Труды Карельского научного центра РАН
№ 7. 2019. С. 70–77
DOI: 10.17076/mat976

УДК 519.115:519.2

КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ СХЕМЫ РАЗМЕЩЕНИЯ РАЗЛИЧИМЫХ ЧАСТИЦ ПО НЕРАЗЛИЧИМЫМ ЯЧЕЙКАМ С ЗАДАННЫМ ЧИСЛОМ НЕПУСТЫХ ЯЧЕЕК

Н. Ю. Энатская

*Московский институт электроники и математики,
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Россия*

Изучается схема размещения r различимых частиц по n неразличимым ячейкам с k непустыми ячейками по направлениям перечислительной комбинаторики. Это – перечисление исходов схемы с определенной дисциплиной их нумерации, нахождение их числа, установление взаимно-однозначного соответствия видов исходов с их номерами, называемое задачей нумерации в прямой и обратной постановках, и моделирование исходов схемы.

Ключевые слова: минимальные номера частиц в ячейках; порционные добавления.

N. Yu. Enatskaya. COMBINATORIAL ANALYSIS IN THE SCHEME OF ALLOCATION OF DISTINGUISHABLE PARTICLES INTO INDISTINGUISHABLE CELLS WITH A GIVEN NUMBER OF NON-EMPTY CELLS

The scheme of allocating r distinguishable particles into n indistinguishable cells with k non-empty cells is studied along the directions of enumerative combinatorics. They are the direct enumeration of the outcomes of the scheme with a particular discipline of their numbering, finding their numbers, establishing a one-to-one correspondence of the types of outcomes with their numbers, also known as numbering problem in direct and inverse statements, and modeling of outcomes of the scheme.

Keywords: minimum numbers of particles on cells; portion additions.

Введение

Представляемую схему можно интерпретировать как размещение r различимых частиц по k неразличимым ячейкам без пустых ячеек (аналогичная схема без ограничений изучалась в [3]) или как разбиение множества r различимых элементов на $k \leqslant n$ подмножеств, соответствующих k непустым ячейкам исходной схемы, где $k = \overline{1, min\ (n, r)}$. Числа исходов нашей схемы при каждом k есть числа Стирлинга второго рода $S_2(k, n)$. Производящая функция числа таких разбиений приведена Эйлером, а пентагональная теорема Эйлера позволяет вычислять числа разбиений при помощи деления формальных степенных рядов. Харди и Рамануджан получили асимптотическую формулу для функции разбиений множества.

В фундаментальном труде Дж. Эндрюса «Теория разбиений» (см. [9]) объектом исследования является разбиение натурального

числа, т. е. его представление в виде суммы неубывающих натуральных чисел, множество разбиений которого взаимно однозначно соответствует множеству разбиений множества неразличимых элементов, что не совпадает с рассматриваемой в нашей статье схемой.

Здесь же кратко упоминается задача о разбиении множества с различимыми элементами. При обсуждении вычислительных аспектов нахождения разбиений идеи приведенных алгоритмов состоят в применении производящих функций, ускоряющих получение результатов об исходах, установлении лексикографического порядка нумерации исходов перечисления, их представлении в виде различных диаграмм и вычисления таблиц для функций разбиения, использования техники Мак-Магона с доработкой Кнута, устанавливающей взаимно-однозначное соответствие перечисления разбиений с некоторыми топологическими последовательностями, нахождение которых легче, чем всех исходов схемы.

В книге T. Mansour «Combinatorics of Set Partitions» [1] представлена реперспектива методов разбиения множеств, в том числе метод производящих функций, метод ядра, метод декомпозиции, метод генерации дерева, вычисление таблиц функций разбиения.

В статье М. Орлова [2] обсуждается алгоритмическая итерационная процедура перечисления исходов в схеме разбиений в предложенной автором форме и порядке их записи, а под итерациями понимаются шаги алгоритма пересчета от данного итогового исхода схемы к соседним: предыдущему и последующему.

На основании просмотренной литературы по близкой тематике замечаем, что предлагаемый алгоритмический подход не совпадает с ранее применяемыми в подобной ситуации. Его новизна в доасимптотической области изменения параметров схемы состоит в новом подходе к решению задач перечислительной комбинаторики, на основе которого введены новые направления исследований, дающих новые возможности использования результатов анализа комбинаторных схем. Суть этого подхода прежде всего состоит в том, что он опирается на процедуру прямого перечисления нумерованных исходов итерационного случайного процесса поединичного последовательного добавления элементов в схеме до заданного числа.

Новизна работы – в выборе базового перечислительного подхода к анализу схемы, направлений, методов, результатов и возможностей их использования для дальнейших исследований:

а) компактного хранения информации об исходах схемы при аналитическом решении прямой задачи нумерации (нахождении вида исхода по его номеру);

б) быстрого моделирования исходов схемы путем разыгрывания его номера по аналитическому результату прямой задачи нумерации;

в) введения и учета дополнительных ограничений в схеме;

г) получения вероятностного распределения исходов схемы для решения вероятностных задач.

1. Прямое перечисление и число исходов схемы A

Схемой A будем называть исследуемую схему.

В соответствии со схемой разные виды ее исходов определяются наборами их составов без учета порядка этих наборов. Поэтому для удобства сравнения исходов договоримся составы непустых перечислять в порядке роста минимальных номеров частиц в них, а пустые ставить в конец. Наборы номеров частиц в ячейках будем перечислять в порядке их возрастания.

Задача перечисления исходов схемы сводится к перечислению всех способов деления r различимых элементов (частиц) на k непустых частей (ячеек) без учета их порядка.

Бесповторность деления всех элементов на k частей достигается введением условия фиксации всех возможных наборов $\{T_j\}$ минимальных номеров элементов в них. (Для краткости будем называть частицы с минимальными номерами в k частях деления n элементов минимальными элементами). При установленном порядке перечисления элемент 1 всегда будет минимальным в первой части. Поэтому число фиксаций минимальных элементов в других частях деления по схеме сочетаний есть C_{r-1}^{k-1}. Остальные элементы будем добавлять в k частей так, чтобы сохранить в них минимальность фиксированных ранее номеров, что достигается путем их определенного порционного добавления в поединично растущие группы частей, начиная с первой. Объясним это на примере j-й фиксации минимальных элементов в частях $(j = \overline{1, C_r^k})$ в виде $M_j = (r_1, \ldots, r_k)$, где $r_1 = 1,\ j = \overline{1, C_r^k}$. Далее будем добавлять в части всеми способами остальные $(r - k)$ элементов с заданными минимальными. Составы частей будем разделять запятыми и перечислять номера входящих в них элементов в возрастающем порядке (а весь исход схемы будем заключать в круглые скобки). Тогда в первой части кроме 1 обязательно

есть номера элементов, меньших r_2, число таких элементов $w_1 = (r_2 - r_1 - 1) = (r_2 - 2)$; в первых двух частях кроме выбранных элементов с номерами 1 и r_2 обязательно должны быть все элементы с номерами, меньшими r_3, число таких элементов $w_2 = (r_3 - r_2 - 1)$; в первых трех частях обязательно должны быть все элементы с номерами, меньшими r_4, число таких элементов $w_3 = (r_4 - r_3 - 1)$ и т. д. до $(k-1)$-й части включительно; в k частях обязательно должны быть все элементы с номерами, меньшими r, число таких элементов $w_k = (r - r_k)$. Таким образом, т. к. k минимальных элементов было размещено в частях предварительно, будем порционно в указанных выше их количествах размещать суммарное число $(r-k)$ элементов соответственно по одной, двум и т. д. до k указанным выше частям. Проверяем, что сумма порционных добавлений частиц совпадает с $(r-k)$:

$$r_2 - 1 - 1 + r_2 - n_1 - 1 + r_3 - r_2 - 1 + \ldots + \\ + r_k - r_{k-1} - 1 + r - r_k = r - k. \quad (1)$$

Будем представлять все порционные добавления в виде k-компонентных векторов соответствующих добавлений элементов в k частей, перечисление всех вариантов которых производится по схеме размещений с повторением, а итоговые векторы добавлений во все части к фиксированным минимальными элементам в них получаются покомпонентным объединением векторов порционных добавлений в части. Вектор размеров указанных порционных добавлений $\bar{W}_j = (w_1, \ldots, w_k)$ при каждой j-й фиксации минимальных элементов в частях получается покомпонентным сложением количеств всех порционных добавлений в них.

Число N_j исходов формирования k частей при j-й фиксации минимальных элементов в них вычисляется из процедуры их перечисления по формуле

$$N_j = \prod_{i=1}^{k} i^{w_i}. \quad (1)$$

В исходе схемы A_j^* – формирования k непустых частей при фиксированном наборе M_j минимальных номеров элементов в частях к каждому набору вектора добавлений в части добавляются соответствующие минимальные элементы из M_j.

Тогда все N исходов схемы A будут получаться путем объединения всех исходов всех C_{r-1}^{k-1} схем A_j^* с добавлением в конце $(n-k)$ нулей, соответствующих пустым ячейкам, а число N исходов схемы A будем получать по формуле

$$N = \sum_{\{(C)\}} N_j, \quad (2)$$

где суммирование производится по перечислению всех исходов схемы сочетаний фиксаций минимальных элементов в k частях деления r элементов (номеров частиц).

Для перечисления всех исходов схемы A_j^* методом графов будем строить процесс последовательного поединичного равновероятного добавления элементов с растущими номерами в указанные выше группы частей с начальным заполнением по одному минимальному в них. Исходы заполнения частей на каждом шаге будем нумеровать в порядке добавления элементов в части с растущими минимальными элементами (номерами).

Поясним процесс перечисления и вычисления числа исходов схемы A_j^* на примере.

Пример 1. Пусть $r = 8,\ k = 4,\ M_j = (1, 3, 6, 8)$.

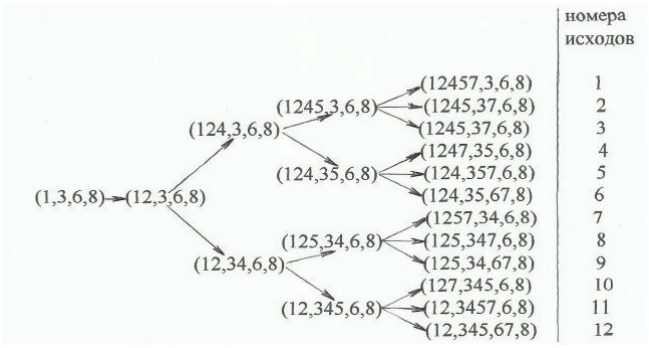

Рис. 1. Граф перечисления фрагмента исходов схемы примера 1
Fig. 1. The graph of enumeration of a fragment of the outcomes of the scheme in example 1

Визуально имеем $N_j = 12$ исходов, что совпадает с результатом по (1): $N_j = 1 \cdot 2^2 \cdot 3^1 = 12$.

Приведем пример перечисления всех N исходов схемы A методом графов со сравнением их числа по формуле (2) с использованием формулы (1).

Пример 2. Пусть $n = 2,\ r = 4,\ k = 2$. Перечислим все пары минимальных элементов в частях по схеме сочетаний в количестве $C_3^1 = 3$ – это: $T_1 = (1, 2),\ T_2 = (1, 3),\ T_3 = (1, 4)$, откуда $W_1 = (0, 2),\ W_2 = (1, 1),\ W_3 = (2, 0)$. Для каждой пары построим граф поединичных допустимых порционных добавлений остальных элементов, как в примере 1.

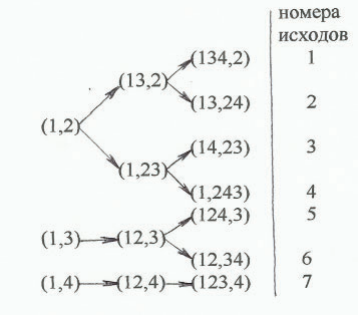

Рис. 2. Граф перечисления исходов схемы примера 2
Fig. 2. The graph of enumeration of the outcomes of the scheme in example 2

Визуально имеем $N = 7$ исходов схемы A, а по формулам (1) и (2) $N = 1^0 2^2 + 1^1 2^1 + 1^2 2^0 = 7$, т. е. результаты совпадают.

2. Задача нумерации (ЗН)

2.1. Пучковая структура графа перечисления исходов схемы

Изучаемая схема A представляет собой обобщенную схему последовательных действий (ПД) схемы сочетаний (фиксации минимальных элементов – минимальных номеров частиц в k непустых ячейках) и схем размещений с повторением (определенных выше порционных добавлений в k ячеек с фиксированными минимальными элементами), зависящих от исходов схемы сочетаний. ЗН для обобщенной схемы ПД решена в [4] при известных результатах всех составляющих ее схем. ЗН для схемы сочетаний решена в [5], а для ее решения в объединенной схеме, состоящей из описанных ранее схем размещений с повторением, зависящих от исходов схемы сочетаний фиксации минимальных элементов в заданном числе k непустых ячеек, требуется информация о пучковой структуре графа перечисления ее исходов, т. е. о последовательностях размеров пучков в порядке перечисления исходов схемы на каждом шаге. Будем собирать ее по фрагментам пучковой структуры графа перечисления исходов схемы A при каждом j-м наборе минимальных элементов в k ячейках с известным вектором $W_j = (w_1, \ldots, w_k)$ из логики перечисления и порядка нумерации ее исходов по следующему ПРАВИЛУ – (*): **первая ненулевая компонента** w_i, $i = \overline{1,k}$ **вектора** W_j **означает группу последовательных пучков, начинающихся с пучка размера** i **на** w_i **шагов того же размера** i. Теперь, объединяя такую информацию по всем фрагментам нашей схемы по шагам перечисления, получаем полную картину пошаговой пучковой структуры графа перечисления исходов схемы.

Приведем поясняющие примеры определения пучковой структуры графа перечисления исходов схемы.

Пример 3. Пусть $r = 5$, $n = k = 2$. Очевидно, $T_1 = (1,2)$; $T_2 = (1,3)$; $T_3 = (1,4)$; $T_4 = (1,5)$. Отсюда следует, что $W_1 = (0,3)$; $W_2 = (1,2)$; $W_3 = (2,1)$; $W_4 = (3,0)$. Тогда по (*) последовательно пофрагментно получаем следующие пошаговые пучковые структуры $((2)(2,2)(2,2,2))$; $((1)(2)(2,2))$; $((1)(11)(2))$; $((1)(1)(1))$. Собирая их теперь по шагам, имеем следующие пошаговые пучковые структуры графа перечисления всех исходов схемы A: 1-й шаг – $(2,1,1,1)$; 2-й шаг – $(2,2,2,1,1)$; 3-й шаг – $(2,2,2,2,2,2,2,1)$. По пучковой структуре последнего шага, суммируя размеры пучков, получаем число исходов схемы $N = 7 \cdot 2 + 1 = 15$. Все полученные здесь результаты можно проверить визуально по графу перечисления исходов схемы.

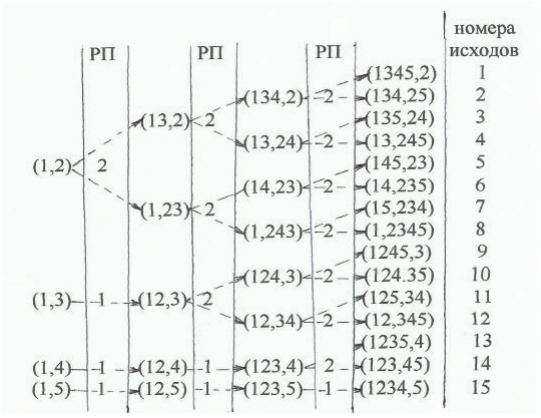

Рис. 3. Граф перечисления исходов схемы и размеров пучков (РП) примера 3
Fig. 3. The graph of enumeration of the outcomes of the scheme and sizes of bunches (SB) in example 3

(Под шагом понимается добавление одного элемента – частицы в схему.)

Пример 4. Пусть $r = 5$, $n = k = 3$. Очевидно, $T_1 = (1,2,3)$; $T_2 = (1,2,4)$; $T_3 = (1,2,5)$; $T_4 = (1,3,4)$; $T_5 = (1,3,5)$; $T_6 = (1,4,5)$. Отсюда следует, что $W_1 = (0,0,2)$; $W_2 = (0,1,1)$; $W_3 = (0,2,0)$; $W_4 = (1,0,1)$; $W_5 = (1,1,0)$; $W_6 = (2,0,0)$. Тогда по (*) последовательно пофрагментно получаем следующие пошаговые пучковые структуры $((3)(333))$; $((2)(33))$; $((2)(22))$; $((1)(3))$; $((1)(2))$; $((1)(1))$. Собирая их теперь по шагам, имеем следующие пошаговые пучковые струк-

туры графа перечисления всех исходов схемы A: 1-й шаг – $(3,2,2,1,1)$; 2-й шаг – $(3,3,3,3,3,2,2,3,2,1)$. По пучковой структуре последнего шага, суммируя размеры пучков, получаем число исходов схемы $N = 6 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 = 25$. Все полученные здесь результаты можно проверить визуально по графу перечисления исходов схемы.

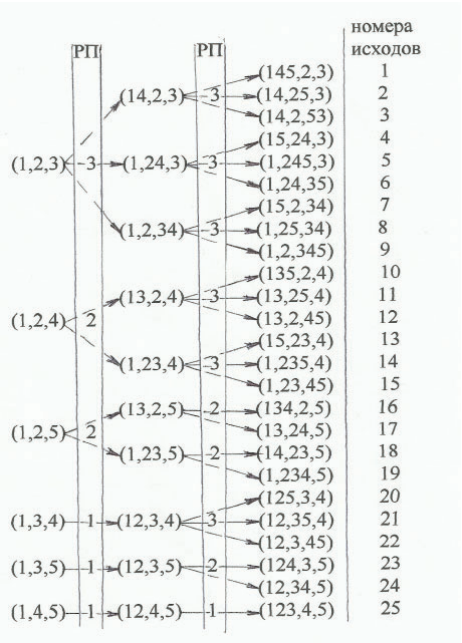

Рис. 4. Граф перечисления исходов схемы и размеров пучков (РП) примера 3
Fig. 4. The graph of enumeration of the outcomes of the scheme and sizes of bunches (SB) in example 3

Замечание 1. При $k < n$ и $k = n$ числа исходов нашей схемы совпадают, т. к. ячейки неразличимы.

2.2. Решение ЗН

Из решенной в п. 2.1 задачи нахождения пошаговой пучковой структуры графа перечисления исходов схемы при каждом j-м наборе минимальных номеров частиц в k непустых ячейках M_j будем считать ее известной на каждом шаге.

Введем еще некоторые необходимые обозначения: N_* – номер исхода; R_* – вид исхода схемы; $T = (N_*^{(0)}, N_*^{(1)}, \ldots, N_*^{(k)})$ – траектория от начала – 0-го шага – исхода схемы сочетаний, до $(n-k)$-го – последнего добавления частицы в непустые ячейки, где $N_*^{(i)}$ – номер исхода i-го шага от начала до данного состояния, $i = \overline{0,(n-k)}$; $N^{(i)}$ – число исходов i-го шага схемы, тогда $N = N^{(n-k)}$ – число исходов схемы; $Q^{(i)} = (q_1^{(i)}, \ldots, q_{N_{(i-1)}}^{(i)})$ – пучковая структура графа перечисления исходов схемы на i-м шаге; $\bar{n} = (n^{(0)}, n^{(1)}, \ldots, n^{(k)})$ – номера исходов в пучках, через которые проходит траектория в графе перечисления ее исходов от начала до данного исхода схемы; $(n-k)$ номеров порционно добавляемых частиц в непустые ячейки назовем ДОБАВЛЯЕМЫМИ $C_j = c_1, \ldots, c_{n-k}$, перечисленными в порядке возрастания.

Для решения ЗН будет использована очевидная из логики перечисления и порядка нумерации исходов схемы ЗАКОНОМЕРНОСТЬ – (**) связи номеров в пучках графа перечисления и ее видов: на i-м шаге перечисления исходов добавляется i-я в порядке роста из добавляемых из $(n-k)$ в непустые ячейки номеров частиц в n_i-ю ячейку пучка.

Прямая ЗН. Пусть дан номер исхода схемы N_*, требуется найти его вид R_*.

Шаги решения:

1) находим $T = (N_*^{(0)}, N_*^{(1)}, \ldots, N_*^{(k)})$ при $i = \overline{0,k}$, где $i = 0$ – номер шага фиксации минимальных элементов в k частях, по формулам

$$N_*^{(i-1)} = \delta + max\ t : \left(\sum_{l=1}^{t} q_l^{(i)} = A_t \leqslant N_*^{(i)} \right), \tag{3}$$

где $\delta = 0$ при $A_t = N_*^{(i)}$, и $\delta = 1$ при $A_t < N_*^{(i)}$;

2) находим $\bar{n} = (n^{(0)}, n^{(1)}, \ldots, n^{(k)})$ по формулам

$$n^{(i)} = N_*^{(i)} - \sum_{l=1}^{N_*^{i-1}-1} q_l^{(i)}; \tag{4}$$

3) из значения $n^{(0)}$ по результату решенной в схеме сочетаний [5] прямой ЗН находим M_j – фиксированный набор минимальных элементов в k непустых ячейках;

4) по M_j из 3) находим C_j;

5) по (**) последовательно пошагово добавляем элементы (номера частиц) в порядке их перечисления в C_j; на k-м шаге с добавлением в конце $(n-k)$ нулей получаем искомый вид R_* исхода схемы с данным номером N_*.

Обратная ЗН. Пусть дан вид исхода схемы R_*, требуется найти его номер N_*.

Шаги решения:

1) по данному R_* находим $M_j = (r_1, \ldots, r_k)$;

2) по виду M_j из 1) и [5] по решенной прямой ЗН в схеме сочетаний получаем, что $j = n^{(0)} = 2$;

3) по M_j находим C_j;

4) по (**), начиная с первого шага поединичного порционного добавления элементов из

C_j в порядке их роста, фиксируя их номера в пучках, получаем $\bar{n} = (n^{(0)}, n^{(1)}, \ldots, n^{(k)})$;

5) по $\bar{n}$ из 4) вычисляем номера исходов схемы в T по формулам при $i = \overline{1,k}$ в порядке поединичного роста i

$$N_*^{(i)} = \sum_{l=1}^{N_*^{(i-1)}-1} q_l^{(i)} + n^{(i)}, \qquad (5)$$

тогда при $i = k$ получаем искомый номер исхода схемы данного вида R_*.

Замечание 2. При очевидном по логике нумерации последнем исходе $R_* = (r_1, r_2, \ldots, r_k, r_{k+1}, \ldots, r_n) = (\{\omega\}, r-k+2, r-k+3, \ldots, r, 0 \ldots, 0)$, где $\{\omega\} = r_1 = \{1, 2, \ldots, r-k+1\}$, число N исходов нашей схемы определяется из результата решения обратной задачи нумерации по формуле (5) при $i = r - k$.

Приведем числовой пример решения прямой и обратной ЗН.

Пример 5. Пусть, как в примере 4, $r = 5$, $n = k = 3$. Для наглядности и контроля результатов решения прямой и обратной ЗН по данным алгоритмам обращаемся к графу перечисления всех исходов схемы на рис. 4. Из примера 4 и графа получены пошаговые пучковые структуры графа: $Q^{(1)} = (3, 2, 2, 1, 1)$; $Q^{(2)} = (3, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 3, 2, 1)$, которые используются в алгоритмах решения ЗН.

Прямая ЗН. Пусть дан номер исхода схемы $N_* = 14$. Найти его вид R_*.

Шаги решения:

1) по (3) и известных $Q^{(1)}$ и $Q^{(2)}$ получаем из $N_*^{(2)} = N_* = 14 : N_*^{(1)} = 5$, т. к. из $Q^{(2)}$ $3+3+3+3 = 12 < 14$ следует, что $t = 4$, $\delta = 1$, а $N_*^{(0)} = 2$, т. к. из $Q^{(1)}$ $3+2 = 5 = 5$ следует, что $t = 2$, а $\delta = 0$, откуда $T = (2, 5, 14)$;

2) по результату 1),(4) и известных $Q^{(1)}$ и $Q^{(2)}$ получаем: $n^{(2)} = 14-12 = 2$, $n^{(1)} = 5-3 = 2$, $n^{(0)} = 2-0 = 2$;

3) по $n^{(0)} = 2$ из [5] получаем $M_2 = (1, 2, 4)$;

4) по M_2 получаем $C_2 = (3, 5)$;

5) из C_2, добавляя их пошагово по (**) в ячейки, получаем $(1, 23, 4) \to (1, 235, 4)$, где последнее добавление приводит к искомому виду исхода схемы R_*, совпадающего с визуальным из графа на рис. 4.

Обратная ЗН. Пусть дан вид исхода схемы $R_* = (1, 235, 4)$. Найти его номер R_*.

Шаги решения:

1) из данного вида R_* находим $M_j = (1, 2, 4)$;

2) по $M_j = (1, 2, 4)$ из [5] получаем $j = n^{(0)} = 2$;

3) по M_2 получаем $C_2 = (3, 5)$;

4) находя места номеров из C_2 из 3) в порядке их перечисления в данном виде исхода R_*, по (**) получаем $\bar{n} = (2, 2, 2)$;

5) по формулам (5) из результата 4) и $Q^{(1)}, Q^{(2)}$ вычисляем $N_*^{(0)} = 2$, $N_*^{(1)} = 3+2 = 5$, $N_*^{(2)} = N_* = 3+3+3+3+2 = 14$, совпадающим с визуальным из графа на рис. 4.

3. Вероятности исходов схемы

Размещение r различимых частиц по n неразличимым ячейкам с k непустыми ячейками эквивалентно размещению по k неразличимым ячейкам r различимых частиц без пустых ячеек.

Для определения вероятностного распределения исходов схемы предложим следующий АЛГОРИТМ:

1) найдем по последовательным итерациям методом графов (МГ) (см. [7]) все L итоговых вариантов деления с их вероятностями числа r на k ненулевых слагаемых, что соответствует в исходах итераций всем вариантам упорядоченных по возрастанию уровней заполнения k неразличимых ячеек при размещении по ним r неразличимых частиц без пустых ячеек, т. е. с предварительным размещением по одной частице в ячейку, получим для каждого s-го варианта набор уровней $\bar{m}^{(s)} = (m_1^{(s)}, \ldots, m_k^{(s)})$, $(s = \overline{1,L})$ с вероятностью $p_1^{(s)}$;

2) для каждого $\bar{m}^{(s)}$ проводим маркировку по уровням заполнения, т. е. вычисляем $\bar{\mu}^{(s)} = (\mu_1^{(s)}, \ldots, \mu_{r-k+1}^{(s)})$, где $\mu_j^{(s)}$ $(j = \overline{1, r-k+1})$ – число ячеек с уровнем заполнения j;

3) для каждого $\bar{m}^{(s)}$ в соответствии со схемой B из [6] выписываем размер (число ее исходов) $G^{(s)}$ и вероятности $\{p_2^{(s)}\}$ группы всех ее равновероятных исходов деления совокупности на части заданных размеров без учета порядка частей как величину, обратную числу ее исходов, $G^{(s)} = r!/\prod_{i=1}^{k} m_i^{(s)}! \prod_{j=1}^{r-k+1} \mu_j^{(s)}!$, следующую из формулы (2) статьи [6] в наших обозначениях, т. е.

$$p_2^{(s)} = \frac{\prod_{i=1}^{k} m_i^{(s)}! \prod_{j=1}^{r-k+1} \mu_j^{(s)}!}{r!}.$$

Таким образом, распределение вероятностей исходов схемы представляет собой L групп размерами $\{G^{(s)}\}$ (с вероятностью s-й группы $p_1^{(s)}$) равновероятных исходов с вероятностью каждого исхода $p_1^{(s)} p_2^{(s)}$.

Приведем числовой пример нахождения вероятностей исходов схемы.

Пример 6. Пусть в условиях примера 4 $r = 5$, $k = 3$. Реализуем шаги АЛГОРИТМА, где исходы итераций заданы в виде упорядоченных по возрастанию уровней заполнения ячеек с их вероятностями вида $P(\cdot,\cdot,\cdot)$:

1) МГ по итерациям дает: первая – $P(1,1,1) = 1$, вторая – $P(1,1,2) = 1$, третья – $P(1,1,3) = 1/3, P(1,2,2) = 2/3$, откуда получаем $\{\bar{m}\} = ((1,1,3),(1,2,2))$, $L = 2$;

2) $\bar{\mu}_1^{(s)} = (2,0,1)$, $\bar{\mu}_2^{(s)} = (1,2,0)$;

3) $G^{(1)} = 5!/1!1!3!2!0!1! = 10$ исходов размещений частиц с вектором уровней заполнения (1,1,3), каждый с вероятностью $p^{(1)} = 1/10$, и $G^{(2)} = 5!/1!2!2!1!2!0! = 15$ исходов размещений частиц с вектором уровней заполнения (1,2,2), каждый с вероятностью $p^{(2)} = 1/15$. (Суммарное число исходов схемы – 25 – совпадает с результатом примера 4.)

Таким образом, распределение исходов схемы имеет следующий вид: все 10 исходов первой группы имеют вероятности по $(1/3) \cdot (1/10) = 1/30$, а все 15 исходов второй – по $(2/3) \cdot (1/15) = 2/45$. (Проверка на распределение: $(1/30) \cdot 10 + (2/45) \cdot 15 = 1$.)

Замечание 3. Здесь найдено вероятностное распределение исходов в схеме, отличающейся от исходной схемы введением ограничения, приводящего к бесповторному перечислению того же набора исходов и состоящему в упорядочении перечисления среди частей деления совокупности совпадающих размеров по возрастанию минимальных элементов в них. Определение вероятности каждого из исходов в схеме производится по ее полному графу перечисления исходов (без ограничений) суммированием вероятностей всех траекторий итерационных переходов к нему.

4. Моделирование исходов схемы

По результату решения прямой ЗН и полученному в п. 3 распределению исходов схемы можно проводить быстрое моделирование ее исхода по одному случайному числу, разыгрывая ее номер методом маркировки (см. [8]).

Литература

1. *Мансур Т.* Комбинаторные разбиения. Boca Raton: CRC Press, 2012. 600 с.

2. *Орлов М.* Эффективные разбиения // Tech. Report. 2002.

3. *Энатская Н. Ю.* Комбинаторное представление схемы размещения различимых частиц по неразличимым ячейкам // Дискретная математика. 2017. Т. 29, вып. 1. С. 126–135. doi: 10.4213/dm1410

4. *Энатская Н. Ю.* Комбинаторный анализ обобщенной схемы последовательных действий // Промышленные АСУ и контроллеры. 2016. № 4. С. 25–27.

5. *Энатская Н. Ю.* Комбинаторный анализ схемы сочетаний // Промышленные АСУ и контроллеры. 2015. № 8. С. 33–38.

6. *Энатская Н. Ю.* Комбинаторный анализ схемы перестановок с повторением и близкой схемы // Промышленные АСУ и контроллеры. 2017. № 2. С. 19–22.

7. *Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р., Колчин А. В.* Анализ схемы размещения неразличимых частиц по неразличимым ячейкам // Труды КарНЦ РАН. 2014. № 4. С. 143–154.

8. *Энатская Н. Ю., Хакимуллин Е. Р.* Стохастическое моделирование. М.: МИЭМ, 2012. 185 с.

9. *Эндрюс Г.* Теория разбиений. М.: Наука, 1982. 256 с.

Поступила в редакцию 20.01.2019

References

1. *Mansour T.* Kombinatornye razbieniya [Combinatorics of set partition]. Boca Raton: CRC Press, 2012. 600 p.

2. *Orlov M.* Effektivnoe razbienie [Efficient generation of set partitions]. *Tech. Report.* 2002.

3. *Enatskaya N. Yu.* Combinatorial representations for the scheme of allocations of distinguishable particles into indistinguishable cells. *Discrete Math. Appl.* Vol. 28, iss. 4. 2018. P. 223–230. doi: 10.1515/dma-2018-0020

4. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz obobshchennoii skhemy posledovatel'nykh deistvii [Combinatorial analysis of the generalized scheme of the sequential actions]. *Promyshlennye ASU i kontrollery* [Industrial ASU and Controllers]. 2016. No. 4. P. 25–27.

5. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz skhemy sochetanii [Combinatorial analysis of the combination scheme]. *Promyshlennye ASU i kontrollery* [Industrial ACS and Controllers]. 2015. No. 8. P. 33–38.

6. *Enatskaya N. Yu.* Kombinatornyi analiz skhemy perestanovok s povtoreniem i blizkoi schemy [Combinatorial analysis of the permutation scheme with repetition and the close scheme]. *Promyshlennye ASU i kontrollery* [*Industrial ACS and Controllers*]. 2017. No. 2. P. 19–22.

7. *Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R., Kolchin A. V.* Analiz skhemy razmeshcheniya nerazlichimykh chastits po nerazlichimym yacheikam [Analysis of a scheme of allocating indistinguishable particles to indistinguishable cells]. *Trudy KarNTs RAN* [Trans. KarRC RAS]. 2014. No. 4. P. 143–154.

8. *Enatskaya N. Yu., Khakimullin E. R.* Stokhasticheskoe modelirovanie [Stochastic modelling]. Moscow: MIEM, 2012. 185 p.

9. *Andrews G.* Teoria razbienii [The theory of partitions]. Moscow: Nauka, 1982. 256 p.

Received January 20, 2019

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

Энатская Наталия Юрьевна
доцент Департамента прикладной
математики, к. ф.-м. н.
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Московский институт
электроники и математики
ул. Таллинская, 34, Москва, Россия, 123458
эл. почта: nat1943@mail.ru
тел.: +79037411345

CONTRIBUTOR:

Enatskaya, Natalia
National Research University
Higher School of Economics,
Moscow Institute of Electronics and Mathematics
34 Tallinskaya St., 123458 Moscow, Russia
e-mail: nat1943@mail.ru
tel.: +79037411345