

2. Samir J. Al-Bader. // J. of Quantum Electronics. 2004. Vol. 40. № 3. March.
3. Tanaka K., Tanaka M., Sugiyama T. 3D Simulations of Nanometric Integrated Optical Circuits Using Surface Plasmon Polariton Gap Waveguide. MMET-04, Sept. 14-17, 2004.
4. <http://www.luxpop.com>
5. Ямошита К. // IEEE. Trans, MTT. 1980. Vol. 28. № 9. С. 986.

Ростовский государственный университет

21 ноября 2005 г.

УДК 551.521.3

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ СЕЧЕНИЯ РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН СФЕРИЧЕСКИМИ МНОГОСЛОЙНЫМИ АЭРОЗОЛЬНЫМИ ЧАСТИЦАМИ

© 2006 г. И.В. Калиенко, Ю.С. Расцепляев, Д.А. Безуглов

Дистанционное зондирование атмосферных аэрозольных образований играет важную роль в сборе данных об атмосфере Земли. Обычно его результаты интерпретируются на основе теории Ми, разработанной для однородного изотропного шара [1–3]. Однако большинство атмосферных аэрозолей имеют сложный химический состав [4] и для них теория Ми неприменима.

В работе [4] дано обобщение теории Ми, и получены явные выражения для коэффициентов Ми ряда рассеяния a_n и b_n для неоднородных многослойных частиц, обладающих сферической симметрией:

$$\begin{aligned}
 a_n = & \left(\psi_n(\alpha_N) \left[\psi'_n(m_N \alpha_N) - A_{N-1}^n \mathfrak{A}'_n(m_N \alpha_N) \right] - \right. \\
 & \left. - m_N \psi'_n(\alpha_N) \left[\psi_n(m_N \alpha_N) - A_{N-1}^n \mathfrak{A}_n(m_N \alpha_N) \right] \right) / \left(\xi_n(\alpha_N) \left[\psi'_n(m_N \alpha_N) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - A_{N-1}^n \mathfrak{A}'_n(m_N \alpha_N) \right] - m_N \xi'_n(\alpha_N) \left[\psi_n(m_N \alpha_N) - A_{N-1}^n \mathfrak{A}_n(m_N \alpha_N) \right] \right); \\
 b_n = & \left(m_N \psi_n(\alpha_N) \left[\psi_n(m_N \alpha_N) - B_{N-1}^n \mathfrak{A}'_n(m_N \alpha_N) \right] - \right. \\
 & \left. - \psi'_n(\alpha_N) \left[\psi_n(m_N \alpha_N) - B_{N-1}^n \mathfrak{A}_n(m_N \alpha_N) \right] \right) / \left(m_N \xi_n(\alpha_N) \left[\psi_n(m_N \alpha_N) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - B_{N-1}^n \mathfrak{A}'_n(m_N \alpha_N) \right] - \xi'_n(\alpha_N) \left[\psi_n(m_N \alpha_N) - B_{N-1}^n \mathfrak{A}_n(m_N \alpha_N) \right] \right),
 \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$A_k^n = \frac{m_{k+1} \psi_n(m_{k+1} \alpha_k) \psi'_n(m_k \alpha_k) - m_k \psi'_n(m_{k+1} \alpha_k) \psi_n(m_k \alpha_k) + A_{k-1}^n a_k^n}{m_{k+1} \mathfrak{A}_n(m_{k+1} \alpha_k) \psi'_n(m_k \alpha_k) - m_k \mathfrak{A}'_n(m_{k+1} \alpha_k) \psi_n(m_k \alpha_k) + A_{k-1}^n a_k^n},$$

$$B_k^n = \frac{m_{k+1}\psi_n(m_k\alpha_k)\psi'_n(m_{k+1}\alpha_k) - m_k\psi_n(m_{k+1}\alpha_k)\psi'_n(m_k\alpha_k) + B_{k-1}^n b_k^n}{m_{k+1}\psi_n(m_k\alpha_k)\tilde{\alpha}'_n(m_{k+1}\alpha_k) - m_k\tilde{\alpha}_n(m_{k+1}\alpha_k)\psi'_n(m_k\alpha_k) + B_{k-1}^n b_k^n},$$

$$a_k^n = m_k\tilde{\alpha}_n(m_k\alpha_k)\psi'_n(m_{k+1}\alpha_k) - m_{k+1}\tilde{\alpha}'_n(m_k\alpha_k)\psi_n(m_{k+1}\alpha_k);$$

$$a_k = m_k\tilde{\alpha}_n(m_k\alpha_k)\tilde{\alpha}'_n(m_{k+1}\alpha_k) - m_{k+1}\tilde{\alpha}'_n(m_k\alpha_k)\tilde{\alpha}_n(m_{k+1}\alpha_k);$$

$$b_k^n = m_k\tilde{\alpha}'_n(m_k\alpha_k)\psi_n(m_{k+1}\alpha_k) - m_{k+1}\tilde{\alpha}_n(m_k\alpha_k)\psi'_n(m_{k+1}\alpha_k);$$

$$b_k = m_k\tilde{\alpha}'_n(m_k\alpha_k)\tilde{\alpha}_n(m_{k+1}\alpha_k) - m_{k+1}\tilde{\alpha}_n(m_k\alpha_k)\tilde{\alpha}'_n(m_{k+1}\alpha_k);$$

$A_0^n = B_0^n = 0$; N – число слоёв частицы; m_k – комплексный коэффициент

преломления k -го слоя; $\alpha_k = m_k \frac{2\pi}{\lambda} a_k$ – дифракционный параметр k -го

слоя; a_k – радиус k -го слоя; λ – длина волны в свободном пространстве; $\psi_n(x)$, $\tilde{\alpha}_n(x)$, $\tilde{\alpha}'_n(x)$ – функции Риккати–Бесселя.

Выражения (1) позволяют определить сечения рассеяния C_{sca} , экстинкции C_{ext} и обратного рассеяния C_{back} , а также соответствующие факторы эффективности C_{sca} , C_{ext} , C_{back} :

$$Q_{sca} = C_{sca} / \pi a_N^2 = 2 / \alpha_N^2 \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (|a_n|^2 + |b_n|^2);$$

$$Q_{ext} = C_{ext} / \pi a_N^2 = 2 / \alpha_N^2 \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \operatorname{Re}\{a_n + b_n\}; \quad (2)$$

$$Q_{back} = C_{back} / \pi a_N^2 = 1 / \alpha_N^2 \left| \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (-1)^n (a_n - b_n) \right|^2.$$

Для практических расчётов представляет существенный интерес вопрос о необходимом числе членов ряда, которые требуется удерживать для вычисления факторов эффективности (2) с заданной точностью. В работе [4] применялись два критерия – итерационный метод и метод, основанный на критерии сходимости с использованием дифракционного параметра [5]. Как показали численные расчёты, второй метод даёт более регулярное поведение факторов эффективности (2), но для его применения необходимо использовать дополнительные тесты. Кроме того, отсутствует обоснование применения данного критерия.

Цель работы – дать оценку необходимого числа членов для сходимости ряда рассеяния теории Ми, обобщённой на произвольную многослойную частицу, обладающую сферической симметрией.

Воспользуемся связью функций Риккати–Бесселя и сферических функций Бесселя [1, 6]

$$\begin{aligned}\Psi_n(x) &= x j_n(x), \\ \mathfrak{A}_n(x) &= x y_n(x),\end{aligned}\quad (3)$$

$$\xi_n(x) = x j_n(x) + i x y_n(x),$$

а также соотношением для сферических функций Бесселя [6]

$$\frac{n}{x} f_n(x) - \frac{d}{dx} f_n(x) = f_{n+1}(x). \quad (4)$$

Подставив (3) и (4) в (1), после преобразований получим более простые выражения для определения коэффициентов Ми:

$$a_n = \frac{A_N^n}{A_N^n + i}; \quad b_n = \frac{B_N^n}{B_N^n + i}, \quad (5)$$

где

$$A_k^n =$$

$$= \frac{j_n(m_{k+1}\alpha_k)}{y_n(m_{k+1}\alpha_k)} \cdot \frac{(n+1)(m_{k+1}^2 - m_k^2) - m_{k+1}m_k\alpha_k \left[m_{k+1}D_{A,k}^n - m_k \frac{j_{n+1}(m_{k+1}\alpha_k)}{j_n(m_{k+1}\alpha_k)} \right]}{(n+1)(m_{k+1}^2 - m_k^2) - m_{k+1}m_k\alpha_k \left[m_{k+1}D_{A,k}^n - m_k \frac{y_{n+1}(m_{k+1}\alpha_k)}{y_n(m_{k+1}\alpha_k)} \right]},$$

$$B_k^n = \frac{j_n(m_{k+1}\alpha_k)}{y_n(m_{k+1}\alpha_k)} \cdot \frac{m_k D_{B,k}^n - m_{k+1} \frac{j_{n+1}(m_{k+1}\alpha_k)}{j_n(m_{k+1}\alpha_k)}}{m_k D_{B,k}^n - m_{k+1} \frac{y_{n+1}(m_{k+1}\alpha_k)}{y_n(m_{k+1}\alpha_k)}},$$

$$D_{A,k}^n = \frac{j_{n+1}(m_k\alpha_k) - A_{k-1}^n y_{n+1}(m_k\alpha_k)}{j_n(m_k\alpha_k) - A_{k-1}^n y_n(m_k\alpha_k)}; \quad D_{B,k}^n = \frac{j_{n+1}(m_k\alpha_k) - B_{k-1}^n y_{n+1}(m_k\alpha_k)}{j_n(m_k\alpha_k) - B_{k-1}^n y_n(m_k\alpha_k)}.$$

Выражения (5) позволяют рассчитать сечения рассеяния, экстинкции и обратного рассеяния для многослойных частиц. Тем не менее ввиду немонотонности сферических функций Бесселя на основании (5) трудно проанализировать поведение коэффициентов Ми с ростом n .

Для вывода расчётных соотношений используем представление сферических функций Бесселя через степенные ряды [6]:

$$\begin{aligned}j_n(z) &= \frac{z^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)} \left\{ 1 - \frac{z^2/2}{1!(2n+3)} + \frac{(z^2/2)^2}{2!(2n+3)(2n+5)} - \dots \right\}; \\ y_n(z) &= -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{z^{n+1}} \left\{ 1 - \frac{z^2/2}{1!(1-2n)} + \frac{(z^2/2)^2}{2!(1-2n)(3-2n)} - \dots \right\}.\end{aligned}\quad (6)$$

Введем обозначения

$$p_n(z) = 1 - \frac{z^2/2}{1!(2n+3)} + \frac{(z^2/2)^2}{2!(2n+3)(2n+5)} - \dots, \quad (7)$$

$$q_n(z) = 1 - \frac{z^2/2}{1!(1-2n)} + \frac{(z^2/2)^2}{2!(1-2n)(3-2n)} - \dots$$

После преобразований приведём выражения (5) к виду, удобному для анализа и вычисления на ЭВМ

$$a_n = \frac{F_N^n \tilde{A}_N^n}{F_N^n \tilde{A}_N^n + i}; \quad b_n = \frac{F_N^n \tilde{B}_N^n}{F_N^n \tilde{B}_N^n + i}, \quad (8)$$

$$\text{где } F_N^n = \frac{\alpha_N^{2n+1}}{[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)]^2 (2n+1)},$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_k^n &= (-1) \frac{p_n(m_{k+1}\alpha_k)}{q_n(m_{k+1}\alpha_k)} \times \\ &\times \frac{\frac{n+1}{2n+1}(m_{k+1}^2 - m_k^2) + m_{k+1}^2 \left[\frac{(m_{k+1}\alpha_k)^2}{(2n+1)(2n+3)} \cdot \frac{p_{n+1}(m_{k+1}\alpha_k)}{p_n(m_{k+1}\alpha_k)} - \tilde{D}_{A,k}^n \right]}{\frac{n+1}{2n+1}(m_{k+1}^2 - m_k^2) + m_k^2 \frac{q_{n+1}(m_{k+1}\alpha_k)}{q_n(m_{k+1}\alpha_k)} - m_{k+1}^2 \tilde{D}_{A,k}^n}; \\ \tilde{B}_k^n &= (-1) \frac{p_n(m_{k+1}\alpha_k)}{q_n(m_{k+1}\alpha_k)} \cdot \frac{\frac{(m_{k+1}\alpha_k)^2}{(2n+1)(2n+3)} \frac{p_{n+1}(m_{k+1}\alpha_k)}{p_n(m_{k+1}\alpha_k)} - \tilde{D}_{B,k}^n}{\frac{q_{n+1}(m_{k+1}\alpha_k)}{q_n(m_{k+1}\alpha_k)} - \tilde{D}_{B,k}^n}; \\ \tilde{D}_{A,k}^n &= \frac{\frac{(m_{k+1}\alpha_k)^2}{(2n+1)(2n+3)} p_{n+1}(m_k\alpha_k) + \left(\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} \right)^{2n+1} \tilde{A}_{k-1}^n q_{n+1}(m_k\alpha_k)}{p_n(m_k\alpha_k) + \left(\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} \right)^{2n+1} \tilde{A}_{k-1}^n q_n(m_k\alpha_k)}; \\ \tilde{D}_{B,k}^n &= \frac{\frac{(m_{k+1}\alpha_k)^2}{(2n+1)(2n+3)} p_{n+1}(m_k\alpha_k) + \left(\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} \right)^{2n+1} \tilde{B}_{k-1}^n q_{n+1}(m_k\alpha_k)}{p_n(m_k\alpha_k) + \left(\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} \right)^{2n+1} \tilde{B}_{k-1}^n q_n(m_k\alpha_k)}; \quad \tilde{A}_0 = \tilde{B}_0 = 0. \end{aligned}$$

Функции $p_n(z)$ и $q_n(z)$ имеют те же нули, что и соответствующие сферические функции Бесселя $j_n(z)$ и $y_n(z)$, поэтому дроби $\frac{p_{n+1}(z)}{p_n(z)}$, $\frac{q_{n+1}(z)}{q_n(z)}$,

$\frac{p_n(z)}{q_n(z)}$ являются сильно осциллирующими функциями. Но, начиная с того номера n , для которого первый нуль соответствующей сферической функции Бесселя больше аргумента, эти дроби становятся монотонными и стремятся к $(1 + i0)$.

Влияние каждого предыдущего слоя на последующий обусловлено величинами

$$\frac{\left(\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\right)^{2n+1} \tilde{A}_{k-1} q_{n+1}(m_k \alpha_k)}{p_n(m_k \alpha_k) + \left(\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\right)^{2n+1} \tilde{A}_{k-1} q_n(m_k \alpha_k)};$$

$$\frac{\left(\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\right)^{2n+1} \tilde{B}_{k-1} q_{n+1}(m_k \alpha_k)}{p_n(m_k \alpha_k) + \left(\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\right)^{2n+1} \tilde{B}_{k-1} q_n(m_k \alpha_k)},$$

которые всегда меньше 1 и с ростом n стремятся к нулю в соответствии с $\left(\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\right)^{2n+1} \rightarrow 0$. Это влияние тем значительнее, чем тоньше соответствующий k -тый слой.

Таким образом, с ростом n коэффициенты $\tilde{A}_k$ и $\tilde{B}_k$ стремятся к своим асимптотическим выражениям:

$$\left| \tilde{A}_k \right| \rightarrow \frac{m_{k+1}^2 - m_k^2 - 2m_{k+1}^2 \cdot 0 \left[\left(\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\right)^{2n+1} \right]}{m_{k+1}^2 + m_k^2 - 2m_{k+1}^2 \cdot 0 \left[\left(\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\right)^{2n+1} \right]} \rightarrow \frac{m_{k+1}^2 - m_k^2}{m_{k+1}^2 + m_k^2};$$

$$\left| \tilde{B}_k \right| \rightarrow \frac{\left(m_{k+1}^2 - m_k^2 \right) \alpha_k^2 - (2n+1)(2n+3) \cdot 0 \left[\left(\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\right)^{2n+1} \right]}{\left((2n+1)(2n+3) - (m_k \alpha_k)^2 - (2n+1)(2n+3) \cdot 0 \left[\left(\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\right)^{2n+1} \right] \right)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left| \frac{0 \left[\left(\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} \right)^{2n+1} \right]}{1 - 0 \left[\left(\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} \right)^{2n+1} \right]} \right|.$$

Из сказанного выше заключаем, что величина F_N^n в формулах (8) является верхней оценкой для абсолютного значения коэффициентов Ми a_n и b_n . Поскольку в формулах (2) под знаком суммы стоит сомножитель $(2n+1)$, то для оценки необходимого числа членов для сходимости ряда рассеяния целесообразно использовать величину

$$F_n = \frac{\alpha_N^{2n+1}}{[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)]^2}. \quad (9)$$

Из (2), (8) и (9) видно, что

$$\begin{aligned} F_n &\geq (2n+1)|a_n|, \\ F_n &\geq (2n+1)|b_n|. \end{aligned} \quad (10)$$

Рассмотрим ряд

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} F_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_N^{2n+1}}{[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)]^2}. \quad (11)$$

Для n , удовлетворяющих неравенству

$$(2n+1)^2 > \frac{\alpha_N^4}{(2n+3)^2} + \alpha_N^2, \quad (12)$$

выполняется соотношение

$$F_n - F_{n+1} > F_{n+2}, \quad (13)$$

а следовательно, для этих n

$$F_n > \sum_{l=n+1}^{\infty} F_l. \quad (14)$$

Тогда из (10) и (14) имеем

$$F_n > \sum_{l=n+1}^{\infty} (2l+1)|a_l|, \quad F_n > \sum_{l=n+1}^{\infty} (2l+1)|b_l|,$$

и, чтобы вычислить соответствующие факторы эффективности (2) с заданной точностью δ , достаточно взять число членов ряда, удовлетворяющее неравенству $\delta \geq F_n$.

Для гипотетической модели трёхслойной частицы $\alpha_1 = 5$, $\alpha_2 = 8$, $\alpha_3 = 10$, $m_1 = 1,28 - 1,37i$, $m_2 = 1,78 - 0,0024i$, $m_3 = 2,48 - 0,705i$ по формулам (8) и (9) были проведены расчёты на ЭВМ, результаты которых представлены в таблице.

n	F_n	$(2n + 1)a_n$	$(2n + 1)b_n$
16	$2,72 \cdot 10^{-2}$	$(-1,89 - 6,85i) \cdot 10^{-4}$	$(-0,13 - 2,14i) \cdot 10^{-4}$
22	$3,15 \cdot 10^{-9}$	$20,55 - 2,75i) \cdot 10^{-10}$	$(-28,61 - 2,93i) \cdot 10^{-11}$
28	$1,3 \cdot 10^{-17}$	$(-0,38 - 1,93i) \cdot 10^{-18}$	$(-4,62 - 3,00i) \cdot 10^{-19}$

Таким образом, величина F_n служит оценкой удержанных членов ряда при расчёте факторов эффективности (2) с заданной точностью. Соотношения (8), полученные в данной работе, позволяют упростить расчёт сечения рассеяния, экстинкции и обратного рассеяния (2). При $N = 1$ выражения (8) совпадают с известными результатами теории Ми для однородной изотропной сферы [1, 2], при $N = 2$ – с выражениями для коэффициентов Ми a_n и b_n для шара в оболочке [3].

Литература

1. Исмару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. М., 1981. Т. 1.
2. Дейрменджан Д. Рассеяние электромагнитного излучения сферическими полидисперсными частицами. М., 1971.
3. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М., 1986.
4. Волков Н.Г., Ковач В.Ю. // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1990. Т. 26. № 5. С. 517–523.
5. Wiscombe W.I. // Appl. Opt. 1980. Vol. 19. P. 1505.
6. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стигана. М., 1979.

Ростовский институт сервиса ЮРУЭиС

21 декабря 2005 г.

УДК 532.6:537.534

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОМ СХПЭЭ ПОВЕРХНОСТИ СИНГУЛЯРНЫХ ГРАНЕЙ ТВЕРДОГО РАСТВОРА Cu–6 ат. % Ge

© 2006 г. И.Н. Сергеев, А.А. Шебзухов

Surface of singular facets (110), (111) and (100) solid solutions Cu–6 ат. % Ge, and facets (111) clear copper and germanium were studied by EELS. Over spectrums of a solid solution are dominated with the peaks of less losses caused by a copper, are logged peaks of germanium, displaced on energy. It is fixed, that the structure of spectrums develops orientation dependence. In spectrums of a solid solution occurs plasmon peak reflecting interaction of atoms of copper and germanium on a surface of an alloy.

Медно-германиевые сплавы привлекают повышенный интерес в связи с их уникальными свойствами, перспективными для применения в микро- и нанoeлектронике [1]. Для исследования электронной структуры поверх-