sin(\vartheta)+\delta_k\cos(\vartheta)),$$

где α_k, β_k, γ_k, δ_k — известные коэффициенты.

С другой стороны, подставляя в (16) $t=0$, получаем

$$v(\vartheta,0)=\sum_{k=1}^{\infty}C_{2k}sin(k\vartheta)+\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{C_{2k}}cos(k\vartheta),$$

$$\dot v(\vartheta,0)=\sum_{k=1}^{\infty}C_{1k}\omega_k\sin(k\vartheta)+\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{C_{1k}}\omega_k\cos(k\vartheta).$$

Отсюда находим коэффициенты

$$C_{1k}=\frac{\gamma_k}{\omega_k},\quad C_{2k}=\alpha_k,\quad \widetilde{C_{1k}}=\frac{\delta_k}{\omega_k},\quad \widetilde{C_{2k}}=\beta_k.$$

2. Колебания кольца, подкрепленного нитями одностороннего действия. Предположим, что кольцо подкреплено нитями, которые не воспринимают сжимающих усилий, т. е. упругая энергия нитей определяется формулой

$$U_2=\frac{c}{2}\int_0^{2\pi}w_+^2\,d\vartheta,$$

где w_+ — положительная срезка функции:

$$w_+ = \max\{0, w\} = \frac{w + |w|}{2}.$$

Один конец нити прикреплен к точке кольца, а другой – к неподвижному центру.

В данном случае функционал J принимает вид

$$J = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[\frac{R\rho}{2} \int\limits_0^{2\pi} (\dot{w}^2 + \dot{v}^2) d\vartheta - \frac{D}{2R^3} \int\limits_0^{2\pi} (w'' + v')^2 d\vartheta - \frac{c}{2} \int\limits_0^{2\pi} w_+^2 d\vartheta \right] dt. \quad (17)$$

Перемещения точек кольца ищем в виде

$$v = \sum_{k=1}^{N} (A_k(t) sin(k\vartheta) + B_k(t) cos(k\vartheta)),$$

$$w = \sum_{k=1}^{N} (kA_k(t) cos(k\vartheta) - kB_k(t) sin(k\vartheta)).$$

Согласно принципу наименьшего действия, функционал (17) принимает стационарное значение.

Выпишем для него уравнения Эйлера относительно A_k и B_k:

$$R\rho\pi(1+k^2)\ddot{A}_k + \frac{D}{R^3}\pi(k^3-k)^2 A_k + c \int\limits_0^{2\pi} S_+ k \cos(k\vartheta) d\vartheta \ = 0,$$

$$R\rho\pi(1+k^2)\ddot{B}_k + \frac{D}{R^3}\pi(k^3-k)^2 B_k - c \int\limits_0^{2\pi} S_+ k \sin(k\vartheta) d\vartheta \ = 0,$$

где $S_+ = \left[\sum_{j=1}^{N} (jA_j \cos(j\vartheta) - jB_j \sin(j\vartheta)) \right]_+$.

Выражаем $\ddot{A}_k$ и $\ddot{B}_k$:

$$\ddot{A}_k = -\frac{D(k^3-k)^2}{R^4\rho(1+k^2)} A_k - \frac{c}{R\rho\pi(1+k^2)} \int\limits_0^{2\pi} S_+ k \cos(k\vartheta) d\vartheta, \quad (18)$$

$$\ddot{B}_k = -\frac{D(k^3-k)^2}{R^4\rho(1+k^2)} B_k + \frac{c}{R\rho\pi(1+k^2)} \int\limits_0^{2\pi} S_+ k \sin(k\vartheta) d\vartheta. \quad (19)$$

Введем вектор $V = (A_1, ..., A_N, B_1, ..., B_N)^T$.

Систему дифференциальных уравнений (18)–(19) запишем в виде

$$\ddot{V} = f(V), \tag{20}$$

где

$$f_j = -\frac{D(j^3 - j)^2}{R^4\rho(1 + j^2)} A_j - \frac{c}{R\rho\pi(1 + j^2)} \int\limits_0^{2\pi} S_+ j \cos(j\vartheta) d\vartheta, \quad j = 1 : N,$$

$$f_j = -\frac{D(j^3 - j)^2}{R^4\rho(1 + j^2)} B_j + \frac{c}{R\rho\pi(1 + j^2)} \int\limits_0^{2\pi} S_+ j \sin(j\vartheta) d\vartheta, \quad j = N + 1 : 2N.$$

Система (20) эквивалентна системе, состоящей из дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{V} = Z, \\ \dot{Z} = f(V). \end{cases} \tag{21}$$

Для решения системы (21) использовался численный метод Рунге-Кутта 4-го порядка [1].

На рис. 2–15 представлены примеры графиков формы колебаний кольца при разных начальных условиях ($w_0 = 1.5\sin(2\vartheta)$ для графиков слева, $w_0 = 2\cos(3\vartheta)$ – справа). Радиус кольца $R = 10$ м, жесткость нитей $c = 35$ Н/мм, цилиндрическая жесткость кольца $D = 66.7$ Н·м, шаг интегрирования $h = 2\pi/199$, число шагов по времени $n_1 = 8500$ (слева), $n_2 = 18000$ (справа).

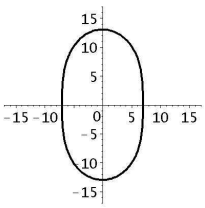


Рис. 2. t=0

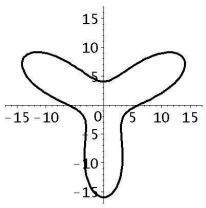


Рис. 3. t=0

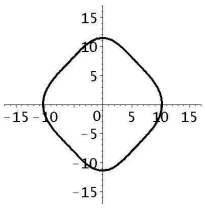


Рис. 4. t=1.2

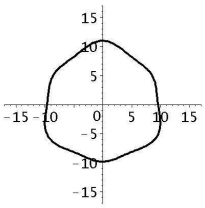


Рис. 5. t=1.2

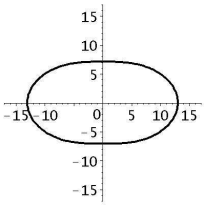


Рис. 6. t=2.8

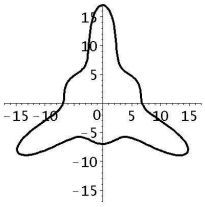


Рис. 7. t=6.9

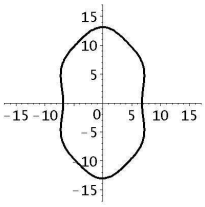


Рис. 8. t=5.2

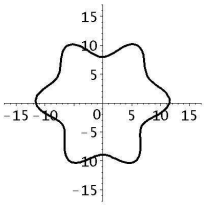


Рис. 9. t=8.1

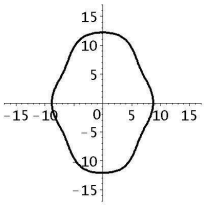


Рис. 10. t=6

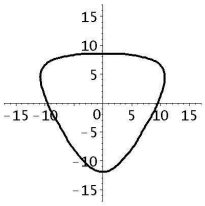


Рис. 11. t=14.7

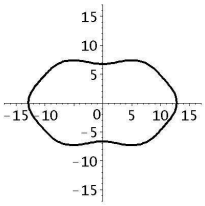


Рис. 12. t=8

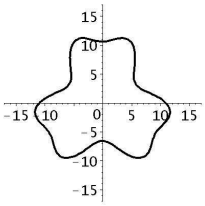


Рис. 13. t=26.1

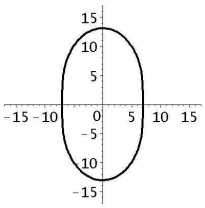


Рис. 14. t=16

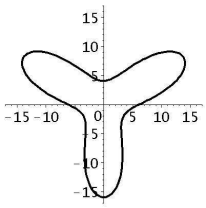


Рис. 15. t=32.1

Как видно из графиков, наблюдается эффект возврата в начальное состояние (эффект Ферми–Паста–Улама) [8]. Энергия остается локализованной в начальной и нескольких соседних гармониках ($N \leq 20$). А при больших временах интегрирования наблюдается почти полный возврат энергии в начальную гармонику.

Для рисунков слева разница между начальным (рис. 2) и конечным состоянием (рис. 14) равна

$$\max\{v - v_0\} \leq 0.039,$$

$$\max\{w - w_0\} \leq 0.074.$$

Для рисунков справа (рис.3 — рис.15)

$$\max\{v - v_0\} \leq 0.040,$$

$$\max\{w - w_0\} \leq 0.036.$$

3. Устойчивость кольца под действием периодической нагрузки. Предположим, что кольцо подвергается действию периодической нормальной нагрузки, равной P в одни промежутки времени и падающей до нуля в другие промежутки времени [2]. Работа пульсирующей нагрузки вычисляется по формуле

$$U_3 = \frac{P(1 - \cos(\omega t))}{2} \int_0^{2\pi} (w'^2 - k_0 w^2) d\vartheta.$$

Здесь параметр k_0 отвечает за направление действующей нагрузки: при $k_0 = 1$ нагрузка всегда направлена по нормали к деформированной оси кольца; при $k_0 = 2$ – всегда направлена к неподвижному центру.

Некоторые задачи устойчивости подкрепленных колец нитями, которые не выдерживают этих усилий, рассмотрены в работе [7].

Аналогично предыдущему случаю рассмотрим функционал

$$J = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[\frac{R\rho}{2} \int\limits_0^{2\pi} (\dot{w}^2 + \dot{v}^2) d\vartheta - \frac{D}{2R^3} \int\limits_0^{2\pi} (w'' + w)^2 d\vartheta - \right.$$

$$\left. - \frac{c}{2} \int\limits_0^{2\pi} w^2 d\vartheta + \frac{P(1 - \cos(\omega t))}{2} \int\limits_0^{2\pi} (w'^2 - k_0 w^2) d\vartheta \right] dt.$$

Используя условие несжимаемости (5), получаем

$$J = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[\frac{R\rho}{2} \int\limits_0^{2\pi} (\dot{v}'^2 + \dot{v}^2) d\vartheta - \frac{D}{2R^3} \int\limits_0^{2\pi} (v''' + v')^2 d\vartheta - \right.$$

$$\left. - \frac{c}{2} \int\limits_0^{2\pi} v'^2 d\vartheta + \frac{P(1 - \cos(\omega t))}{2} \int\limits_0^{2\pi} (v''^2 - k_0 v'^2) d\vartheta \right] dt. \tag{22}$$

Перемещение v будем искать в виде ряда Фурье:

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(t) sin(k\vartheta) + B_k(t) cos(k\vartheta)).$$

Согласно принципу наименьшего действия, функционал (22) принимает стационарное значение.

Выпишем для него уравнения Эйлера – Остроградского:

$$\ddot{A}_k = -\frac{D}{R^4 \rho (1 + k^2)} (k^6 - 2k^4 + k^2 + \frac{cR^3}{D} k^2) A_k +$$

$$+ \frac{P(1 - \cos(\omega t))(k^4 - k_0 k^2)}{R\rho(1 + k^2)} A_k. \tag{23}$$

Так как для B_k уравнения принимают аналогичную форму, в дальнейшем для краткости будем приводить только уравнения относительно A_k.

Сделаем замену переменных

$$\omega t = 2\tau. \tag{24}$$

Из уравнения (23) с учетом замены (24) получаем

$$\ddot{A}_k + (\alpha + \beta cos(2\tau)) A_k = 0, \tag{25}$$

где

$$\alpha = \frac{4(D(k^6 - 2k^4 + k^2 + \frac{cR^3}{D}k^2) - PR^3(k^4 - k_0k^2))}{\omega^2 R^4 \rho(1 + k^2)},$$

$$\beta = \frac{4P(k^4 - k_0k^2)}{\omega^2 R\rho(1 + k^2)}.$$

Уравнение (25) называется уравнением Матье.

Аналогично предыдущему случаю, с помощью замены, перейдем от уравнения второго порядка (25) к системе, состоящей из уравнений первого порядка.

Введем вектор $y = (A_1, ..., A_N)^T$, тогда $f(y_k) = -(\alpha + \beta cos(2\tau))A_k$.

Система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} \dot{y} = z, \\ \dot{z} = f(y). \end{cases} \tag{26}$$

Для определения области устойчивых колебаний кольца найдем фундаментальную матрицу $\Phi(t)$ для системы уравнений (26):

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{pmatrix},$$

где g_1, g_2 – решения (26), которые называются функциями Матье [5], а h_1, h_2 — соответственно их производными.

Пусть $\Phi(t)$ фундаментальная матрица системы (26), удовлетворяющая начальному условию

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а все остальные фундаментальные матрицы принимают вид $\Phi(t)C$, где C – постоянная невырожденная матрица.

Представив систему (26) в виде $\ddot{y} = M(t)z$, где $M(t + T) \equiv M(t)$ – непрерывная периодическая матрица, заметим что

$$\Phi'(t + T) = M(t + T)\Phi(t + T) = M(t)\Phi(t + T),$$

т. е. $\Phi(t + T)$ – фундаментальная матрица решений.

В силу этого существует единственная невырожденная матрица C, такая, что

$$\Phi(t + T) = \Phi(t)C,$$

где T – период. Если положить $t = 0$, то

$$\Phi(T) = \Phi(0)C.$$

Согласно теории Флоке [4], матрица $\Phi(T)$ называется матрицей монодромии, а ее собственные значения λ_1 и λ_2 – мультипликаторами системы, т. е. $g(t+T) \equiv \lambda_i g(t)$, где $g(t)$ – решение системы (26).

Характеристическое уравнение для матрицы монодромии имеет вид

$$\begin{vmatrix} g_1 - \lambda & g_2 \\ h_1 & h_2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (g_1 + h_2)\lambda + g_1 h_2 - g_2 h_1 = 0.$$

Согласно теореме Лиувилля [9], фазовый объем системы остается постоянным:

$$\frac{dV}{dt} = 0,$$

т. е.

$$\det \Phi(T) = g_1 h_2 - g_2 h_1 = 1.$$

С учетом вышесказанного характеристическое уравнение окончательно принимает вид

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + 1 = 0, \tag{27}$$

где $\sigma = tr(\Phi(T))$ – след матрицы монодромии.

Корни характеристического уравнения вычисляются по формуле

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4}}{2}.$$

При $\sigma^2 \leq 4$, т. е. $|\sigma| \leq 2$, корни уравнения (27) будут комплексные, а при $|\sigma| > 2$ – действительные, причем $|\lambda_1| > 0$, $|\lambda_2| = |\lambda_1^{-1}| > 1$.

Рассмотрим выражение

$$\Phi(T)\Phi(t_0) = C_1\Phi(T)u_1 + C_2\Phi(T)u_2 = C_1\lambda_1 u_1 + C_2\lambda_2 u_2,$$

где u_1, u_2 – собственные векторы матрицы.

Так как фазовый объем системы сохраняется, т. е. $\lambda_1\lambda_2 = 1$, и собственные числа являются комплексно-сопряженными, причем $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$, получаем

$$|\Phi(T)\Phi(t_0)| \leq |C_1||\lambda_1||u_1| + |C_2||\lambda_2||u_2| \leq C.$$

Последнее выражение показывает, что движение носит ограниченный характер.

Следовательно, условие устойчивости колебаний можем задать неравенством: $|\sigma| \leq 2$.

На рис. 16–17 представлены фазовые траектории для гармоник A_2 и A_4 соответственно. Рис. 16 соответствует параметрам $k = 2$, $c = 0$ Н/мм, $p = 0.24$ Н, $\omega = 2$, $k_0 = 2$. Рис. 17 — $k = 4$, $c = 25$ Н/мм, $p = 1.4857$ Н, $\omega = 2$, $k_0 = 2$.

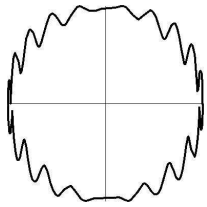


Рис. 16. Устойчивая фазовая траектория

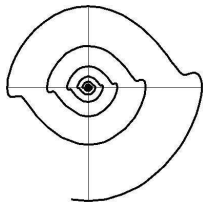


Рис. 17. Неустойчивая фазовая траектория

Главным признаком устойчивости колебаний является замкнутость фазовой траектории.

Также стоит отметить, что в ходе численного эксперимента было установлено:
1) Если жесткость нитей $c = 0$, то критическая нагрузка совпадает со стационарной нагрузкой

$$P = \frac{D(k^2 - 1)^2}{R^3(k^2 - k_0)}.$$

В табл. 1 представлены стационарные нагрузки для различных гармоник. Здесь $P_{\text{СТ}_1}$ — нормальная критическая нагрузка, $P_{\text{СТ}_2}$ — центральная критическая нагрузка.

Таблица 1

Стационарная нагрузка

k	2	3	4	5
$P_{\text{СТ}_1}$	0.200	0.533	1.000	1.600
$P_{\text{СТ}_2}$	0.300	0.609	1.071	1.669

2) Если $c \neq 0$, то критическая нагрузка зависит от периодического возмущения.

В данном случае критическая сила вычисляется по формуле

$$P = \frac{D(k^6 - 2k^4 + k^2) + cR^3k^2}{R^3(k^4 - k_0k^2)}.$$

В табл. 2 приведены минимальные критические силы — нормальная P_1 и центральная P_2, а также номер гармоники k, соответствующий этой силе.

Таблица 2

Зависимость критической силы P от жесткости нитей c

c	1	5	10	15	20	25	30	35	40
k	2	3	4	4	4	5	5	5	5
P_1	0.544	1.320	0.653	0.900	1.143	1.638	1.824	2.018	2.188
P_2	0.816	1.509	0.715	0.964	1.225	1.709	1.903	2.106	2.283

Автор выражает благодарность своему научному руководителю к.ф.-м.н. В.Н. Тарасову за оказанную помощь в подготовке данной статьи.

Список литературы

1. **Абромовиц М., Стиган И.** Справочник по специальным функциям, пер. с англ. под ред. В.А. Диткиной и Л.Н Кармазиной. М.: Наука, 1979. 832 с.

2. **Вольмир А. С.** Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.

3. **Гельфанд И. М., Фомин С .В.** Вариационное исчисление. М.: Гос. изд-во физ.-матем. литературы, 1961. 228 с.

4. **Лерман Л. М.** Линейные дифференциальные уравнения и системы. Н. Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. 89 с.

5. **Мэтьюз Дж., Уокер Р.** Математические методы в физике : пер. с англ. М.: Атомиздат, 1972. 392 с.

6. **Пановко Я. Г.** Основы прикладной теории упругих колебаний. М.: Машиностроение, 1967. 318 с.

7. **Тарасов В. Н.** Методы оптимизации в исследовании конструктивно-нелинейных задач механики упругих систем. Сыктывкар: КНЦ УрО РАН, 2013. 238 с.

8. **Улам С.** Нерешенные математические задачи / пер. с англ. З.Я. Шапиро. М.: Наука, 1964. 168 с.

9. **Фадеев Л. Д., Якубовский О. А.** Лекции по квантовой механике для студентов-математиков : учеб. пособие Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 200 с.

Summary

Mikhailov A. V. The fluctuations of the ring supported with threads

Problems of fluctuations of the elastic rings supported with elastic threads are considered; problems on the stability of elastic rings under the action of a pulsating load.

Keywords: ring, fluctuation, stability, natural frequency, Euler-Ostrogradsky equation, monodromy matrix, Mathieu equation.

References

1. **Abramowitz M., Stegun I. A.** *Spravochnik po special'nym funkciyam* (Handbook of mathimatical functions with formulas, graphs and mathimatical tables), National bureau of standards applied mathematics series, 1964, 1046 p.

2. **Vol'mir A. S.** *Ustojchivost' deformiruemyh sistem* (Stability of deformable systems), Moscow: Nauka, 1967, 984 p.

3. **Gelfand I. M., Fomin S. V.** *Variacionnoe ischislenie* (Calculus of Variations), Moscow: Gos. izd-vo fiz.-matem. literatury, 1961, 228 p.

4. **Lerman L. M.** *Linejnye differencial'nye uravneniya i sistemy* (The simple differential equations and systems), Nizhny Novgorod: Nizhegorodsliy universitet, 2012, 89 p.

5. **Mathews J., Walker R. L.** *Matematicheskie metody v fizike* (Mathematical methods of physics), New York - Amsterdam: W. A. Benjamin INC., 1964, 475 p.

6. **Panovko Ya. G.** *Osnovy prikladnoj teorii uprugih kolebanij* (Basics of applied theory of elastic vibrations), Moscow: Mashinostroenie, 1967, 318 p.

7. **Tarasov V. N.** *Metody optimizacii v issledovanii konstruktivno-nelinejnyh zadach mekhaniki uprugih sistem* (Optimization methods in a research of constructively nonlinear problems of mechanics of elastic systems), Syktyvkar: KNC UrO RAN, 2013, 238 p.

8. **Ulam S. M.** *Nereshennye matematicheskie zadachi* (A Collection of mathematical problems), New York: 1960, 150 p.

9. **Faddeev L. D., Yakubovskii O. A.** *Lekcii po kvantovoj mekhanike dlya studentov-matematikov* (Lectures on Quantum Mechanics for Mathematics Students), Leningrad: Izd-vo Leningradskogo universiteta, 1980, 200 p.

Для цитирования: Михайлов А. В. О колебаниях кольца, подкрепленного нитями // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 2 (23). С. 13–28.*

For citation: Mikhailov A. V. The fluctuations of the ring supported with threads, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, 2 (23), pp. 13–28.

Коми НЦ УрО РАН *Поступила 20.06.2017*