Теорема 2. *Пусть $V \not\supseteq \mathsf{F}(L)$. Тогда для некоторой формулы $\Phi(z)$ языка L формула $\forall z\,(\Phi(z) \vee \neg\Phi(z))$ не является V-реализуемой.*

Доказательство. Условие $V \not\supseteq \mathsf{F}(L)$ означает, что для некоторого натурального числа n найдутся такие n-местная функция f и формула $\Phi_f(x_1, \ldots, x_n, y)$ языка L, что функция f определима в языке L формулой $\Phi_f(x_1, \ldots, x_n, y)$ и f не есть V-функция. Без ограничения общности можно считать, что формула $\Phi_f(x_1, \ldots, x_n, y)$ является негативной. Пусть c^{n+1} — примитивно-рекурсивная функция, взаимно однозначно кодирующая кортежи натуральных чисел длины $n+1$ натуральными числами, и $\mathsf{p}_1^{n+1}, \ldots, \mathsf{p}_{n+1}^{n+1}$ суть одноместные обратные функции, так что выполняются соотношения $\mathsf{p}_i^{n+1}(\mathsf{c}^{n+1}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})) = x_i$, причем эти обратные функции также примитивно-рекурсивны. Положим $\Phi(z) \rightleftharpoons \Phi_f(\mathsf{p}_1^{n+1}z, \ldots, \mathsf{p}_n^{n+1}z, \mathsf{p}_{n+1}^{n+1}z)$. Предположим, что формула $\forall z\,(\Phi(z) \vee \neg\Phi(z))$ является V-реализуемой. Тогда найдется такое натуральное число e, что для всех натуральных чисел k определено $\varphi_e^{V,\,2}(k, 0)$ и имеет место $\mathsf{p}_1\varphi_e^{V,\,2}(k, 0) = 0$ тогда и только тогда, когда формула $\Phi(k)$ является V-реализуемой. Из предложения 2 следует, что V-реализуемость формулы $\Phi(k)$ эквивалентна истинности формулы $\Phi(k)$ в интерпретации $\mathcal{N}_L$. Соотношение $\mathcal{N}_L \models \Phi(k)$ выполняется тогда и только тогда, когда $f(\mathsf{p}_1^{n+1}k, \ldots, \mathsf{p}_n^{n+1}k) = \mathsf{p}_{n+1}^{n+1}k$. Получаем, что для всех натуральных чисел k имеет место $\mathsf{p}_1\varphi_e^{V,\,2}(k, 0) = 0 \iff f(\mathsf{p}_1^{n+1}k, \ldots, \mathsf{p}_n^{n+1}k) = \mathsf{p}_{n+1}^{n+1}k$. Следовательно, выполняется соотношение $\mathsf{p}_1\varphi_e^{V,\,2}(\mathsf{c}^{n+1}(x_1, \ldots, x_n, y), 0) = 0 \iff f(x_1, \ldots, x_n) = y$. Таким образом,

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \mu y\,[\mathsf{p}_1\varphi_e^{V,\,2}(\mathsf{c}^{n+1}(x_1, \ldots, x_n, y), 0) = 0].$$

Из свойств C1, C3, C4, C5 следует, что f — V-функция. Полученное противоречие показывает, что формула $\forall z\,(\Phi(z) \vee \neg\Phi(z))$ не является V-реализуемой. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коновалов А.Ю., Плиско В.Е.* О гиперарифметической реализуемости // Матем. заметки. 2015. **98**, № 5. 725–746.
2. *Коновалов А.Ю.* Арифметическая реализуемость и базисная логика // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2016. № 1. 52–56.
3. *Salehi S.* Provably total functions of basic arithmetic // Math. Log. Quart. 2003. **49**, N 3. 316–322.
4. *Клини С.К.* Введение в метаматематику. М.: ИЛ, 1957.

Поступила в редакцию
04.07.2018

УДК 519.718.7

МИНИМАЛЬНЫЕ ПОЛНЫЕ ПРОВЕРЯЮЩИЕ ТЕСТЫ ДЛЯ СХЕМ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В СТАНДАРТНОМ БАЗИСЕ

К. А. Попков[1]

Для любой булевой функции найдено точное значение минимально возможной длины полного проверяющего теста для реализующих ее схем из функциональных элементов в базисе “конъюнкция, дизъюнкция, отрицание” при однотипных константных неисправностях на выходах элементов.

Ключевые слова: схема из функциональных элементов, однотипная константная неисправность, полный проверяющий тест.

For each Boolean function we find the exact value of the minimal possible length of a complete fault detection test for logic networks implementing this function in the basis “conjunction, disjunction, negation” under one-type stuck-at faults at outputs of gates.

Key words: logic network, one-type stuck-at fault, complete fault detection test.

Введение. В работе рассматривается задача синтеза легкотестируемых схем из функциональных элементов (СФЭ), реализующих заданные булевы функции (см. [1–3]). Пусть имеется СФЭ S с

[1] *Попков Кирилл Андреевич* — канд. физ.-мат. наук, науч. сотр. ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, e-mail: kirill-formulist@mail.ru.

одним выходом, реализующая булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, где $\tilde{x}^n = (x_1, \ldots, x_n)$. Предположим, что в схеме S могут происходить *однотипные константные неисправности типа p на выходах элементов*, при которых значение на выходе любого неисправного элемента становится равно заданной булевой константе p; число неисправных элементов в схеме предполагается произвольным. В результате схема S вместо исходной функции $f(\tilde{x}^n)$ будет реализовывать какие-то, вообще говоря, отличные от нее булевы функции, называемые *функциями неисправности* данной схемы.

Будем рассматривать только СФЭ в стандартном базисе $\{\&, \vee, \neg\}$. *Полным проверяющим тестом* (ППТ) для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что для любой отличной от $f(\tilde{x}^n)$ функции неисправности $g(\tilde{x}^n)$ схемы S в T найдется набор $\tilde{\sigma}$, на котором $f(\tilde{\sigma}) \neq g(\tilde{\sigma})$. Введем следующие обозначения: $D(T)$ — длина теста T; $D(S) = \min D(T)$, где минимум берется по всем ППТ T для схемы S; $D(f) = \min D(S)$, где минимум берется по всем схемам S в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$, реализующим функцию f; $D(n) = \max D(f)$, где максимум берется по всем булевым функциям f от n переменных. Функция $D(n)$ называется *функцией Шеннона* длины ППТ.

Для удобства под буквой D будем ставить символ 1 или 0 в случаях, когда в схемах допускаются однотипные константные неисправности типа 1 или типа 0 на выходах элементов соответственно. Н. П. Редькин в [4] получил оценки $D_1(n) \leqslant n$ и $D_0(n) \leqslant n$ при $n \geqslant 1$; впоследствии эти оценки были улучшены Ю. В. Бородиной [5], которая установила, что $D_1(n) = D_0(n) = 2$ при $n \geqslant 2$.

В настоящей работе найдены точные значения величин $D_1(f)$ и $D_0(f)$ для любой булевой функции f.

Формулировка и доказательство основного результата. Рассмотрим однотипные константные неисправности типа 1 на выходах элементов. Любой функциональный элемент, реализующий функцию вида $x\&y$ (вида $x \vee y$, $\overline{x}$), будем называть *конъюнктором* (соответственно *дизъюнктором*, *инвертором*).

Сформулируем утверждение, вытекающее из доказательства теоремы 1 работы [5].

Лемма. *Пусть неконстантная булева функция $f(\tilde{x}^n)$, равная ей тупиковая дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) F и число $k \in \{0, \ldots, n\}$ таковы, что выполнены следующие условия:*

1) $f(\underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{m}) = 0$, *где* $m = n - k$;

2) $f(\tilde{\tau}) = 1$ *для любого набора $\tilde{\tau}$ длины n, последние m компонент и хотя бы одна из первых k компонент которого равны* 1;

3) *в случае $k \geqslant 1$ в форму F не входят отрицания переменных $x_1, \ldots, x_k$.*

Тогда функцию f можно реализовать СФЭ, допускающей ППТ длины 1.

(Определение тупиковой ДНФ можно найти, например, в [6, с. 301].)

Выделим возможное представление функции $f(\tilde{x}^n)$:

$$f(\tilde{x}^n) = x_i \text{ или } 1, \tag{1}$$

где $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Булева функция $f(\tilde{x}^n)$ называется *монотонной по переменной* x_i, где $n \geqslant 1$ и $i \in \{1, \ldots, n\}$, если для любых булевых констант $\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n$ справедливо неравенство $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, 0, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n) \leqslant f(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, 1, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n)$.

Через m_f будем обозначать число переменных, по которым функция $f(\tilde{x}^n)$ монотонна, а через $\tilde{\sigma}_f$ двоичный набор длины n, i-я компонента которого равна 0 тогда и только тогда, когда данная функция монотонна по переменной x_i $(i = 1, \ldots, n)$.

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема. *Справедливо равенство*

$$D_1(f) = \begin{cases} 0, & \text{если функция } f \text{ представима в виде (1);} \\ 2, & \text{если } \mathrm{m}_f \leqslant n-2 \text{ и } f(\tilde{\sigma}_f) = 1; \\ 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. Пусть функция f представима в виде (1). Если $f = x_i$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, n\}$, то функцию f, очевидно, можно реализовать СФЭ, не содержащей функциональных элементов; у такой схемы нет ни одной функции неисправности, поэтому в качестве ППТ для нее можно взять пустое множество, откуда следует равенство $D_1(f) = 0$. Если $f \equiv 1$, то такое же равенство доказано в [3, с. 149].

Далее будем считать, что функция f непредставима в виде (1). Выход любой схемы, реализующей эту функцию, не может совпадать ни с одним из ее входов, поэтому он является выходом некоторого функционального элемента. Тогда при неисправности данного элемента схема будет реализовывать константу 1, отличную от функции f. Указанные две функции необходимо различать хотя бы на одном наборе, откуда следует, что $D_1(f) \geqslant 1$.

Пусть $\mathrm{m}_f \leqslant n-2$ и $f(\tilde{\sigma}_f) = 1$. Из [5, теорема 2] следует неравенство $D_1(f) \leqslant 2$. Докажем, что $D_1(f) \geqslant 2$. Без ограничения общности

$$\tilde{\sigma}_f = (\underbrace{0,\ldots,0}_{\mathrm{m}_f},\underbrace{1,\ldots,1}_{n-\mathrm{m}_f}). \tag{2}$$

Предположим, что существует СФЭ S, реализующая функцию f и допускающая ППТ, состоящий из какого-то одного набора $\tilde{\sigma}$. По аналогии с [5, теорема 3] удалим из схемы S все избыточные элементы, если они есть, и получим схему S'. В схеме S' содержится хотя бы один инвертор, так как в противном случае все ее элементы реализовывали бы монотонные функции и функция f, возникающая на выходе схемы S', также была бы монотонной, а значит, монотонной по каждой переменной, что противоречит неравенству $\mathrm{m}_f \leqslant n-2$. Далее, рассуждая аналогично второму абзацу доказательства теоремы 3 из [5], получаем, что входы инверторов могут соединяться только со входами схемы S', данная схема должна содержать хотя бы по одному инвертору после входа каждой из переменных $x_{\mathrm{m}_f+1},\ldots,x_n$, а сами эти инверторы неизбыточны для схемы S.

Если i-я компонента набора $\tilde{\sigma}$ равна 0 для некоторого $i \in \{\mathrm{m}_f+1,\ldots,n\}$, то на этом наборе на выходе того из инверторов, на вход которого подается переменная x_i, возникнет значение 1 и неисправность указанного инвертора нельзя будет обнаружить на данном наборе, но это противоречит тому, что $\{\tilde{\sigma}\}$ — ППТ для схемы S. Значит, последние $n-\mathrm{m}_f$ компонент набора $\tilde{\sigma}$ равны 1. Отсюда, из формулы (2), равенства $f(\tilde{\sigma}_f)=1$ и монотонности функции f по первым m_f переменным вытекает, что $f(\tilde{\sigma})=1$, а тогда неисправность выходного элемента схемы S нельзя обнаружить на наборе $\tilde{\sigma}$. Полученное противоречие означает, что $D_1(f) \geqslant 2$, следовательно, $D_1(f)=2$.

Пусть теперь либо $\mathrm{m}_f \geqslant n-1$, либо $f(\tilde{\sigma}_f)=0$. Докажем, что $D_1(f) \leqslant 1$; тогда с учетом доказанного неравенства $D_1(f) \geqslant 1$ будет иметь место равенство $D_1(f)=1$. Без ограничения общности выполнено (2). Рассмотрим три случая.

1. Пусть $f(\tilde{\sigma}_f)=1$ и $\mathrm{m}_f = n$. Тогда $\tilde{\sigma}_f = (\underbrace{0,\ldots,0}_{n})$ и функция $f(\tilde{x}^n)$ монотонна по всем переменным, откуда следует, что $f(\tilde{\pi}) \geqslant f(\tilde{\sigma}_f) = 1$ для любого набора $\tilde{\pi}$ длины n, поэтому $f \equiv 1$, т.е. функция f представима в виде (1). Противоречие.

2. Пусть $f(\tilde{\sigma}_f)=1$ и $\mathrm{m}_f = n-1$. Тогда $\tilde{\sigma}_f = (\underbrace{0,\ldots,0}_{n-1},1)$ и функция $f(\tilde{x}^n)$ монотонна по переменным $x_1,\ldots,x_{n-1}$, откуда следует, что $f(\tilde{\pi}) \geqslant f(\tilde{\sigma}_f) = 1$ для любого набора $\tilde{\pi}$ длины n, последняя компонента которого равна 1. Однако это противоречит тому, что функция $f(\tilde{x}^n)$ не является монотонной по переменной x_n.

3. Пусть $f(\tilde{\sigma}_f)=0$. Если $f \equiv 0$, то $D_1(f) \leqslant 1$ (см. [3, с. 149]). Далее считаем, что $f \not\equiv 0$. Среди всех двоичных наборов длины n, последние $n-\mathrm{m}_f$ компонент которых равны единице и на которых функция f принимает значение 0, выберем произвольный набор $\tilde{\sigma}$ с наибольшим числом единичных компонент (отметим, что набор $\tilde{\sigma}_f$ удовлетворяет обоим перечисленным выше условиям). Без ограничения общности $\tilde{\sigma} = (\underbrace{0,\ldots,0}_{k},\underbrace{1,\ldots,1}_{m})$, где $k \leqslant \mathrm{m}_f$. Пусть F — произвольная тупиковая ДНФ функции $f(\tilde{x}^n)$. Из монотонности данной функции по переменным $x_1,\ldots,x_k$ при $k \geqslant 1$ несложно получить, что в F не могут входить отрицания этих переменных. Тогда выполнены условия 1–3 леммы, из которой следует неравенство $D_1(f) \leqslant 1$. Теорема доказана.

Используя теорему и принцип двойственности (см., например, [6, с. 24]), а именно рассматривая схемы, получающиеся заменой всех элементов в схемах из доказательства теоремы на двойственные, нетрудно получить двойственный ей результат для случая $p=0$, т.е. описание всех булевых функций f, для которых $D_0(f)=0$, $D_0(f)=1$ и $D_0(f)=2$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18–01–00337 “Проблемы синтеза, сложности и надежности в теории управляющих систем”).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Яблонский С.В.* Надежность и контроль управляющих систем // Мат-лы Всесоюз. семинара по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 31 января–2 февраля 1984 г.). М.: Изд-во МГУ, 1986. 7–12.

2. *Яблонский С.В.* Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. М.: Наука, 1988. 5–25.
3. *Редькин Н.П.* Надежность и диагностика схем. М.: Изд-во МГУ, 1992.
4. *Редькин Н.П.* О схемах, допускающих короткие тесты // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1988. № 2. 17–21.
5. *Бородина Ю.В.* О синтезе легкотестируемых схем в случае однотипных константных неисправностей на выходах элементов // Вестн. Моск. ун-та. Вычисл. матем. и киберн. 2008. № 1. 40–44.
6. *Яблонский С.В.* Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.

Поступила в редакцию
03.08.2018

УДК 519.95

КОНТИНУАЛЬНОСТЬ ЧИСЛА ЗАМКНУТЫХ НАДКЛАССОВ НЕКОТОРЫХ МИНИМАЛЬНЫХ КЛАССОВ В ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННОМ МНОЖЕСТВЕ $\mathcal{L}_2^3$

А. В. Макаров[1], **В. В. Макаров**[2]

Доказана континульность числа надклассов некоторых минимальных классов в частично упорядоченном множестве $\mathcal{L}_2^3$ всех замкнутых классов трехзначной логики, которые можно гомоморфно отобразить на двузначную логику.

Ключевые слова: трехзначная логика, замкнутый класс, частично упорядоченное множество, гомоморфизм, минимальный класс.

It is proved that the set of closed classes containing some minimal classes in the partially ordered set $\mathcal{L}_2^3$ of closed classes in the three-valued logic that can be homomorphically mapped onto the two-valued logic has continuum cardinality.

Key words: three-valued logic, closed class, partially ordered set, homomorphism, minimal class.

Все необходимые определения можно найти во введении к статье [1]. В [1] также доказано, что в частично упорядоченном множестве (далее ч.у.м.) $\mathcal{L}_2^3$ всех тех замкнутых классов трехзначной логики $\mathfrak{P}_3$, которые можно отобразить на двузначную логику $\mathfrak{P}_2$, существует лишь конечное число минимальных элементов, каждый из которых имеет базис из одной функции двух переменных. В работе [2] описаны все минимальные классы в ч.у.м. $\mathcal{L}_2^3$. Их оказалось 15.

В статье [3] доказана счетность числа замкнутых надклассов ряда минимальных классов в частично упорядоченном множестве $\mathcal{L}_2^3$.

В настоящей работе доказана следующая теорема.

Теорема. *Мощность множества замкнутых классов, содержащих любой из трех минимальных классов, континуальна. Один из этих трех классов порожден следующей функцией:*

$$\psi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1\,0\,2 \\ 0\,0\,2 \\ 2\,2\,2 \end{pmatrix}.$$

Остальные два класса получаются изоморфными отображениями этого класса, порождаемыми перестановками циклической группы $\mathbf{A_3}$ *третьего порядка, порождаемой перестановкой* $\begin{pmatrix} 0\,1\,2 \\ 1\,2\,0 \end{pmatrix}$.

[1] *Макаров Алексей Владимирович* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. математического анализа мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: vvmavmmakarov@yandex.ru.

[2] *Макаров Владимир Владимирович* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. аппаратного, программного и математического обеспечения вычислительных систем Ин-та комплексной безопасности и специального приборостроения Рос. технол. ун-та, e-mail: vvmavmmakarov@yandex.ru.