

6. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский – М.: Наука, 1966. – 620 С.
7. Wenju H.U. Modeling of the bridge deck's hydronic snow-melting system based on ground source heat pump/ H.U. Wenju, Yang YAO, M.A. Zuiliang // International Congress of Refrigeration 2007, Beijing – ICR07-E2-249.
8. Формат доступа: <http://diary.gismeteo.ru>
9. ДБН В.2.6-31:2006 Конструкції будівель і споруд. Теплова ізоляція будівель/ Мінбуд України, Київ, 2006.

УДК 519.6

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ТЕРМИЧЕСКИХ КОНТАКТНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ НА ТЕПЛОВЫЕ РЕЖИМЫ НАГРЕВАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

А.П. Слесаренко

Лауреат государственной премии Украины, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник
Отдел моделирования и идентификации тепловых процессов
Институт ИПМаш НАН Украины им. А.Н. Подгорного
ул. Пожарского, 2/10, г. Харьков, 61046
Контактный тел.: (0572) 349-47-51, 096-386-30-22

А.С. Сорока

Доцент, кандидат физико-математических наук
Кафедра микроэлектроники, электронных приборов и устройств
Факультет Электронной техники
Харьковский национальный университет радиоэлектроники
им. М.К. Янгеля
пр. Ленина, 14, г. Харьков, 61166
Контактный тел.: (0572) 336-82-24, 096-233-38-15

Отримано рішення ряду задач для багатосарової нагрівальної системи без урахування й з урахуванням термічних контактних опорів. Наведено аналіз впливу контактних опорів на теплові режими нагрівальних систем

Ключові слова: термічний контактний опір, теплопровідність шаруватої структури

Получены решения ряда задач теплопередачи для многослойной нагревательной системы без учета и с учетом термических контактных сопротивлений. Приведен анализ влияния контактных сопротивлений на тепловые режимы нагревательных систем

Ключевые слова: термическое контактное сопротивление, теплопроводность слоистой структуры

Solutions of some problems for multilevel heating system are received without taking into account and with taking into account the thermal contact resistance. The analysis of influence of contact resistance on thermal modes of heating systems is resulted

Key words: thermal contact resistance, heat transfer of multilayered structure

1. Постановка проблемы

На тепловой режим контактирующих тел значительное влияние оказывает термическое сопротивление, возникающее в области контакта и обусловленное несовершенством механического соединения контактирующих поверхностей [1]. Наличие термических контактных сопротивлений во многих случаях может существенно изменять картину температурных распределений в нагревательной системе даже при незначительном нагреве. Учитывая важность задач проектирования энергоэффективных конструкций и сооружений, актуальной проблемой является разработка методов компьютерного моделирования процессов теплопередачи с учетом неидеального теплового контакта.

С целью исследования влияния термически неидеальных контактов на тепловые режимы нагревательных систем построена математическая модель нагревательной системы (НС) в виде плоскостойкой энергоактивной структуры, применяемой для обеспечения микроклимата сельскохозяйственных производственных сооружений [2-4]. Конструкция такой НС составлена из плоских слоев различных строительных материалов, некоторые слои (активные) содержат тепловыделяющие трубчатые элементы. Конструктивные и технологические соображения позволяют предложить различные варианты выполнения НС, поэтому теплофизическую модель целесообразно построить в самом общем виде с учетом ряда несущественных упрощающих предположений.

Стационарный режим теплопередачи в таких структурах представляет один из важных аспектов, т. к. его исследование позволяет получить оценку эффективности (соотношение полезной части подведенного тепла, которая идет на нагрев помещения и рассеянной в грунте), распределение температуры в толще НС и условий возможного перегрева, параметры аккумулирования энергии в массиве НС и оценить возможности стабилизации теплового режима и реализации прерывистого режима отопления (переход к динамике).

2. Физическая модель нагревательной системы

Имея в виду сравнительно большие размеры обогреваемой площади по сравнению с глубиной размещения слоистой структуры в грунте, примем допущение об одномерности процессов теплопередачи в ней. Массив грунта под НС будем рассматривать как термостат с фиксированной температурой, которая изменяется, по крайней мере, от сезона до сезону, но в модели мы ее принимаем за постоянную на протяжении конечного времени работы НС. В плоскости теплового контакта поверхности НС с воздушной средой производственного помещения примем условия конвективного теплообмена, которые подчиняются закону Ньютона-Рихмана [5]. Пассивные слои выполнены в виде засыпок из песка, керамзита или других теплопроводных термостойких водоотталкивающих материалов, см. рис. 1. Активные и пассивные слои могут располагаться в произвольной последовательности. Учитывая реальные структурные особенности и неоднородности строительных материалов, на границах слоев в модели следует учесть термические контактные сопротивления.

Конструкция активных слоев описана в указанных выше авторских ссылках, и мы не будем ее приводить (см. рис. 1). Отметим, что единственным дополнительным параметром такого слоя в рассматриваемой задаче будет лишь величина распределенной объемной средней по слою мощности источников p_i , Вт/м³, которая отвечает уровню подведенной к трубчатым нагревателям мощности. Будем считать эти параметры независимыми от температуры нагрева данного и других активных слоев. Теплофизические параметры всех слоев будем также считать постоянными, характеризующими соответствующий строительный материал, и не зависящими от температуры и условий теплообмена.

3. Математическая модель теплопередачи и ее анализ

Рассматриваемая модель НС составлена из N однородных слоев, среди которых есть активные слои с подводом энергии. В поперечных направлениях система предполагается однородной, потоки тепла и градиенты температур имеют место только в направлении нормали к слоям – вдоль оси OX .

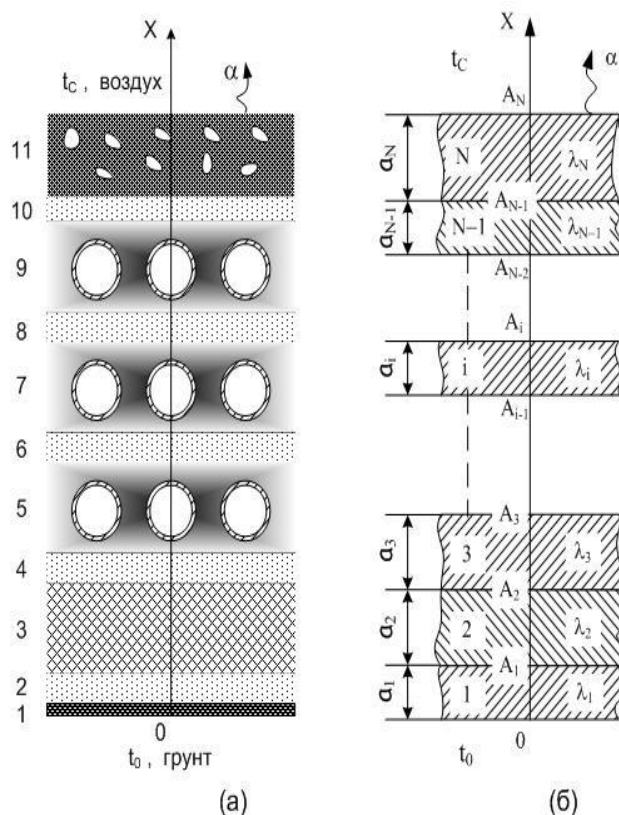


Рис. 1. Поперечный разрез 11-слойной НС (а) и система параметров N -слойной структуры (б)

Пусть t_n – температура поверхности пола – одна из искоемых величин (или параметр задачи), тогда при температуре воздуха в помещении t_c , отличной от t_n , на поверхности пола в плоскости $x = A$ будет иметь место конвективный теплообмен с воздушной средой помещения, который подчиняется закону Ньютона-Рихмана:

$$q = \alpha \cdot (t_n - t_c), \quad (1)$$

где α – коэффициент теплообмена; в реальных условиях производственных помещений для удержания животных при наличии вентиляции величина коэффициента теплоотдачи может изменяться в довольно широком интервале значений $5 \dots 15 \text{ Вт} \times \text{м}^{-2} \times \text{K}^{-1}$.

Нижняя поверхность НС находится в плоскости $x = 0$ (на глубине A) и термостатирована глубинным теплом при фиксированной температуре $t_0 = \text{const}$, величина которой в зависимости от сезона и глубины лежит в пределах $5 \dots 10^\circ \text{C}$.

В каждом из слоев температурное распределение (частичное распределение) $u_i(x)$ должно удовлетворять уравнению теплопроводности, которое в рассмотренном стационарном случае для одномерной структуры имеет вид:

$$\frac{d^2 u_i}{d\xi^2} = -w_i, \quad (2)$$

где $\xi = x/A$ – нормированная координата, все линейные размеры нормированы на величину $A = A_N$

– полную глубину (высоту) структуры; каждый слой характеризуется толщиной $a_i = x_i - x_{i-1}$, плотностью мощности распределенных источников p_i , Вт/м³, коэффициентом теплопроводности λ_i , Вт×м⁻¹К⁻¹; $w_i = p_i^2/\lambda_i$ – нормированная плотность мощности распределенных источников i -го слоя;

r_i^* – термические контактные сопротивления меж-

ду i -м и $(i+1)$ -м слоями. Кроме того, искомая функция должна удовлетворять краевым условиям на границах НС при $x = 0$ и $x = A$, а также условиям сопряжения на границах раздела слоев ($x = a_i$, $i = 1 \dots N-1$, a_i – координаты границ слоев):

$$u_1 = t_0 + \frac{r_0^* \lambda_1}{A} \frac{du_1}{d\xi}, \text{ при } x = 0, \quad (3)$$

$$u_N = t_c - Bi^{-1} \frac{du_N}{d\xi}, \text{ при } x = 1, \quad (4)$$

$$u_{i+1} - u_i = \frac{r_{i+1}^* \lambda_{i+1}}{A} \frac{du_{i+1}}{d\xi}, \text{ при } \xi = \xi_i, \quad (5)$$

$$\lambda_{i+1} \frac{du_{i+1}}{d\xi} = \lambda_i \frac{du_i}{d\xi}, \text{ при } \xi = \xi_i, \quad (6)$$

где $Bi = \alpha A / \lambda_N$ – критерий Био.

Математическая модель теплопередачи многослойной структуры построена, исходя из принятой физической модели – граничной задачи теплопроводности (2)-(6), и сводится к системе $2 \times N$ линейных неоднородных уравнений. Ее решение (температура) представляет собой кусочно-непрерывную функцию координаты x , толщин слоев d_i , их теплопроводностей и мощностей тепловых источников. В пределах каждого слоя решения уравнения теплопроводности определяются в аналитическом виде – профиль температуры описывается квадратичной функцией координаты вида:

$$u_i(\xi) = -\frac{1}{2} w_i \xi^2 + C_i \xi + D_i, i = 1, 2, \dots, N, \quad (7)$$

где C_i , D_i – искомые коэффициенты, которые определяются из граничных условий задачи; для пассивных слоев параметр w_i равен нулю, и температурный профиль описывается линейной функцией координаты.

Квазидиагональный вид матрицы системы линейных уравнений позволяет определить искомые коэффициенты C_i , D_i в замкнутом виде. Например, коэффициент C_N определяется по формуле:

$$C_N = \lambda_N^{-1} \frac{t_c - t_0 - W}{R + R^* + (\lambda_N Bi)^{-1}}, \quad (8)$$

где $R^* = \sum_{i=1}^N r_{i-1}^*$, $R = \sum_{i=1}^N r_i$ – соответственно общее

термическое сопротивление межслойных контактов и общее термическое сопротивление всей многослойной структуры ($r_i = a_i / (\lambda_i)$); параметр W выражается через мощности источников и термические сопротивления:

$$W = \frac{1}{2} p_N \left[\sum_{i=1}^{N-1} (r_{i-1}^* + r_i) + r_{N-1}^* - (\lambda_N Bi)^{-1} \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} p_i \left[\sum_{j=1}^i (r_{j-1}^* + r_j) + r_{i-1}^* \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-2} p_{i+1} \sum_{j=1}^i (r_{j-1}^* + r_j).$$

Остальные коэффициенты C_i и все коэффициенты D_i определяются с помощью рекуррентных формул. Таким образом, прямая задача теплопроводности для многослойной активной системы, которая состоит из произвольного числа N слоев, среди которых может быть некоторое число $K \leq N$ активных, решена в замкнутом виде.

Температурный профиль по высоте НС имеет вид кусочно-непрерывной функции координаты, тепловой режим НС подчиняется принципу суперпозиции. При этом температура поверхности пола t_n , очевидно, определяется тепловыми вкладами всех источников, имеющих в системе:

$$t_n = a_0 t_0 + a_c t_c + \sum_{i=1}^K k_i p_i, \quad (9)$$

где K – количество активных слоев НС; p_i , Вт/м² – суммарная удельная мощность источников, распределенных в i -м слое на единице площади; a_0 , a_c , k_i – весовые коэффициенты, обусловленные условиями теплообмена в системе и значениями теплофизических характеристик слоев. Соотношение (9) может быть использовано для определения мощности источников по заданным температурам окружающей среды t_c , t_0 и температуре поверхности пола t_n .

В качестве иллюстрации влияния термических контактных сопротивлений приведем температурные профили в многослойной НС с подводом энергии в различные ярусы. Рассматривалась 11-слойная НС с такой структурой: характеристики слоев по порядку снизу вверх – гидроизоляция (рубероид) $d1=0.01$ м, $\lambda1=0.17$ Вт×м⁻¹К⁻¹; песок $d2=0.05$ м, $\lambda2=0.58$ Вт×м⁻¹К⁻¹; керамзит $d3=0.15$ м, $\lambda3=0.41$ Вт×м⁻¹К⁻¹; песок $d4=0.05$ м, $\lambda4=0.58$ Вт×м⁻¹К⁻¹; активный слой №3 $d5=0.15$ м, $\lambda5=0.15$ Вт×м⁻¹К⁻¹; песок $d6=0.05$ м, $\lambda6=0.58$ Вт×м⁻¹К⁻¹; активный слой №2 $d7=0.15$ м, $\lambda7=0.15$ Вт×м⁻¹К⁻¹; песок $d8=0.05$ м, $\lambda8=0.58$ Вт×м⁻¹К⁻¹; активный слой №1 $d9=0.15$ м, $\lambda9=0.15$ Вт×м⁻¹К⁻¹; песок $d10=0.04$ м, $\lambda10=0.58$ Вт×м⁻¹К⁻¹; монолитный бетон $d11=0.15$ м, $\lambda11=0.87$ Вт×м⁻¹К⁻¹. Температура глубинного грунта $t_0 = 6^\circ\text{C}$, коэффициент теплоотдачи с поверхности НС $\alpha = 5$ Вт×м⁻²К⁻¹.

Таким образом, 1-й, 2-й и 3-й активные слои (ярусы подвода энергии) организованы соответственно в 9-м, 7-м и 5-м слоях. На рис. 2 слева показаны температурные профили в НС без учета контактных термических сопротивлений при ее нагреве из 1-го яруса – рис.2(1), 2-го яруса – рис. 2(3) и 3-го – рис. 2(5). Пары семейств кривых соответствуют заданным уровням нагрева поверхности пола от 16°C до 32°C с шагом 2°C (девять кривых). Для одного семейства кривых принят фиксированный перепад температур между полом и воздушной средой в $\Delta t = 3^\circ\text{C}$, для другого $\Delta t = 6^\circ\text{C}$. На фрагментах рис. 2 справа – рис.2(2), рис. 2(4) и рис. 2(6) показаны профили температуры по высоте НС, полученные с учетом конечного контактного термического сопротивления на границах активных слоев (взяты

одинаковые величины $\gamma^* = 0.15 \text{ м}^2\text{К/Вт}$. Видно весьма заметное повышение температуры нагрева внутренних слоев при фиксированных температурах на внешних поверхностях. Очевидно, прогноз возможного перегрева НС без учета контактных сопротивлений будет весьма заниженным, и, как видно из рис. 2, ошибка будет тем больше (в рассматриваемом примере до 25%), чем выше требуется подвод энергии для обеспечения заданного уровня нагрева поверхности пола.

Достоверность математической модели и ее компьютерной версии подтверждена путем проверки закона сохранения энергии: энергия, которая расходуется на нагревание НС, создает тепловые потоки в грунт ($x < 0$) и воздушную среду ($x > A$). При этом, действительно, должно выполняться равенство:

$$P = Q_1 + Q_{11}, \quad (10)$$

где P – суммарная мощность источников НС (Вт/м^2); Q_1 , Q_{11} – соответственно потоки энергии в грунт из 1-го слоя и в воздушную среду – из 11-го слоя.

Из табл. 1 и 2 видно, что соотношение (10) выполняется с высокой степенью точности в широких пределах изменения t_n . Кроме того, из таблицы видно, как увеличивается максимальная температура внутри НС для больших значений t_n , причем наличие контактных термических сопротивлений внутри НС приводит к более значительному перегреву внутренних областей НС. На рис. 3 показана зависимость максимальной температуры, достигаемой в НС, от уровня нагрева поверхности пола.

В случаях игнорирования контактных термических сопротивлений при моделировании прогноз относительно надежности работы тепловыделяющих

элементов нагревательных систем и возможных термических напряжений может быть ошибочен, что может стать причиной возникновения аварийной ситуации.

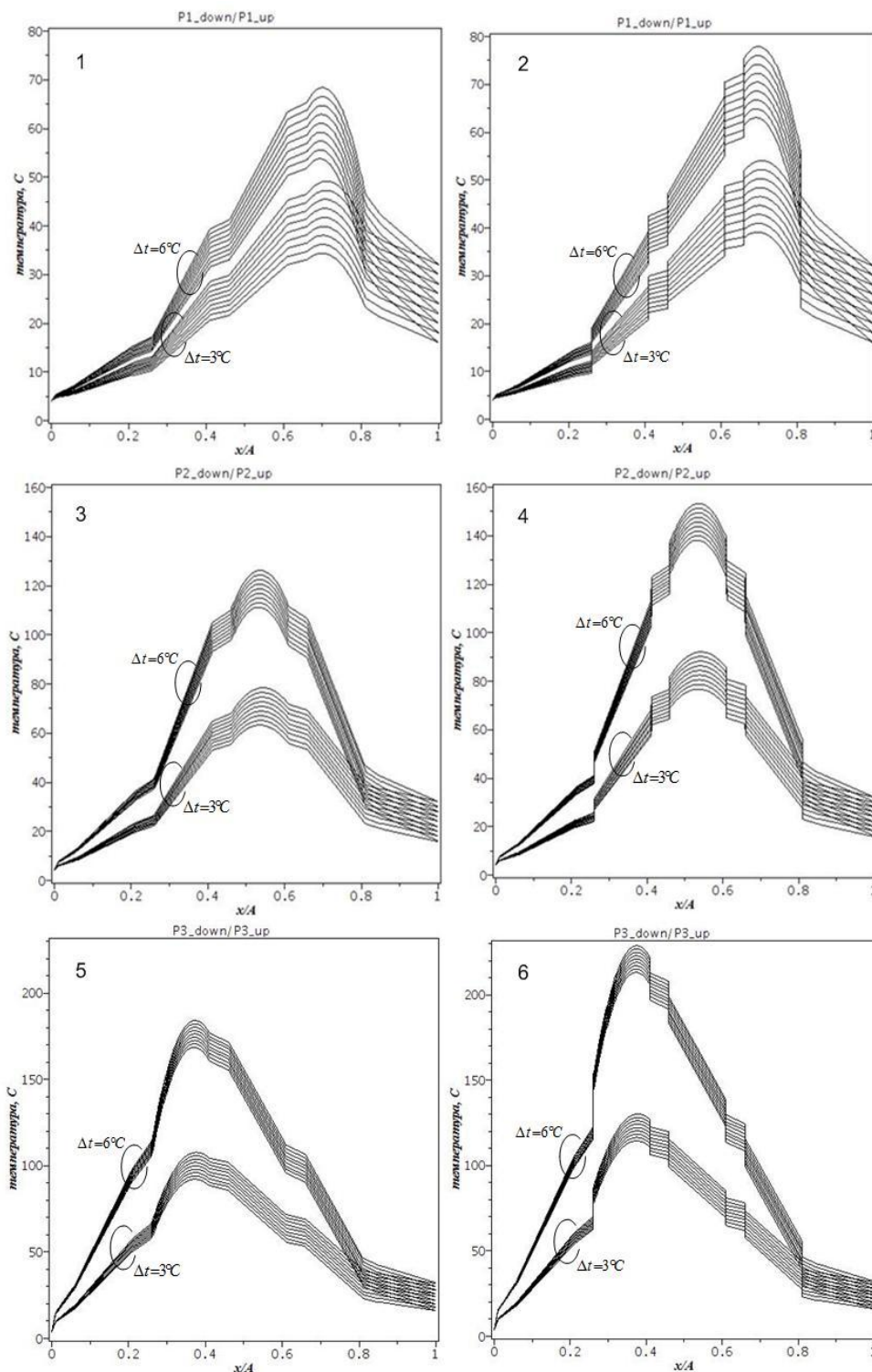


Рис. 2. Распределения температуры по высоте НС в различных режимах

Таблица 1

Распределение потоков тепла из НС для различных уровней подвода мощности в 2-й ярус (случай отсутствия контактных сопротивлений)

Параметр $t_{н}, ^\circ\text{C}$	Мощность P_2 , Вт/м^2	Поток Q_1 , Вт/м^2	Поток Q_{11} , Вт/м^2	Макс. температура, град.
16	78.97931080	38.97931120	40.0	79.23268285
20	117.5529208	57.55292142	60.0	114.9674242
24	156.1265308	76.12653161	80.0	150.7030918
28	194.7001408	94.70014182	100.0	186.4391352

Таблица 2

Распределение потоков тепла из НС для различных уровней подвода мощности во 2-й ярус (случай конечных контактных сопротивлений)

Параметр $t_{н}, ^\circ\text{C}$	Мощность P_2 , Вт/м^2	Поток Q_1 , Вт/м^2	Поток Q_{11} , Вт/м^2	Макс. температура, град.
16	79.15373532	39.15373534	40.0	97.21036202
20	117.9710991	57.97109912	60.0	141.9131463
24	156.7884629	76.78846294	80.0	186.6165610
28	195.6058266	95.60582670	100.0	231.3202306

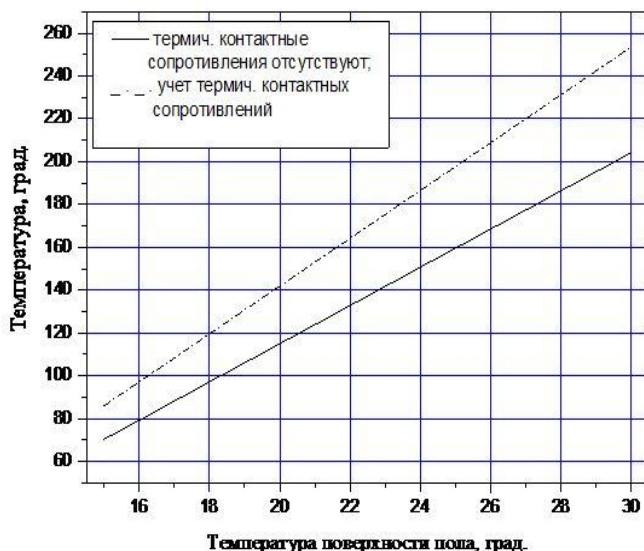


Рис. 3. Уровень максимального нагрева внутренних областей НС

4. Выводы

Как отмечалось в работе [1], игнорирование контактных термических сопротивлений в многослойных конструкциях может ухудшить адекватность описания математической моделью реальных тепловых процессов в подобластях неидеального теплового контакта и в целом составной конструкции на 30..50 %.

Решение задачи теплопередачи для многослойной нагревательной системы с учетом контактных термических сопротивлений в межслойных подобластях полностью подтвердил значительное влияние рассматриваемого фактора на уровень нагрева и температурные градиенты в системе. Результаты моделирования, представленные в данной статье, подтвердили научную и практическую необходимость повышения степени адекватности математических моделей для описания тепловых процессов в многослойных теплонагруженных конструкциях путем учета контактных термических сопротивлений.

Литература

1. Шлыков, Ю.П. Контактное термическое сопротивление [Текст] / Ю.П. Шлыков, Е.А. Ганин, С.Н. Царевский. – М.: Энергия, 1977. – 328 с.
2. Романченко, М.А. Енергозберігаючі електротехнології забезпечення стандартів теплового режиму виробничих споруд АПК з електрообігрівними підлогами [Текст] / М.А. Романченко, Д.І. Мазоренко, А.П. Слесаренко, О.С. Сорока // Електрифікація та автоматизація сільського господарства. – 2006, №2. – С. 82-92.
3. Слесаренко, А.П. Моделювання стаціонарної теплопередачі в 3-вимірній багатошаровій структурі з трубчастими нагрівачами для системи оптимального керування тепловими режимами приміщення [Текст] / А.П. Слесаренко, М.А. Романченко, О.С. Сорока // Автоматизированные системы управления и приборы автоматики. – ХНУРЭ, Харьков. – 2009, вып. 149. – С. 36-45.
4. Слесаренко, А.П. Электрообогреваемые полы в животноводческих помещениях [Текст] / А.П. Слесаренко, Н. А. Романченко // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – 2009. – 6/4 (42). – С. 4–10.
5. Мучник, Г.Ф. Методы теории теплообмена. Ч. 1. Теплопроводность [Текст] / Г.Ф. Мучник, И.Б. Рубашов. – М.: Высшая школа, 1970. – 288 с.