

11. Бондур В.Г., Гребенюк Ю.В., Ежова Е.В., Казаков В.И., Сергеев Д.А., Соустова И.А., Троицкая Ю.И. Поверхностные проявления внутренних волн, излучаемых заглубленной плавучей струей. Ч. 3. Поверхностные проявления внутренних волн // Изв. РАН. Физ. атмосферы и океана. 2010. **46**, № 4. 519–529.
12. Карликов В.П. Об истечении плоских струй несжимаемой жидкости из-под свободной поверхности // Аннот. докл. 7-го Всесоюз. съезда по теор. и прикл. механике. Москва, 1991. М.: Изд-во МГУ, 1991. 184.
13. Карликов В.П., Трушина О.В. Об автоколебаниях плоских затопленных фонтанов // Докл. РАН. 1998. **361**, № 3. 340–344.
14. Карликов В.П., Трушина О.В. Об автоколебательных режимах истечения плоских струй жидкости из-под свободной поверхности // Тр. Матем. ин-та РАН. 1998. **223**. 52–62.
15. Карликов В.П., Трушина О.В. Об одном парадоксе симметрии в гидродинамике струйных течений // Тр. семинара “Время, хаос и математические проблемы” под рук. акад. В.А. Садовниченко. Ин-т математических исследований сложных систем. Вып. 1. М.: Изд-во МГУ, 1999. 149–163.
16. Карликов В.П., Толоконников С.Л., Трушина О.В. О возможной классификации автоколебательных режимов фонтанирования плоских вертикальных затопленных струй тяжелой жидкости // Изв. РАН. Механ. жидкости и газа. 2009. № 3. 23–35.

Поступила в редакцию
08.06.2018

УДК 532.594

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ВОЛНОВЫЕ РЕЖИМЫ ПРИ ПРОСТРАНСТВЕННОМ И ВРЕМЕННОМ РАЗВИТИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В СТЕКАЮЩЕЙ ПЛЕНКЕ ЖИДКОСТИ

А. Н. Белоглазкин¹, В. Я. Шкадов², А. Е. Кулаго³

Обсуждается соотношение теоретических и экспериментальных данных для классической задачи о регулярных двумерных волнах в пленках тяжелой вязкой жидкости на вертикальной поверхности. На основе использования преобразования подобия проводится сравнительный анализ методов расчета нелинейных волн, формирующихся в пленке при пространственном и временном развитии возмущений основного стационарного течения.

Ключевые слова: пленка, капиллярность, неустойчивость, нелинейные волны, глобальный аттрактор.

A relation between the theoretical and experimental data for the classical problem of regular two-dimensional waves in heavy viscous liquid films on a vertical surface is discussed. Based on the similarity transformation, a comparative analysis of the methods for calculating the nonlinear waves formed in a film during the spatial and time development of disturbances in the main stationary flow is performed.

Key words: film, capillarity, instability, nonlinear waves, global attractor.

Течение вязкой жидкости в тонких слоях (пленках) имеет волновой характер. Началом теоретического и экспериментального изучения данного явления послужили работы [1, 2]. Эти исследования стимулировали разработку методов корректного упрощения задачи с использованием уравнений Навье–Стокса и сведения ее к решению на основе интегральных эволюционных уравнений [3]. В монографиях [4–6] изложен метод Капицы–Шкадова и проведены исследования свойств решений полученной системы уравнений. Представленные сравнения с имеющимися экспериментальными наблюдениями подтвердили правильность теоретического подхода к решению данной задачи. Система эволюционных уравнений работы [3] была принята за основу настоящего исследования.

¹ Белоглазкин Александр Николаевич — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. аэромеханики и газовой динамики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: bel@mech.math.msu.su.

² Шкадов Виктор Яковлевич — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. аэромеханики и газовой динамики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: shkadov@mech.math.msu.su.

³ Кулаго Александр Евгеньевич — доктор физ.-мат. наук, проф. инж.-эконом. ф-та РЭУ им. Г.В. Плеханова, e-mail: andrej-artem@mail.ru.

В случае свободной пленки рассмотрим систему двух эволюционных уравнений для локальной толщины пленки h и локального расхода потока q , зависящих от времени t и пространственной координаты x , направленной вдоль течения жидкости. В безразмерном виде система имеет один внешний управляющий параметр δ . Данная система хорошо описывает течения пленки вязкой жидкости при больших значениях числа Капицы $\gamma \gg 1$:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{6}{5} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{h} \right) = \frac{1}{5\delta} \left(h \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + h - \frac{q}{h^2} \right). \quad (2)$$

Здесь $\delta = \frac{(3\text{Re})^{11/9}}{45\gamma^{1/3}}$, $\text{Re} = \frac{U_0 H_0}{\nu}$ — среднерасходное число Рейнольдса; $\gamma = \frac{\sigma}{\rho(\nu^4 g)^{1/3}}$, H_0 и U_0 — средняя толщина и средняя скорость в безволновом течении пленки; ν — коэффициент кинематической вязкости; σ — коэффициент поверхностного натяжения; ρ — плотность жидкости; g — ускорение свободного падения.

Наиболее распространенный вариант численного решения системы эволюционных уравнений — это задача Коши с условием периодичности решения по пространству [3]. В этом случае задача решается на ограниченном отрезке $x \in [x_0, x_0 + 2\pi/\alpha]$. Однако периодичность решения жестко задает условие для средней толщины пленки $h_0 = 1$. Средний расход $q_0(t)$ вычисляется в процессе решения, а он не равен константе.

В данном случае мы будем рассматривать регулярные нелинейные волны — решения уравнений (1), (2), — локальные толщина $h(t, x)$ и расход $q(t, x)$ которых зависят от величины $\xi = \alpha x - \omega t = \alpha(x - c_r t)$. Здесь по определению α — волновое число; ω — частота колебаний; c_r — фазовая скорость волны.

Другая возможная постановка задачи — решение задачи Коши на всей числовой оси $x > 0$ ($0 \leq x \leq L$, где L достаточно велико). В начальный момент времени задается распределение толщины $h(x)$ и расхода $q(x)$. Далее происходит интегрирование системы эволюционных уравнений по времени t . Данная постановка позволяет построить решение системы эволюционных уравнений, для которых средний расход q_0 является постоянной величиной на всем интервале интегрирования $0 \leq x \leq L$. Такой подход связан со значительными затратами вычислительных ресурсов, но он более соответствует реальным условиям, когда в экспериментальной установке жидкость подается на стенку с постоянным расходом, а толщина пленки и скорость изменяются вниз по течению. При этом $h_0 = h_0(x)$.

Режим подачи жидкости на начальном участке течения жидкости может быть периодическим с заданной амплитудой. При превышении амплитуды колебаний определенной величины формирование волн на поверхности пленки связано уже с вынужденными колебаниями, в отличие от случая, когда волны формируются вследствие конкурирующего развития мод гидродинамической неустойчивости.

Множеством предельных периодических решений динамической системы для соответствующих периодических по пространству решений системы эволюционных уравнений является глобальный аттрактор. Предельные решения обладают свойством оптимальности: при фиксированном значении волнового числа α фазовая скорость c_r и средний расход q_0 принимают максимальные значения.

Проекция глобального аттрактора на плоскость значений внешних и внутренних управляющих параметров (c_r, α) , (q_0, α) представляют собой кусочно-непрерывные кривые, отдельные части которых соответствуют различным семействам регулярных волн, возникающих при варьировании волнового числа α . В зависимости от величин значений внешних управляющих параметров δ , γ меняются количество и размеры областей семейств регулярных волн, а также разделяющих их интервалов, в которых решения в виде регулярных волн не существуют [7].

В то же время экспериментальные данные и результаты расчетов пространственной краевой задачи свидетельствуют о формировании на некотором расстоянии от начального участка установившихся регулярных волновых образований.

Целью данной работы является установление соответствия между решениями пространственной краевой задачи и отвечающими им областями глобального аттрактора.

Система эволюционных уравнений, описывающая волновое течение жидких пленок [3, 8], изначально допускает вариации во времени интегральных характеристик течения, будь то средняя толщина или расход. Для этих эволюционных уравнений существует преобразование подобия, которое сохраняет вид и соответствующие свойства решений системы. Использование инвариантных

свойств уравнений дает возможность производить расчеты течений пленки как для режимов постоянной толщины, так и для режимов постоянного расхода. В этом случае можно установить соответствие между характеристиками регулярной волны, наблюдаемой в эксперименте, характеристиками, полученными при численных расчетах течения для всей числовой оси, и периодическими по пространству предельными решениями эволюционной системы уравнений (1), (2).

Преобразование, при которых система уравнений (1), (2) сохраняет свой вид, запишем следующим образом:

$$\bar{t} = k_t t, \quad \bar{x} = k_x x, \quad \bar{h} = k_h h, \quad \bar{q} = k_q q, \quad \bar{\delta} = k_\delta \delta, \quad \bar{\alpha} = \alpha/k_x,$$

где $k_t, k_x, k_h, k_q, k_\delta$ — некоторые коэффициенты. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{k_t} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{k_x} \frac{\partial}{\partial x}.$$

Из уравнения (1) получим $\frac{k_h}{k_t} = \frac{k_q}{k_x}$. Аналогичное соотношение можно вывести из левой части уравнения (2): $\frac{k_q}{k_t} = \frac{k_q^2}{k_x k_h}$. Из условия $h \sim q/h^2$ следует, что $k_q = k_h^3$. Из условия $\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \sim 1$ имеем $k_h = k_x^3$. Сравнивая левую и правую части уравнения (2), получим $\frac{k_q^2}{k_x k_h} = \frac{k_h}{k_\delta}$, откуда следует, что

$$k_\delta = \frac{k_x k_h^2}{k_q^2}.$$

Положим $k_x = \theta$, в результате будем иметь следующие соотношения:

$$\bar{t} = \theta^{-5} t, \quad \bar{x} = \theta x, \quad \bar{h} = \theta^3 h, \quad \bar{q} = \theta^9 q, \quad \bar{\delta} = \theta^{-11} \delta, \quad \bar{\alpha} = \theta^{-1} \alpha. \quad (3)$$

Величины α, δ являются заданными управляющими параметрами (δ — внешний управляющий параметр, α — внутренний управляющий параметр), функции h, q — искомые. Поэтому при параметрических исследованиях величины h и q следует пересчитывать по формулам

$$\bar{h} = \theta^3 h, \quad \bar{q} = \theta^9 q. \quad (4)$$

Использование данных соотношений позволяет производить расчеты волновых течений пленки для режимов постоянного среднего расхода $q_0 = 1$.

В случае пленки сильновязкой жидкости [9] соответствующая система эволюционных уравнений (1), (2) содержит уже два внешних управляющих параметра δ и κ . Параметр κ в системе эволюционных уравнений необходимо учитывать для сильновязких жидкостей, когда число Капицы γ является умеренным или малым:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{6}{5} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{h} \right) = \frac{1}{5\delta} \left(h \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} - \frac{q}{h^2} + h \right) + \frac{\kappa^2}{5\delta} \chi. \quad (5)$$

Здесь

$$\chi = \frac{5}{3} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - \frac{9}{4} \frac{q}{h} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{3}{2} \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{1}{h} + \frac{3}{2} \frac{q}{h^2} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2, \quad \kappa = \frac{(3\text{Re})^{2/3}}{\gamma^{1/3}}.$$

Несложно заметить, что и эта система уравнений инвариантна относительно вышеприведенных преобразований (3). Для параметра κ дополнительно имеем

$$\bar{\kappa} = \theta^{-2} \kappa. \quad (6)$$

Аналогично рассмотрим систему эволюционных уравнений (1), (2) для пленки жидкости, взаимодействующей с потоком газа [10]. В данном случае число внешних управляющих параметров увеличено до трех: δ, κ, r . Параметр r характеризует степень взаимодействия пленки жидкости и потока газа:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{6}{5} \frac{q^2}{h} + \Phi \right) = \frac{1}{5\delta} \left(\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} h - \frac{q}{h^2} + h + \Psi \right), \quad (7)$$

где

$$\Phi = \frac{1}{120} (rT_g)^2 h^3 + \frac{1}{20} rT_g q h, \quad \Psi = \frac{1}{2} rT_g - \frac{r\kappa}{3} \frac{\partial P_g}{\partial x} h, \quad r = \frac{3\tau_0}{\rho g H_0},$$

P_g, T_g и τ_0 — функция давления, функция касательного трения и среднее касательное напряжение на границе раздела жидкости и газа [10].

Пусть

$$\bar{\kappa} = k_\kappa \kappa, \quad \bar{r} = k_r r, \quad \bar{T}_g = k_\tau T_g, \quad \bar{P}_g = k_p P_g.$$

Из условия $\kappa h \alpha \sim 1$ ($\kappa h / \lambda \sim 1$) следует, что $k_\tau = k_p, k_\kappa = k_x / k_h = \theta^{-2}$. Так как $r T_g \sim h$, то $k_r k_\tau = \theta^3$. Не нарушая общности, можно положить $k_\tau = k_p = 1$, тогда будем иметь $k_r = \theta^3$.

В результате в дополнение к (3) получим следующие соотношения, при использовании которых система уравнений для пленки жидкости, взаимодействующей с потоком газа, сохраняет свой вид:

$$\bar{\kappa} = \theta^{-2} \kappa, \quad \bar{r} = \theta^3 r, \quad \bar{T}_g = T_g, \quad \bar{P}_g = P_g. \tag{8}$$

Величины $\alpha, \delta, \kappa, r$ являются заданными параметрами, а h, q, T_g, P_g — искомыми функциями. Поэтому, так как $k_\tau = k_p = 1$, при численных расчетах величины h и q достаточно пересчитывать по приведенным выше формулам (4).

С помощью описанной процедуры решения эволюционных уравнений (1), (2) и соотношений (3) можно производить расчеты течений пленки как для режимов постоянной толщины $h_0 = 1$, так и для режимов постоянного расхода $q_0 = 1$.

Для свободной пленки, когда используется модель с одним внешним управляющим параметром, с учетом соотношения (3) решение можно получить непосредственно интегрированием системы (1), (2) при заданном значении обобщенного параметра подобия δ_q (соответствующего среднерасходному числу Рейнольдса $Re_q = q_0 / \nu$). Решение при постоянном расходе находится путем масштабирования соответствующего решения при постоянной толщине.

В случае пленки сильновязкой жидкости или взаимодействующей с потоком газа соотношения (6), (8) должны использоваться при определении значений $h_0(x)$ и $q_0 = 1$ внутри процедуры интегрирования соответствующих систем уравнений (5), (7).

С помощью приведенного алгоритма сравним данные экспериментов по возбуждению волн на поверхности пленки жидкости заданной частотой, численное решение соответствующей пространственной краевой задачи и решения регулярных волновых режимов, полученные на основе анализа свойств глобального аттрактора.

При расчете глобального аттрактора использовались значения δ_q , которые соответствуют среднерасходному числу Рейнольдса Re_q данных эксперимента или решения пространственной краевой задачи. На рис. 1–3 расчеты, полученные в настоящей работе, представлены в виде линий, данные других авторов — в виде отдельных точек. Для величин Re_q и δ_q в дальнейшем будем использовать обозначения Re и δ соответственно.

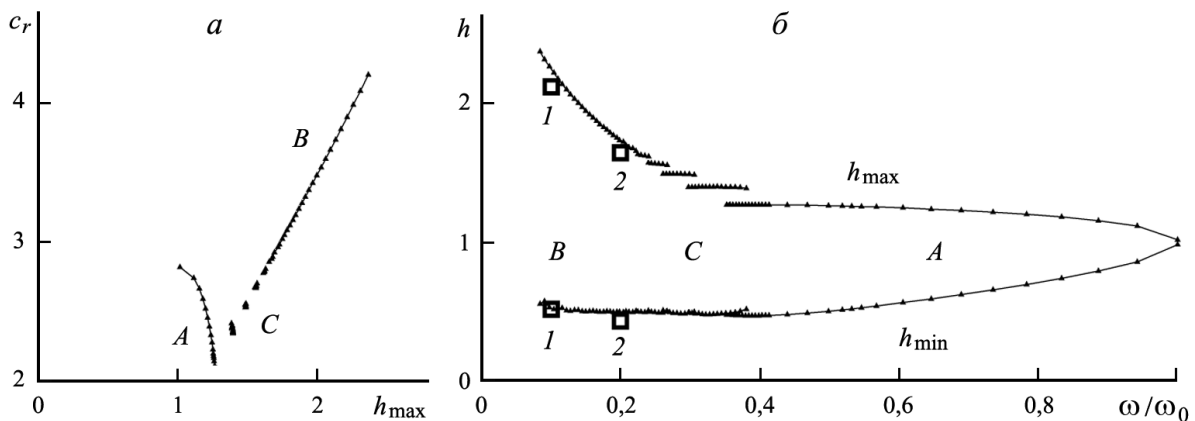


Рис. 1. Глобальный аттрактор при $\delta = 0,216, \gamma = 2850$: *a* — проекция на плоскость (c_r, h_{\max}) ; *б* — проекции на плоскости $(h_{\max}, \omega/\omega_0), (h_{\min}, \omega/\omega_0)$; *A* — первое семейство; *B* — второе семейство; *C* — промежуточные семейства; 1 — данные пространственно-краевой задачи [11] при $\omega/\omega_0 = 0,1$; 2 — 0,2

На рис. 1 при $\delta = 0,216$ и $\gamma = 2850$ показаны проекции глобального аттрактора в плоскостях $(c_r, h_{\max}), (h_{\max}, \omega/\omega_0)$ и $(h_{\min}, \omega/\omega_0)$. Множество регулярных волн можно разделить на медленные волны первого семейства (*A*), быстрые волны второго семейства (*B*) и волны промежуточных семейств (*C*). Подробное описание свойств регулярных волн различных семейств дано в обзоре [8]. В настоящей работе проведено сравнение с решением пространственно-краевой задачи [11]. Особенность данных [11] заключается в том, что частота возбуждения волн на начальном участке движения

является относительно малой ($\omega/\omega_0 = 0,1; 0,2$), а величина амплитуды вынужденных колебаний — высокой. В данном случае именно эта частота выбирается в качестве внутреннего управляющего параметра глобального аттрактора для описания характеристик регулярной волны. Расчеты показывают, что в области промежуточных семейств $\omega/\omega_0 \approx 0,3$ наблюдается неединственность характеристик пленки жидкости, в частности значений фазовой скорости c_r и формы волны при заданной фиксированной частоте возбуждения ω .

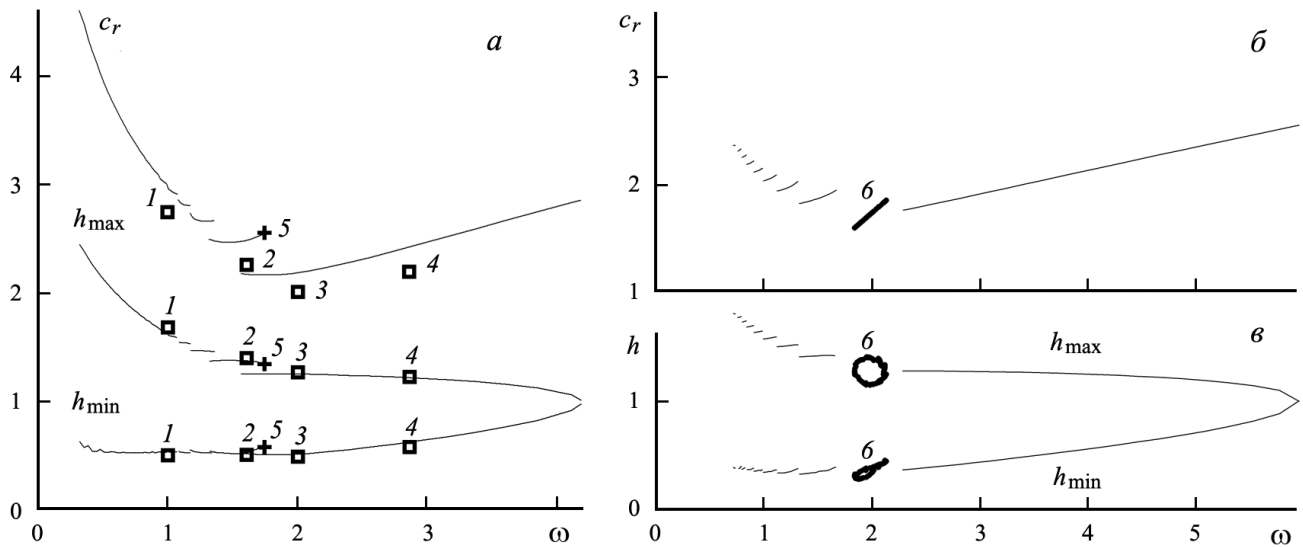


Рис. 2. Глобальный аттрактор при $\delta = 0,169$, $Re = 16,1$, $\gamma = 3370$ (а) и $\delta = 0,693$, $Re = 51,1$, $\gamma = 3370$ (б, в): 1 — данные [12] при частоте возбуждения $f = 14,0$ Гц; 2 — 22,5; 3 — 28,0; 4 — 40,0; 5 — 40,0 (оптимальный режим); б — настоящий расчет, соответствующий нерегулярному режиму [12] при $f = 47,7$ Гц

Отдельно отметим, что при малых значениях частоты возмущения и соответствующего волнового числа вследствие обратной бифуркации [7] происходит распад волны с образованием волн меньшей длины и с кратным увеличением волнового числа.

Результаты численных расчетов различных режимов течения пленки жидкости на основе решения полных уравнений Навье–Стокса представлены в работе [12]. Внешние и внутренние управляющие параметры менялись в широком диапазоне значений. Показано, что формирование регулярных волн связано с частотой возбуждения потока. Для некоторых значений управляющих параметров на расчетном интервале наблюдалась перестройка течения с образованием регулярной волны, определяемой частотой оптимального режима.

Безразмерная частота возбуждений колебаний ω определялась на основе представленного в [13] соотношения

$$\omega = \frac{6\pi f}{(3Re\gamma^2/\nu)^{1/3} \kappa},$$

где f — физическая частота возбуждаемых при $x = 0$ колебаний.

На рис. 2, а линиями показан глобальный аттрактор для $\delta = 0,169$ ($Re = 16,1$), $\gamma = 3370$ и точками выделены данные работы [12] для значений внутреннего управляющего параметра ω , соответствующего частоте возбуждаемых колебаний. Использование предложенной процедуры позволило получить соответствие формы волны и характеристик возникающего регулярного волнового течения данным [12]. Сравнение расчетных данных, полученных на основе [12] и настоящей работы, пред-

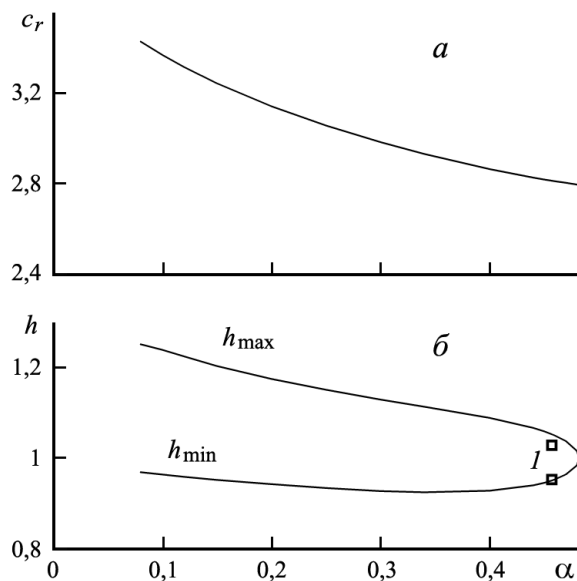


Рис. 3. Глобальный аттрактор для тонкого слоя сильновязкой жидкости при $\delta = 0,0202$, $\gamma = 5,9$: а — проекция на плоскость (c_r, α) , б — проекции на плоскость (h_{\max}, α) , (h_{\min}, α) ; 1 — экспериментальные данные [14] при $Re = 0,5$

ставлено в табл. 1. Результаты расчетов показывают хорошее согласование в широком диапазоне управляющих параметров.

Т а б л и ц а 1

Параметры			Данные [12]			Расчет по модели [9]		
Re	δ	f , Гц	ω	α	c_r	ω	α	c_r
16,1	0,169	14,0	1,004	0,365	2,751	1,004	0,336	2,987
		22,5	1,613	0,712	2,265	1,612	0,647	2,492
		28,0	2,007	0,996	2,015	2,006	0,915	2,192
		40,0	2,867	1,303	2,200	2,869	1,181	2,429
31,0	0,377	65,0	3,238	1,631	1,985	3,238	1,486	2,179
		94,0	4,681	1,991	2,351	4,679	1,834	2,551
51,1	0,693	25,0	0,9432	0,494	1,909	0,9432	0,4439	2,124
		40,1	1,5130	0,896	1,689	1,5130	0,8077	1,873
		100,2	3,7805	2,045	1,849	3,7805	1,8153	2,082
		135,0	5,0935	2,331	2,185	5,0937	2,1528	2,366

На рис. 4 для различных значений частоты возбуждений ($f = 14, 28, 40$ Гц) представлено сравнение формы сформировавшейся по x волны из [12] (а) и нелинейной волны глобального аттрактора, рассчитанного в настоящей работе (б).

Для некоторых значений управляющих параметров при возбуждении частотой колебаний $\omega \sim \omega_0$ после формирования регулярной волны наблюдались перестройка течения и изменение частоты колебаний. Данная перестройка связана с тем, что из-за близости частоты к нейтральному значению на начальном этапе рост амплитуды колебаний является малым. В результате на формирование волны начинает влиять частота с наибольшей скоростью роста, которая близка к частоте оптимального режима. Под частотой оптимального режима здесь понимается наибольшая частота волны промежуточного семейства, имеющего максимальную фазовую скорость (рис. 2, точка 5).

В [12] перестройка формы волны наблюдалась для частоты возбуждения $f = 40$ Гц (рис. 4, а, область 4). Эти данные хорошо согласуются с оптимальным режимом волн глобального аттрактора (область 4 на рис. 4, б) настоящего расчета.

В табл. 2 представлено сравнение расчетных данных [12] и результатов расчетов оптимальных режимов настоящей работы. Точность определения волнового числа α оптимального режима в сравнении с работой [12] для $Re = 16,1$ и $Re = 31,0$ составляет 0,5 и 1,5%, что является хорошим подтверждением правильности приведенных выше рассуждений.

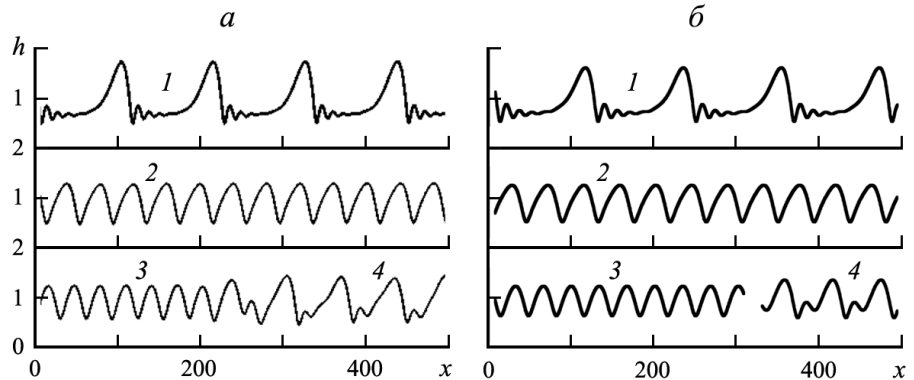


Рис. 4. Сравнение решений пространственно-краевой задачи [12] (а) и настоящих расчетов (б). Форма толщины пленки $h(x)$ для $Re = 16,1$; $\delta = 0,169$; $\gamma = 3370$ при следующих значениях частоты возбуждения: 1 – $f = 14$ Гц; 2 – 28; 3 – 40; 4 – 40 (оптимальный режим)

Т а б л и ц а 2

Параметры		Линейное приближение			Оптимальный режим			Данные [12]
Re	δ	ω	α	c_r	ω	α	c_r	α
16,1	0,169	1,620	0,657	2,466	1,751	0,683	2,563	0,680
31,0	0,377	1,400	0,650	2,155	1,778	0,800	2,223	0,813

В работе [12] предложен пример для случая $Re = 51,1$, $\delta = 0,693$, $\gamma = 3370$, когда при частоте вынужденных колебаний расхода на начальном этапе $f = 47,7$ Гц течение пленки жидкости выходит на нерегулярный квазипериодический режим. На рис. 2, б, в представлен глобальный аттрактор для соответствующих значений внешних управляющих параметров. Непосредственные численные расчеты показали, что данный режим имеет место в области разрыва кусочно-непрерывной кривой, которая является проекцией глобального аттрактора на плоскость значений управляющих параметров (рис. 2, область б). Данная область, ширина которой увеличивается с ростом толщины пленки,

разделяет первое и промежуточные семейства волн. Предельные решения системы эволюционных уравнений в этой области не существуют.

Результаты расчетов для тонкой пленки сильновязкой жидкости при $\delta = 0,0202$, $\gamma = 5,9$ показаны на рис. 3. В работе [14] приведены экспериментальные данные для течения пленки жидкости при $Re = 0,5$. В плоскости (c_r, α) , (h_{\max}, α) представлены расчеты настоящей работы для тонкого слоя сильновязкой жидкости ($\delta = 0,0202$, $\gamma = 5,9$) и проведено сравнение с экспериментальными данными [14] при $Re = 0,5$. Данные расчетов вблизи нейтральной кривой показывают хорошее соответствие значений максимальной h_{\max} и минимальной h_{\min} толщин пленки при заданном волновом числе α .

Примененный в данной статье метод пересчета параметров волновых режимов развивает первоначальную идею [3] о правильном масштабировании физических параметров задачи при выводе уравнений (1), (2). Ряд приложений этого метода (Shkadov Scaling) к течениям пленок при малых числах Капицы γ содержится в недавно опубликованной статье [15].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 18-01-00762, 18-51-00006).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Капица П.Л., Капица С.П. Волновые течения тонких слоев вязкой жидкости // Журн. эксперим. и теор. физ. 1948. **18**, № 1. 3–28.
2. Капица П.Л., Капица С.П. Волновые течения тонких слоев вязкой жидкости // Журн. эксперим. и теор. физ. 1949. **19**, № 2. 105–120.
3. Шкадов В.Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести // Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа. 1967. № 1. 43–51.
4. Алексеенко С.В., Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г. Волновое течение пленок жидкости. Новосибирск: Наука, СО, 1992.
5. Chang H.-C., Demekhin E.A. Complex Wave Dynamics on Thin Films. Amsterdam: Elsevier, 2002.
6. Kalliadasis S., Ruyer-Quil C., Scheid B., Velarde M.G. Falling Liquid Films. London: Springer, 2011.
7. Шкадов В.Я., Белоглазкин А.Н. Интегральные соотношения пограничного слоя в теории волновых течений капиллярных пленок // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2017. № 6. 38–50.
8. Шкадов В.Я., Демехин Е.А. Волновые движения пленок жидкости на вертикальной поверхности (теория для истолкования экспериментов) // Успехи механики. 2006. **4**, № 2. 3–65.
9. Шкадов В.Я. Двухпараметрическая модель волновых режимов течения пленок вязкой жидкости // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2013. № 4. 56–61.
10. Белоглазкин А.Н., Шкадов В.Я. Нелинейные волны в системе жидкая пленка–поток газа // Изв. РАН. Механ. жидкости и газа. 2012. № 6. 32–49.
11. Chang H.-C., Demekhin E.A., Kalaidin E. Simulation of noise-driven wave dynamics on a falling film // AIChE Journal. 1996. **42**, N 6. 1553–1568.
12. Nosoko T., Miyara A. The evolution and subsequent dynamics of waves on a vertically falling liquid film // Phys. Fluids. 2004. **16**, N 4. 1118–1126.
13. Тушканов Д.А., Шкадов В.Я. Нелинейные волны в пленке жидкости на почти горизонтальной поверхности // Изв. РАН. Механ. жидкости и газа. 2006. № 3. 11–24.
14. Panga M.K.R., Mudunuri R.R., Balakotaiah V. Long-wavelength equation for vertically falling films // Phys. Rev. E. 2005. **71**. 036310.
15. Mendez M.A., Scheid B., Buchlin J.-M. Low Kapitza falling liquid films // Chem. Eng. Sci. 2017. **170**. 122–138.

Поступила в редакцию
21.12.2018