

ПОЛНОТА СИСТЕМ ЭКСПОНЕНТ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ НА ЛУЧЕ И ХАРАКТЕРИСТИКА КОРЕНБЛЮМА-СЕЙПА

Б.Н. ХАБИБУЛЛИН

Аннотация. Пусть $\{\lambda_k\}$ – последовательность точек в правой полуплоскости комплексной плоскости. В терминах характеристики Коренблюма-Сейпа, возникшей при описании распределения нулей функций из равномерных пространств Бергмана в единичном круге, даются достаточные условия полноты экспоненциальной системы $\{e^{-\lambda_k x}\}$ в пространстве функций на положительной полуоси, интегрируемых в p -ой степени со степенным весом.

Ключевые слова: положительная полуось, весовое пространство интегрируемых функций, экспоненциальная система, полнота, единичный круг, пространство Бергмана.

В статье приводятся некоторые достаточные условия полноты системы экспонент в весовых пространствах функций, интегрируемых со степенным весом на *положительной полуоси* $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ вещественной оси $\mathbb{R}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$. В основном мы используем сведения и придерживаемся терминологии, определений и соглашений из книг А.М. Седлецкого [1] – [4], его обзора в соавторстве [5], совместной монографии К. Жу, Б. Коренблюма, Х. Хеденмальма [6], а также нашего обзора по полноте экспоненциальных систем [7].

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ и $1 \leq p < +\infty$. Весовое нормированное пространство $L_\alpha^p := L_\alpha^p(\mathbb{R}_+)$ состоит из всех измеримых по мере Лебега на $\mathbb{R}_+$ функций f с почти всюду определенными значениями¹ в $\mathbb{C}$ и с конечной нормой

$$\|f\|_{p,\alpha} := \left(\int_{\mathbb{R}_+} |f(x)|^p x^\alpha dx \right)^{1/p}.$$

Легко показать, да и известно (см. [3], п. 9.4.1), что при $p > 1$ (топологически) сопряженное к L_α^p пространство (топологически) изоморфно пространству L_β^q с

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \text{т.е. } q := \frac{p}{p-1}, \quad \text{и } \beta := -\frac{\alpha q}{p} = \frac{\alpha}{1-p} \quad (1)$$

в том смысле, что действие (линейного непрерывного) функционала, отождествленного с функцией $g \in L_\beta^q$, на $f \in L_\alpha^p$ задается интегралом $\int_{\mathbb{R}_+} f(x)g(x) dx$. Его конечность и непрерывность относительно $f \in L_\alpha^p$ обеспечиваются неравенством Гельдера.

KNABIBULLIN B.N. COMPLETENESS OF EXPONENTIAL SYSTEMS IN SPACES OF FUNCTIONS ON A RAY AND THE KORENBLOUM-SEIP'S CHARACTERISTIC.

© ХАБИБУЛЛИН Б.Н. 2009.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 06-01-00067а, а также программы господдержки ведущих научных школ РФ, проект НШ-3081.2008.1.

Поступила 9 марта 2009 г.

¹Как обычно, почти всюду совпадающие функции отождествляются.

Нам потребуется и пространство $L_\beta^\infty := L_\beta^\infty(\mathbb{R}_+)$ с $\beta \in \mathbb{R}$, состоящее из измеримых на $\mathbb{R}_+$ функций g с конечной нормой

$$\|g\|_{\infty, \beta} := \sup \operatorname{ess} \{g(t)t^\beta : t \in \mathbb{R}_+\},$$

где операция $\sup \operatorname{ess}$ – *существенная верхняя грань* относительно меры Лебега на $\mathbb{R}$. Так, сопряженное к L_α^1 отождествляется с пространством L_β^∞ с $\beta = -\alpha$ и таким же действием функционала с функцией-представителем $g \in L_\beta^\infty$ на $f \in L_\alpha^1$ в виде интеграла, как и выше. Конечность и непрерывность здесь гарантируются уже элементарными оценками сверху модуля интеграла с “вынесением” за его знак величины $\|g\|_{\infty, \beta}$.

Пусть $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ – множество всех натуральных чисел, $\Lambda = \{\lambda_k\} \subset \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ – пустая, конечная или счетная последовательность точек (чисел) λ_k на (из) $\mathbb{C}$, порождающая *экспоненциальную систему* или *систему* (кратных) *экспонент*

$$\operatorname{Exp}_\Lambda := \{z^{n-1}e^{\lambda z} : \lambda \in \Lambda, 1 \leq n \leq \Lambda(\lambda), n \in \mathbb{N}\}, \quad z \in \mathbb{C},$$

где $\Lambda(\lambda)$ – число вхождений точки $\lambda \in \mathbb{C}$ в последовательность Λ .

Очевидно, что для каждого $p \in [1, +\infty)$ включение $\operatorname{Exp}_\Lambda \subset L_\alpha^p$ имеет место, если и только если для всех $\lambda_k \in \Lambda$ справедливо неравенство $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$. Система $\operatorname{Exp}_\Lambda$ *полна* в L_α^p , когда замыкание в L_α^p линейной оболочки системы $\operatorname{Exp}_\Lambda$ совпадает с L_α^p .

Приведем ряд известных достаточных условий полноты экспоненциальной системы $\operatorname{Exp}_{-\Lambda}$, $\Lambda \subset \mathbb{C}_+$, $-\Lambda := \{-\lambda_k\}$, в пространствах вида L_α^p . Далее $D(z, t)$ – *открытый круг радиуса* $t > 0$ с *центром* в точке $z \in \mathbb{C}$.

1. Полнота системы $\operatorname{Exp}_{-\Lambda}$ в L_0^2 эквивалентна условию (теорема Мюнтца-Саса)

$$\sum_k \frac{\operatorname{Re} \lambda_k}{1 + |\lambda_k|^2} = +\infty. \quad (2)$$

2. При $1 < p < +\infty$ и $-1 < \alpha \leq \min\{0, p-2\}$ условие (2) достаточно для полноты системы $\operatorname{Exp}_{-\Lambda}$ в L_α^p (см. [1] – [3], Теорема 9.6.3, [4]). Это же условие достаточно для полноты системы $\operatorname{Exp}_{-\Lambda}$ в L_α^p при любых $p \in [1, +\infty)$ и $\alpha \in (-1, +\infty)$, если для Λ выполнено дополнительное условие (см. [3], Теорема 9.4.6)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\inf_k |\lambda_k - iy|}{1 + y^2} dy < +\infty. \quad (3)$$

3. Пусть $1 \leq p < +\infty$ и $-1 < \alpha < +\infty$, а $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ – убывающая функция и $\int_{+\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt < +\infty$. Если

$$\sum_k \frac{\operatorname{Re} \lambda_k}{1 + |\lambda_k|^2} \varphi\left(-\log \frac{\operatorname{Re} \lambda_k}{1 + |\lambda_k|^2}\right) = +\infty,$$

то $\operatorname{Exp}_{-\Lambda}$ полна в L_α^p (см. [1], 8.3, Теорема 1, [3], 9.4).

4. Пусть $1 < p \leq 2$ и $p-2 < \alpha < +\infty$, а $\mathcal{N}_\Lambda(x)$ – число точек последовательности Λ в круге $D(x, \sqrt{x^2 - 1})$, $x > 1$. Если

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{N}_\Lambda(x)}{x \log x} > \frac{\alpha - (p-2)}{p},$$

то система $\operatorname{Exp}_{-\Lambda}$ полна в L_α^p (см. [1], 8.3, Теорема 8, [3], 9.5, Теорема 9.5.4).

5. Пусть $1 < p \leq 2$ и $p-2 < \alpha < +\infty$. Если при некотором $h > 1$

$$\limsup_{x \rightarrow +0} \frac{1}{-\log x} \sum_{x < \operatorname{Re} \lambda_k < hx} \frac{\operatorname{Re}(\lambda_k - x)}{1 + |\lambda_k - x|^2} > \frac{\alpha + 2 - p}{2p}$$

то система $\operatorname{Exp}_{-\Lambda}$ полна в L_α^p (см. [8], Теорема 3).

По-видимому, А.М. Седлецкий был первым, кто привлек *пространства Бергмана* $A^{-\gamma}$ в *круге* [6] для доказательства теорем о полноте экспоненциальных систем в L^p_α из пп. 3 – 5. Все эти результаты А.М. Седлецкого в том или ином смысле точны [1] – [5], [8]. В настоящей статье также используется описание нулей голоморфных функций из *равномерных* пространства Бергмана $\mathcal{A}^{-\gamma}$, для которых в этом направлении известны весьма точные и глубокие результаты (см. [6], гл. 4).

Через $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ обозначаем *правую полуплоскость* в $\mathbb{C}$. Для формулировки основного результата определим одну характеристику конечной последовательности точек S , лежащей на расширенной мнимой оси $i[-\infty, +\infty]$. Пусть $\{I_n\}$ – система дополнительных к этой последовательности интервалов на $i[-\infty, +\infty]$. Величину $|I_n|$ определим¹ как раствор угла, под которым виден интервал I_n из точки $1 \in \mathbb{C}$, деленный на π . Через нее определяется *характеристика Берлинга-Карлесона* последовательности S (относительно правой полуплоскости)

$$\widehat{\mathfrak{x}}(S) := \sum_n |I_n| \ln(1/|I_n|). \quad (4)$$

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}$ – последовательность точек в $\mathbb{C}_+$. С каждой точкой iy , $y \in [-\infty, +\infty]$, свяжем дугу $\mathfrak{r}_{iy} \in \mathbb{C}_+$ окружности с центром на мнимой оси, соединяющую точки 1 и iy . Очевидно, при $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ центр этой окружности – пересечение серединного перпендикуляра к отрезку $[1, iy]$ с мнимой осью $i\mathbb{R}$. В крайних же ситуациях $\mathfrak{r}_{i \cdot 0} = (0, 1]$, $\mathfrak{r}_{i \cdot (\pm\infty)} = [1, +\infty)$. Затем положим $\mathfrak{r}_S = \cup \{\mathfrak{r}_{iy} : iy \in S\}$ и

$$\Sigma(\Lambda, \mathfrak{r}_S) := \frac{1}{2} \sum_{\lambda_k \in \mathfrak{r}_S} \left(1 - \left|\frac{1 - \lambda_k}{1 + \lambda_k}\right|^2\right) = 2 \sum_{\lambda_k \in \mathfrak{r}_S} \frac{\operatorname{Re} \lambda_k}{|1 + \lambda_k|^2} \quad (5)$$

– *характеристика Коренблюма–Сейна* последовательности Λ относительно подмножества $S \subset i[-\infty, +\infty]$ (для правой полуплоскости).

Будет доказана

Теорема. Пусть $1 \leq p < +\infty$ и $-1 < \alpha < +\infty$. Если

$$\sup_S \left(\Sigma(\Lambda, \mathfrak{r}_S) - \frac{1 + \alpha}{p} \widehat{\mathfrak{x}}(S) - 2 \frac{1 + \alpha}{p} \log \widehat{\mathfrak{x}}(S) \right) = +\infty, \quad (6)$$

где $\sup$ берется по всем конечным подмножествам S расширенной мнимой оси, то система $\operatorname{Exp}_{-\Lambda}$ полна в L^p_α .

Случай $\alpha = 0$ был ранее схематично рассмотрен в нашем обзоре (см. [7], Пример 2.1.1).

Следствие. Пусть $1 \leq p < +\infty$ и $-1 < \alpha < +\infty$. Если

$$\limsup_{\widehat{\mathfrak{x}}(S) \rightarrow +\infty} \frac{1}{\widehat{\mathfrak{x}}(S)} \sum_{\lambda_k \in \mathfrak{r}_S} \frac{\operatorname{Re} \lambda_k}{1 + |\lambda_k|^2} > \frac{1 + \alpha}{2p}, \quad (7)$$

то система $\operatorname{Exp}_{-\Lambda}$ полна в L^p_α .

Доказательство Теоремы

Через $\operatorname{const.}$ обозначаем постоянные из $\mathbb{R}_+$. Будем исходить из известного факта (см. [3], Лемма 9.4.1) о том, что неполнота системы $\operatorname{Exp}_{-\Lambda}$ в L^p_α влечет за собой существование голоморфной в правой полуплоскости ненулевой функции F , обращающейся в нуль в каждой точке $\lambda \in \mathbb{C}_+$ с кратностью не ниже $\Lambda(\lambda)$, вида

$$G(z) := \int_0^{+\infty} e^{-zt} g(t) dt, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad g \in L^q_\beta, \quad (8)$$

¹Это гармоническая мера интервала I_n для $\mathbb{C}_+$ в точке 1 .

где (см. (1) и ниже)

$$q := \begin{cases} \frac{p-1}{p} & \text{при } p > 1, \\ \infty & \text{при } p = 1, \end{cases} \quad \beta := \begin{cases} \frac{\alpha}{1-p} & \text{при } p > 1, \\ -\alpha & \text{при } p = 1. \end{cases}$$

При $p > 1$ из представления (8) и неравенства Гельдера для всех $z \in \mathbb{C}_+$ получаем (см. [3], Доказательство теоремы 9.4.1) неравенство

$$|G(z)| \leq \|g\|_{q,\beta} \left(\int_0^\infty e^{-pt \operatorname{Re} z} t^\alpha dt \right)^{1/p} = \frac{\|g\|_{q,\beta}}{(\operatorname{Re} z)^{\frac{1+\alpha}{p}}} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha dx = \frac{\operatorname{const.}}{(\operatorname{Re} z)^{\frac{1+\alpha}{p}}}. \quad (9)$$

При $p = 1$ такое же неравенство с $q = \infty$ следует из элементарной оценки интеграла с “вынесением” $\|g\|_{\infty,\beta}$ из под модуля интеграла.

Замена $F(z) := G\left(\frac{1-z}{1+z}\right)$, $z \in \mathbb{D}$, определяет голоморфную в единичном круге $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ненулевую функцию F , которая обращается в нуль на последовательности точек $A = \{a_k\} \subset \mathbb{D}$ с кратностью не ниже $A(a)$ в каждой точке $a \in \mathbb{D}$, где $a_k := \frac{1-\lambda_k}{1+\lambda_k}$, а (9) дает

$$|F(z)| \leq \frac{\operatorname{const.}}{\left(\operatorname{Re} \frac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{1+\alpha}{p}}} = \frac{\operatorname{const.} |1+z|^{2\frac{1+\alpha}{p}}}{(1-|z|^2)^{\frac{1+\alpha}{p}}} \leq \operatorname{const.} (1-|z|^2)^{-\frac{1+\alpha}{p}}.$$

Иначе говоря, $\sup_{z \in \mathbb{D}} |F(z)|(1-|z|)^{(1+\alpha)/p} < +\infty$. Это означает, что функция F принадлежит классическому *равномерному пространству Бергмана*

$$\mathcal{A}^{-\gamma} := \{f \in \operatorname{Hol}(\mathbb{D}) : \|f\|_{-\gamma} := \sup_{z \in \mathbb{D}} (1-|z|)^\gamma |f(z)| < +\infty\}$$

при $\gamma = \frac{1+\alpha}{p}$ (см. [6], 4.3), где $\operatorname{Hol}(D)$ — пространство голоморфных в области $D \subset \mathbb{C}$ функций. Известны тонкие необходимые условия для (под)последовательностей нулей функций из таких пространств, полученные К. Сейпом (см. [9], Теорема 1), которые мы используем в модификации (см. [6], Теорема 4.24). Для конечной последовательности S точек на *единичной окружности* $\partial\mathbb{D}$ введем обозначение (для $\mathbb{D}$)

$$\mathfrak{r}_S := \{rz \in \mathbb{D} : 0 \leq r < 1, z \in S\}, \quad (10)$$

которое выше использовалось для правой полуплоскости (см. абзац перед (4)). Здесь уже через $|I_n|$ обозначим длины дополнительных к S дуг на $\partial\mathbb{D}$, деленные на 2π , а затем по правилу (4) определим характеристику Берлинга-Карлесона последовательности S (относительно $\mathbb{D}$).

Пусть $A = \{a_k\}$ — последовательность точек в $\mathbb{D}$. Характеристика Коренблюма-Сейпа последовательности A относительно конечной последовательности $S \in \partial\mathbb{D}$ (для единичного круга) определяется как

$$\Sigma(A, \mathfrak{r}_S) := \frac{1}{2} \sum_{a_k \in \mathfrak{r}_S} (1 - |a_k|^2).$$

Для любой подпоследовательности нулей $A = \{a_k\}$ ненулевой функции $F \in \mathcal{A}^{-\gamma}$ справедливо неравенство (см. [9], [6], Теорема 4.24)

$$\Sigma(A, \mathfrak{r}_S) \leq \frac{1}{p} \widehat{\kappa}(S) + \frac{2}{p} \log \widehat{\kappa}(S) + \operatorname{const.}, \quad (11)$$

где const. не зависит от выбора конечной последовательности $S \subset \partial\mathbb{D}$. После “пересадки” этого результата в правую полуплоскость посредством конформного дробно-линейного отображения $z \mapsto \frac{1-z}{1+z}$, $z \in \mathbb{D}$, левая часть (11) преобразуется в характеристику Коренблюма-Сейпа последовательности Λ для правой полуплоскости относительно последовательности, являющейся образом $S \subset \partial\mathbb{D}$ при нашем дробно-линейном отображении и по-прежнему обозначаемой той же буквой $S \subset i[-\infty, +\infty]$, т.е. совпадает с (5). При этом радиальные интервалы из (10) переходят в дуги окружностей $\mathbf{r}_{iy} \in \mathbb{C}_+$, проходящих через точки 1 (образ нуля) и $iy \in S \subset i[-\infty, +\infty]$ ортогонально мнимой оси в силу конформности дробно-линейного отображения и “хороших” границ круга и полуплоскости. Очевидно, центры этих окружностей лежат на мнимой оси. Таким образом, характеристика Берлинга-Карлесона конечной последовательности $S \subset \partial\mathbb{D}$ относительно $\mathbb{D}$ преобразуется в характеристику Берлинга-Карлесона ее образа на $i[-\infty, +\infty]$ из (4) относительно правой полуплоскости. Отсюда при условии неполноты системы $\text{Exp}_{-\Lambda}$ в пространстве L_α^p из (11) получаем

$$\Sigma(\Lambda, \mathbf{r}_S) \leq \gamma \widehat{\kappa}(S) + 2\gamma \log \widehat{\kappa}(S) + \text{const.},$$

где const. не зависит от конечного подмножества $S \subset i[-\infty, +\infty]$. Это противоположное к (6) неравенство и доказывает теорему.

Замечание 1. В отличие от условия расходимости ряда (2) условие полноты (6) уже тесно связано со значениями показателей p и α .

Замечание 2. Теорема содержательна лишь в двух случаях:

- 1) при $p = 1$ для любого $\alpha > -1$;
- 2) при $1 < p < +\infty$, но $\alpha > \min\{0, p - 2\}$.

Действительно, выполнение условия (6) обеспечивает по определению (5) расходимость ряда

$$\sum_k \frac{\text{Re } \lambda_k}{|1 + \lambda_k|^2},$$

вследствие чего неравенство

$$\frac{\text{Re } \lambda}{|1 + \lambda|^2} = \frac{\text{Re } \lambda}{1 + 2\text{Re } \lambda + |\lambda|^2} \leq \frac{\text{Re } \lambda}{1 + |\lambda|^2}, \quad \text{Re } \lambda \geq 0$$

влечет за собой выполнение условия расходимости ряда (2). А тогда уже “работает” утверждение 2 после (2). Из того же утверждения при выполнении условия Ладыгина (3) наша Теорема “проигрывает” условию (2) при всех $p \in [1, +\infty)$ и $\alpha \in (-1, +\infty)$.

Замечание 3. Возможны и другие версии характеристик Берлинга-Карлесона и Коренблюма-Сейпа, а как следствие, и иные формы Теоремы (см. [6], Теорема 4.25), [9], Теорема 1).

Доказательство Следствия Из условия полноты (6) Теремы и определения (5) характеристики Коренблюма-Сейпа следует, что условие

$$\limsup_{\widehat{\kappa}(S) \rightarrow +\infty} \frac{1}{\widehat{\kappa}(S)} \sum_{\lambda_k \in \mathbf{r}_S} \frac{\text{Re } \lambda_k}{|1 + \lambda_k|^2} > \frac{1 + \alpha}{2p} \quad (12)$$

достаточно для полноты экспоненциальной системы $\text{Exp}_{-\Lambda}$ в L_α^p в ограничениях Теоремы или Следствия. Случай существования предельной точки в $\mathbb{C}_+$ для последовательности Λ тривиален (система полна) и вписывается в условие (6), поскольку левая часть этого условия в такой ситуации равна $+\infty$. Поэтому далее предполагаем, что у последовательности Λ нет предельных точек в $\mathbb{C}_+$. Из условия полноты (12) следует, что для доказательства

Следствия достаточно установить следующий факт: при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ неравенство

$$\frac{1}{|1 + \lambda_k|^2} \geq \frac{1}{(1 + \varepsilon)(1 + |\lambda_k|^2)}$$

выполнено для всех номеров k , исключая, быть может, конечное число их. Другими словами, достаточно установить неравенство

$$(1 + \varepsilon)(1 + |\lambda|^2) \geq |1 + \lambda|^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}_+ \setminus K_\varepsilon, \quad (13)$$

где K_ε — некоторый компакт в $\mathbb{C}_+$. В полярной форме это неравенство приобретает вид

$$\varepsilon(1 + r^2) \geq 2r \cos \varphi, \quad \lambda = re^{i\varphi}, \quad r = |\lambda|, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

При $r < \varepsilon/2$ и $r > 2/\varepsilon$ справедливы, соответственно, неравенства

$$\varepsilon(1 + r^2) \geq \varepsilon \geq 2r \geq 2r \cos \varphi \quad \text{при } r \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

и

$$\varepsilon(1 + r^2) \geq \varepsilon r^2 \geq \frac{2}{\varepsilon} r = 2r \geq 2r \cos \varphi \quad \text{при } r \geq \frac{2}{\varepsilon}.$$

Кроме того, при $\cos \varphi < \varepsilon$ имеем

$$\varepsilon(1 + r^2) \geq \varepsilon \cdot 2r \geq 2r \cos \varphi.$$

Следовательно, в качестве компакта K_ε в (13) можно выбрать множество

$$K_\varepsilon := \{z = re^{i\varphi} : \frac{\varepsilon}{2} \leq r \leq \frac{2}{\varepsilon}, \quad \cos \varphi \geq \varepsilon\}$$

— компакт в $\mathbb{C}_+$.

Следствие доказано.

Замечание 4. Гораздо более сложный вопрос о необходимых условиях полноты системы Exp_Λ в L_α^p в терминах характеристик Берлинга-Карлесона и Коренблюма-Сейпа предполагается рассмотреть позже.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sedlitskii A.M. *Fourier transforms and approximation*. An Internat. Ser. Monogr. Math. Amsterdam: Gordon and Breach Science Publisher. 2000. 261 p.
2. Седлецкий А.М. *Аналитическое преобразование Фурье и экспоненциальные аппроксимации. I*. Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 5. М.: МАИ. 2003. 152 с.
3. Седлецкий А.М. *Аналитическое преобразование Фурье и экспоненциальные аппроксимации. II*. Современная математика. Фундаментальные направления. Т. 6. М.: МАИ. 2003. 162 с.
4. Седлецкий А.М. *Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации*. М.: Физматлит. 2005. 503 с.
5. Моисеев Е.И., Прудников А.П., Седлецкий А.М. *Базисность и полнота некоторых систем элементарных функций*. М.: Вычислительный центр РАН. 2004. 146 стр.
6. Hedenmalm H., Korenblum B., Zhu K. *Theory of Bergman spaces*. Graduate Texts in Mathematics. V. 199. N. Y.: Springer-Verlag. 2000. x+289 p.
7. Хабибуллин Б.Н. *Полнота систем экспонент и множества единственности*. Уфа: РИЦ БашГУ. 2006; издание второе, дополненное, 2008. xvi+172 с.
8. Седлецкий А.М. *Аппроксимация типа Мюнца-Саса в весовых пространствах L^p и нули функций классов Бергмана в полуплоскости* // Известия вузов. Математика. 2008. № 5. С. 92-100.
9. Seip K. *On Korenblum's density condition for the zero sequences of $A^{-\alpha}$* // J. d'Analyse Math. 1995. V. 67. P. 307-322.

Булат Нурмиевич Хабибуллин,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: Khabib-Bulat@mail.ru