

Аналитическое описание нелинейной генерации гармоник вблизи насыщения в лазерах на свободных электронах

К. В. Жуковский^a

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра теоретической физики.
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

Поступила в редакцию 17.05.2019, после доработки 09.07.2019, принята к публикации 11.07.2019.

Проводится феноменологическое моделирование нелинейной генерации гармоник в экспериментах с однопроходными лазерами на свободных электронах (ЛСЭ). Моделируется постепенный выход гармоник излучения в режим насыщения и поэтапное достижение мощности насыщения. Модель включает основные потери для каждой гармоники в отдельности с учетом того, что ондуляторное излучение (ОИ) и электронно-волновое взаимодействие на длинах волн высших гармоник более чувствительны к разбросу энергии пучка электронов, его расходимости и другим факторам. Результаты феноменологического моделирования сравниваются с экспериментальными данными соответствующих ЛСЭ и с численным моделированием. Предложенная модель дает хорошее соответствие экспериментам SALCA, LEUTL, LCLS и другим в различных условиях, а также их численным моделям. В отличие от последних, феноменологическая модель позволяет быстро получить реалистичное описание эволюции мощности и банчинга ЛСЭ на любом персональном компьютере и даже на инженерном калькуляторе. При этом возможно исследовать практически любые конфигурации магнитного поля ондулятора. Показано, что, в отличие от спирального ондулятора, который излучает первую и вторую гармоники за счет эмиттанса пучка, в ЛСЭ с эллиптической поляризацией поля ондулятора с 3-й гармоникой, излучается в основном первая и пятая гармоники.

Ключевые слова: ондулятор, лазер на свободных электронах, генерация гармоник.

УДК: 539.12.01. PACS: 41.60.m, 41.60.Ap, 41.60.Cr.

ВВЕДЕНИЕ

Ондулятор представляет собой прибор, в котором электроны e^- высокой энергии с лоренц-фактором $\gamma = E/mc^2 \gg 1$, где E — энергия, m — масса e^- , c — скорость света, движутся между рядами магнитов чередующейся полярности и совершают небольшие поперечные колебания на фоне релятивистского дрейфа вдоль оси ондулятора. Идея ондуляторного излучения (ОИ) и идея когерентного излучения от электронных банчей, разделенных длиной волны излучения, были предложены Гинзбургом [1]. Ондулятор был впервые создан Х. Мотцем (Motz) [2]. В XXI веке интерес к ОИ диктуется в первую очередь применением ондуляторов в лазерах на свободных электронах (ЛСЭ), где излучение взаимодействует с электронами в ондуляторе, группируя их в микробанчи, отделенные друг от друга длиной волны излучения основного тона и гармоник ОИ. Важным преимуществом ЛСЭ является то, что они могут излучать мощные короткие импульсы в рентгеновском диапазоне [3–10], где обычные лазеры с инверсной заселенностью рабочего тела не работают.

Моделирование работы ЛСЭ — сложная и трудоемкая задача. Обычно для этого применяются специально разработанные численные программы, которые решают совокупность уравнений движения зарядов в магнитном поле ондулятора и их взаимодействия с полем волны. Это требует специально подготовленного персонала, вычислительной техники и машинного времени. Кроме того, такие программы написаны для заданного магнитного поля в ондуляторе, обычно плоского, и любое изменение конфигурации магнитного поля ондулятора требует

новой программы, что реализуемо только ее разработчиками. Для оценки работы однопроходного ЛСЭ разработана феноменологическая модель [11, 12], которая позволяет просто и довольно точно аналитически описать эволюцию мощности излучения в ЛСЭ с практически любым ондулятором. Феноменологическая модель сопоставлена с экспериментами и с численными симуляциями [11–15]; получено хорошее согласие вплоть до режима насыщения гармоник. Однако описание эволюции гармоник ЛСЭ около насыщения представлено в модели упрощенно: мощность гармоник выходит на насыщение одномоментно, а не постепенно (см. рис. в [11–15]). Ниже мы представим аналитическое описание, согласующееся с численными симуляциями и с экспериментальными данными для мощности гармоник ЛСЭ во всем диапазоне, включая насыщение.

1. ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ МОЩНОСТИ ГАРМОНИК ЛСЭ

Приближенное описание мощности идеального однопроводного ЛСЭ было дано в [16]. Приведем основные формулы для эволюции мощности излучения. В изначально не сгруппированном пучке электронов мощность излучения гармоник ЛСЭ растет по длине ондуляторов z по экспоненциальному закону от эффективной мощности, примерно равной $\sim 1/9$ начальной мощности $P_{0,n}$ [3–5] n -й гармоники, до ее мощности насыщения $P_{n,F}$ [16, 17]:

$$P_{L,n}(z) \cong \frac{P_{0,n} A(n, z) e^{0.223z/L_s}}{1 + (A(n, z) - 1) \frac{P_{0,n}}{P_{n,F}}}, \quad (1)$$

$$A(n, z) \cong \frac{1}{3} + \frac{\cosh \frac{z}{L_{n,g}}}{4.5} + \frac{\cos \frac{\sqrt{3}z}{2L_{n,g}} \cosh \frac{z}{2L_{n,g}}}{0.444},$$

^a E-mail: zhukovsk@physics.msu.ru

где $L_{n,g} \cong \Phi_n \lambda_u / 4\pi \sqrt{3} n^{1/3} \tilde{\rho}_n$ — длина усиления n -й гармоники, $L_{1,g} \equiv L_g$. Конечная мощность насыщения $P_{n,F}$ в (1) отличается от идеальной в [16] и рассчитывается с учетом всех потерь в ЛСЭ [11–15]: $P_{n,F} = \eta_n P_F f_n^2 / n^{5/2} f_1^2$, где $P_F \cong \sqrt{2} P_e \eta_1 \tilde{\rho}_1^2 / \rho_1$, P_e — мощность электронного пучка, η — коэффициент потерь, ρ_n — параметр Пирса (см. ниже). Насыщение основного тона наступает на длине $L_s \cong \cong 1.07 L_{1,g} \ln(9\eta_1 P_F / P_{0,1})$, где $P_0 \equiv P_{0,1}$. В описании работы ЛСЭ фундаментальную роль играет параметр Пирса ρ_n [18, 19]:

$$\rho_n = \frac{J^{1/3} (\lambda_u k f_n)^{2/3}}{2\gamma (4\pi i)^{1/3}} \tilde{\rho}_n = \frac{\rho_n}{(1 + \mu_{D,n})^{1/3}}, \quad (2)$$

$$\mu_{D,n} = \frac{\lambda_u \lambda_n}{16\pi \rho_n \Sigma},$$

где поперечное сечение пучка электронов $\Sigma = \pi \sigma = P_e / m_e c^2 \gamma J$ связано с его мощностью P_e и плотностью тока $J = I_0 / \Sigma$ [А/м²], I_0 — ток в ондуляторе [А], $i \cong 1.7045 \times 10^4$ — ток Альфвена [А], λ_u — основной период ондулятора [м], k_{eff} — эффективный параметр ондулятора [20], который для обычного плоского ондулятора совпадает с $k = \frac{e}{mc^2} \frac{H_0 \lambda_u}{2\pi} \approx \approx H_0 \lambda_u$ [Т·см], H_0 — напряженность магнитного поля на оси и f_n — коэффициент Бесселя для n -й гармоники ОИ. Независимая генерация гармоник представлена в виде (1) во всех модификациях феноменологической модели, включая последние [11–15].

В ЛСЭ с самоусилением спонтанного излучения (SASE FEL) вклад шума электронного банча в начале ЛСЭ приближенно описывается формулой [21]:

$$N_n(z) \cong \frac{P_{\text{noise}}}{9} \frac{S_n(z)}{1 + S_n(z)/45},$$

$$S_n(z) \cong 2 \left| \cosh \frac{z}{L_{n,g}} - e^{\frac{z}{2L_{n,g}}} \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}z}{2L_{n,g}} \right) - e^{-\frac{z}{2L_{n,g}}} \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}z}{2L_{n,g}} \right) \right|, \quad (3)$$

где P_{noise} — начальная мощность шума банча.

Кроме независимого роста $P_{L,n}$ (1), вклад в мощность гармоник дает также индуцированная основным тоном компонента, $Q_n \propto \exp(nz/L_g)$, которая растет как мощность основного тона в степени n [22–26]. Полная мощность излучения гармоники n есть сумма независимого и индуцированного слагаемых:

$$\Pi_n = P_{L,n} + Q_n. \quad (4)$$

Первые приближенные аналитические модели [17, 27] не учитывали потери для каждой гармоники n в отдельности, приводящие к большему уширению линий спектра ОИ и ослаблению электронно-волнового взаимодействия на высших гармониках. В результате предсказываемый нелинейный рост мощности гармоник оказывался слишком ранним, а мощность насыщения гармоник — избыточной. В работе [28] автором был предложен учет потерь в ЛСЭ в зависимости от номера гармоники n ; модель хорошо описывала рост мощности гармоник до начала их насыщения, но дальнейший рост мощности

в режиме насыщения не описывался и конечная мощность гармоник в модели оказывалась на 1–2 порядка меньше, чем в реальности. Этот недостаток не полностью преодолен в модели, предложенной в [11–15], несмотря на принятые там компромиссные решения (см. обсуждение в [20]).

Проведенное нами моделирование и сравнение с экспериментами показало, что нелинейный режим генерации вблизи насыщения должен описываться не одним слагаемым, как в [11–15], [17] и [20], а двумя:

$$Q_n(z) \cong \frac{P_{n,0} e^{nz/L_g}}{1 + (e^{nz/L_g} - 1) \frac{P_{n,0}}{P_{n,F}}} + \frac{\tilde{P}_{n,0} e^{nz/L_g}}{1 + (\exp(nz/L_g) - 1) \frac{\tilde{P}_{n,0}}{\tilde{P}_{n,F}}}. \quad (5)$$

Первый член в (5) описывает выход на конечную мощность $P_{n,F}$ уже в режиме насыщения, а второе слагаемое описывает упреждающий рост мощности до начала насыщения, индуцированный основным тоном с учетом всех потерь. В формуле (5) $P_{n,0} \cong c_n b_n^2 P_{n,F}$, $\tilde{P}_{n,0} \cong d_n b_n^2 \tilde{P}_{n,F}$ — эквивалентные мощности за счет коэффициентов банчинга, $b_n^2 \cong (P_{0,1}/9P_e \tilde{\rho}_1)^n$, индуцированных основным тоном на длине волны гармоники n , $P_{0,1}$ — начальная мощность основного тона в ЛСЭ, $\tilde{P}_{n,F} = \tilde{\eta}_n \tilde{P}_F f_n^2 / n^{5/2} f_1^2$; коэффициенты $c_n \cong \{1, 0.7, 0.3, 0.2, 0.1\}$ и $d_n \cong \{1, 3, 8, 40, 120\}$ регулируют поведение мощности в (5) вблизи насыщения. Влияние всех потерь в реальном ЛСЭ описывают следующие феноменологические коэффициенты:

$$\Phi_n \cong (\zeta^n + 0.165 \mu_{\varepsilon,n}^2) \exp(0.034 \mu_{\varepsilon,n}^2), \quad (6)$$

$$\mu_{\varepsilon,n}(\sigma_\varepsilon, n) \cong 2\sigma_\varepsilon / (n^{1/3} \rho_n), \quad (7)$$

$$\eta_n \cong (e^{-\Phi_n(\Phi_n - 0.9)} + 1.57(\Phi_n - 0.9)/\Phi_n^3) / 1.062, \quad (8)$$

$$\tilde{\Phi}_n \cong (\zeta^{\sqrt{n}} + 0.165 \tilde{\mu}_{\varepsilon,n}^2) \exp(0.034 \tilde{\mu}_{\varepsilon,n}^2), \quad (9)$$

$$\tilde{\mu}_{\varepsilon,n}(\sigma_\varepsilon, n) \cong 2n^{2/3} \sigma_\varepsilon / \tilde{\rho}_n, \quad (10)$$

$$\tilde{\eta}_n \cong (e^{-\tilde{\Phi}_n(\tilde{\Phi}_n - 0.9)} + 1.57(\tilde{\Phi}_n - 0.9)/\tilde{\Phi}_n^3) / 1.062, \quad (11)$$

$$\zeta \cong \sqrt{\prod_{i=x,y,\tilde{x},\tilde{y}} (1 + \mu_i^2)} /$$

$$\left(1 + 0.159 \sum_{i=x,y,\tilde{x},\tilde{y}} \mu_i^2 - 0.066 \sum_{i=x,y,\tilde{x},\tilde{y}} \mu_i \right),$$

$$\mu_{\tilde{x},\tilde{y}} = \frac{1}{\tilde{\rho}_1} \frac{\gamma^2 \varepsilon_{x,y}}{(1 + k_{\text{eff}}^2) \lambda_u \beta_{x,y}}, \quad \mu_{x,y} = \frac{1}{\rho_1} \frac{\gamma^2 \omega_\beta^2 \varepsilon_{x,y}}{(1 + k_{\text{eff}}^2) \gamma_{x,y}},$$

где (см. [29]) μ_i зависят от бетатронной частоты $\omega_\beta = \pi k / \gamma \lambda_u$ и эмиттансов пучка $\varepsilon_{x,y} = \sigma_{x,y} \theta_{x,y}$, его поперечных размеров $\sigma_{x,y} = \sqrt{\varepsilon_{x,y} \beta_{x,y}}$, расходимостей $\theta_{x,y}$ и параметров Твисса $\gamma_{x,y}$, $\beta_{x,y} = \varepsilon_{x,y} / \theta_{x,y}^2$, которые определяют полное сечение $\Sigma = 2\pi \sqrt{\beta_x \varepsilon_x \beta_y \varepsilon_y}$. Несмотря на сложную формулу для ζ , в хороших ЛСЭ, где пучок согласован

с ондулятором, влияние ζ невелико: $\zeta \approx 1.01-1.05$. В плоском ондуляторе $k_{\text{eff}} = k^2/2$ коэффициент Бесселя с учетом отклонения на углы θ , φ от оси $f_{n,x} \cong J_{\frac{n-1}{2}}(n\xi) - J_{\frac{n+1}{2}}(n\xi) + J_n(n\xi)2\gamma\theta \cos\varphi/k$ зависит от обычных функций Бесселя $J_n(\xi)$, где $\xi = k^2/4(1 + k^2/2)$ и длины волн гармоник ОИ таковы: $\lambda_n = \lambda_u/2n(1 + k^2/2)\gamma^2$. Дифракция пучка уменьшает значение параметра Пирса ρ_n ; разброс энергий в пучке σ_e и расходимости $\theta_{x,y}$ увеличивают длину усиления и уменьшают мощность насыщения. Сам ЛСЭ вносит дополнительный разброс энергий, который значительно возрастает ближе к длине насыщения ЛСЭ. Приближенное аналитическое описание этого было дано в [16]; обобщение на случай, когда гармоника с номером n является доминирующей и основной тон подавлен, сделано в [15], модифицированная для произвольного эллиптического ондулятора формула приведена в [20].

Предложенное выше феноменологическое описание эволюции мощности гармоник излучения нетрудно применить к каскадному ЛСЭ, используя формулы (5)–(11) для нелинейного роста гармоник вместо соответствующих выражений, использованных, например, в [30–33]. Мощность гармоник в предварительно сгруппированном пучке электронов развивается по z в режиме независимой генерации следующим образом [17, 27]:

$$P_{L,n}(z) \cong \frac{P_{0,n}F(n,z)}{1 + F(n,z)\frac{P_{0,n}}{P_{n,F}}}, \quad (12)$$

$$F(n,z) \cong 2 \left| \cosh \frac{z}{L_{n,g}} - \cos \frac{z}{2L_{n,g}} \cosh \frac{z}{2L_{n,g}} \right|,$$

а эволюция банчинга n -й гармоники $b_n^2(z) \cong \cong h_n^2(P_1(z)/P_e\rho_1)^n$, индуцированная основным тоном, включает коэффициенты $h_{1,2,3,4,5} \cong \{1, 1.5, 2.4, 4.3, 7.7\}$ и используется для начальной мощности $P_{n,0} \cong d_n b_n^2 P_{n,F}$ каскада ЛСЭ.

Подчеркнем, что феноменологическая модель не следует из решений уравнений для электронов и поля, а представляет согласующееся с ними приближенное описание роста мощности излучения ЛСЭ по длине ондуляторов. В следующем разделе мы продемонстрируем согласие результатов моделирования экспериментов ЛСЭ с измерениями и численными симуляциями.

2. АПРОБАЦИЯ МОДЕЛИ С НЕКОТОРЫМИ ЛСЭ-ЭКСПЕРИМЕНТАМИ

Для проверки феноменологического описания нелинейной генерации гармоник (5) вблизи насыщения мы провели моделирование некоторых экспериментов ЛСЭ, для которых присутствуют исчерпывающие данные.

2.1. Моделирование эксперимента LEUTL

В ЛСЭ эксперименте LEUTL [34] генерировались излучения основного тона с длиной волны 530 нм и 385 нм в зависимости от параметров в ЛСЭ с ондуляторами длиной 2.4 м, периодом 3.3 см и параметром $k = 3.1$. Некоторые данные из [34]

Табл. 1. Некоторые данные эксперимента LEUTL

Параметры электронного пучка:			
$\gamma = 499.02$, $P_E = 46.92$ ГВт, $J = 4.423 \times 10^8$ А/м ² , $\Sigma_{\text{full}} = 4.16 \times 10^{-7}$ м ² , $I_0 = 184$ А, $\sigma_e = 10^{-3}$, $\zeta \approx 1.04$			
Параметры ондулятора и ЛСЭ:			
$k = 3.1$, $\lambda_u = 3.3$ см, $L_s = 16$ м, $L_{\text{gain}} = 0.86$ м			
Номер гармоники	$n = 1$	$n = 3$	$n = 5$
f_n	0.755	0.340	0.228
$\tilde{\rho}_n$	0.00214	0.00130	0.00100
λ_n , нм	385	128	77
$P_{F,n}$, Вт (с формулами (4)–(5))	1.2×10^8	1.0×10^6	6×10^4
$P_{F,n \text{ OLD}}$, Вт Предыдущая модель	1.2×10^8	1.5×10^5	1×10^3

и результаты моделирования приведены в табл. 1. Мы моделировали ЛСЭ с пучком энергии 255 МэВ, который генерировал излучение с $\lambda_1 = 385$ нм (см. детали в [34]). Жирным шрифтом отмечены отличающиеся друг от друга результаты, полученные с (5) и в старой версии модели (см. например, [21]), где использовалось только второе слагаемое в (5); мощность насыщения в старой модели соответствует первой ступени насыщения в ее новой версии (5).

Результаты моделирования и эксперимента (по данным [34]) представлены на рис. 1, где по оси z отложена длина ондуляторов без зазоров. Сплошная красная линия на рис. 1 феноменологически описывает мощность гармоники с $n = 1$, штриховая зеленая — $n = 3$, жирная пунктирная синяя — $n = 5$. Результаты моделирования соответствуют данным эксперимента (точки для $n = 1$ и темная область измеренных значений мощности насыщения для $n = 3, 5$ на рис. 1) и численного моделирования значительно лучше, чем в ранней версии модели (ср. с результатом в [13]). В частности, моделируется постепенный двухступенчатый выход гармоник на насыщение. Феноменологическая модель предсказывает значения мощности излучения, которые даже ближе к измеренным,

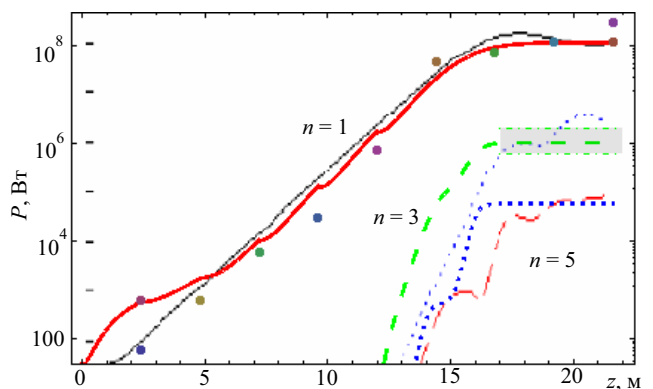


Рис. 1. Эволюция мощности гармоник в эксперименте LEUTL с $E = 255$ МэВ, $\sigma_e = 10^{-3}$, $I_0 = 184$ А. Гармоники в феноменологической модели: $n = 1$ — красная сплошная, $n = 3$ — зеленая штриховая, $n = 5$ — синяя пунктирная линии. Гармоники в PERSEO: $n = 1$ — черная сплошная, $n = 3$ — синяя пунктирная, $n = 5$ — красная штриховая (тонкие линии). Экспериментальные данные для первой гармоники — точки, диапазон значений для измеренных вместе высших гармоник — темная область справа

Табл. 2. Некоторые данные эксперимента LCLS

Параметры электронного пучка: $\gamma = 8400$, $P_E = 4292$ ГВт, $J = 2.23 \times 10^{11}$ А/м ² , $\Sigma = 4.49 \times 10^{-9}$ м ² , $I_0 = 1$ кА, $\sigma_e = 0.3 \times 10^{-3}$, $\zeta \approx 1.02$				
Параметры ондулятора и ЛСЭ: $k = 3.5$, $\lambda_u = 3.0$ см, $L_s = 23.7$ м, $L_{\text{gain}} = 1.44$ м				
Номер гармоники	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 5$
$f_{n,1}$	0.7430	0.0566	0.3335	0.2205
$\tilde{\rho}_n$	0.0010411	0.00017	0.00062	0.00048
λ_n , нм	1.5	0.75	0.5	0.3
$P_{F,n}$, Вт (с формулами (4)–(5))	5.9×10^9	0.7×10^6	7.5×10^7	8.8×10^6
$P_{F,n \text{ OLD}}$, Вт Предыдущая модель	5.9×10^9	2.8×10^4	2.7×10^7	4.5×10^5

чем моделирование авторов эксперимента в [34] (не приводится на рисунке). Моделирования ЛСЭ с энергией электронов $E = 217$ МэВ и длиной волны излучения $\lambda = 530$ нм показало такое же хорошее согласие с экспериментом.

2.2. Моделирование эксперимента LCLS

В ЛСЭ эксперименте LCLS [35, 36] с ондулятором с периодом $\lambda_u = 3$ см и $k = 3.5$ получены жесткое и мягкое рентгеновские излучения на длинах волны $\lambda_1 = 0.15$ нм и $\lambda_1 = 1.5$ нм, в зависимости от энергии электронов. Мы провели моделирование эксперимента с пучком электронов с энергией $E = 4.3$ ГэВ и током 1 кА; разброс энергий электронов составлял $\sigma_e = 3 \times 10^{-4}$, нормализованный эмиттанс по обеим координатам $\varepsilon_{x,y} = 0.4$ мм×мрад, параметры Твисса $\beta = 15$ м; длина волны основного тона $\lambda_1 = 1.5$ нм. Некоторые данные эксперимента и моделирования представлены в табл. 2.

Полужирным шрифтом выделены отличающиеся друг от друга результаты, полученные с одним и с двумя слагаемыми в (5). В эксперименте была зарегистрирована 3-я гармоника ЛСЭ с мощностью $\approx 2\text{--}3\%$ мощности основного тона, мощность 5-й гармоники оценивалась в ~ 0.1 мощности 3-й гармоники и мощность 2-й гармоники — $\sim 0.04\%\text{--}0.1\%$ от мощности основного тона [36]. Четные гармоники на оси возникают в результате того, что пучок имеет конечные размеры; их моделирование проведено со значением феноменологического угла $\theta = 2\theta_{x,y}$, влияние которого на нечетные гармоники мало. Результаты моделирования и измеренные в эксперименте значения показаны на рис. 2.

Длина насыщения основного тона и гармоник хорошо передается моделью. Мощность насыщения основного тона несколько больше, чем в эксперименте; это объясняется тем, что модель передает пиковую мощность, а в эксперименте измеряется средняя мощность насыщения с учетом ее осцилляций, которая может быть меньше. Диапазон экспериментально оцененной мощности насыщения гармоник показан штрихпунктирными линиями на рис. 2. Отметим, что феноменологическое моделирование дает результат для мощности гармоник точно

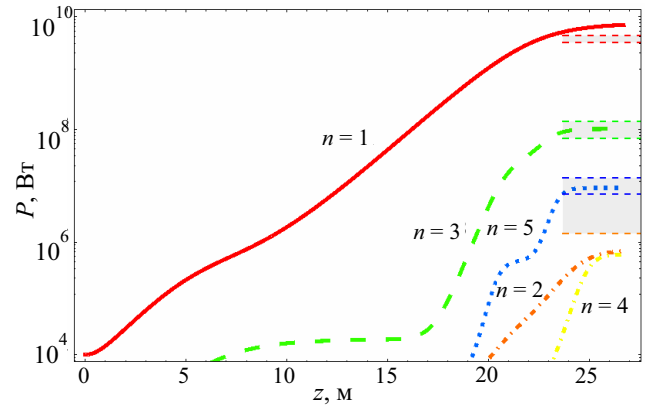


Рис. 2. Эволюция мощности гармоник в эксперименте LCLS «низкой энергии»: $E = 4.3$ ГэВ, $I_0 = 1$ кА, $\sigma_e = 3 \times 10^{-4}$, $\varepsilon_{x,y} = 0.4$ мм×мрад, $\beta = 15$ м, $\lambda_u = 3$ см, $k = 3.5$. Гармоники в феноменологической модели: $n = 1$ — красная сплошная, $n = 3$ — зеленая штриховая, $n = 5$ — синяя пунктирная, $n = 2, 4$ — оранжевая и желтая штрихпунктирные линии. Диапазон измеренных значений для гармоник — темные области справа

в диапазоне измеренных значений. Это подтверждает обоснованность нашего подхода. Мощность четных гармоник в модели несколько ниже, чем в зарегистрированной возможно потому, что нами не учитываются бетатронные колебания. Учет последних дополнительно вносит эффективное отклонение на угол, сравнимый с θ , и тогда значения попадают в измеренный диапазон.

В эксперименте LCLS с пучком электронов с $\gamma = 26600$, разбросом энергии $\sigma_e = 1 \times 10^{-4}$ насыщение основного тона смоделировано нами на длине ~ 57.4 м, что идеально согласуется с измеренным значением с вычетом промежутков между ондуляторами ЛСЭ. Длина усиления $L_{\text{gain}} = 3.8$ м в феноменологической модели находится в расчетном интервале 3.5–4 м [35] и близка к измеренной 3.5 м. В жестком рентгеновском диапазоне 2-я гармоника с $\lambda_2 = 0.075$ нм не была экспериментально зарегистрирована; 3-я гармоника имела на выходе мощность $0.2 < 2\%$ от мощности основного тона [36]. Моделирование в этом случае также хорошо воспроизводит эксперимент, график не приводим для краткости.

2.3. Моделирование эксперимента SACLA на установке Spring 8

В ЛСЭ эксперименте SACLA на установке SPRING 8 [37], было получено излучение в мягком рентгеновском диапазоне $\lambda_1 \sim 1\text{--}12$ нм. Мы апробировали феноменологическую модель, смоделировав эволюцию мощности гармоник для максимальных значений параметров установки: $k = 2.1$, энергии электронов $E = 800$ МэВ и разброса $\sigma_e = 0.45 \times 10^{-3}$, тока $I = 300$ А (значение тока не измерялось, а было получено путем моделирования разработчиками ЛСЭ (см. [37])). Некоторые данные эксперимента SACLA на установке SPRING 8 и его моделирования приведены в табл. 3.

Моделирование (рис. 3) дает максимальную мощность основного тона ≈ 0.25 ГВт, длину усиления $L_g = 1.2$ м и длину насыщения $L_s \approx 14$ м в согласии с [37]. Неплохое согласие наблюдается также

Табл. 3. Некоторые данные эксперимента SACLA на установке SPRING 8

Параметры электронного пучка: $\gamma = 1570$, $P_E = 240.7$ ГВт, $J = 5.00 \times 10^9$ А/м ² , $\Sigma = 6.00 \times 10^{-8}$ м ² , $I_0 = 300$ А, $\sigma_e = 0.45 \times 10^{-3}$, $\zeta \approx 1.05$			
Параметры ондулятора и ЛСЭ: $k = 2.1$, $\lambda_u = 1.8$ см, $L_s = 13.9$ м, $L_{\text{gain}} = 1.21$ м			
Номер гармоники	$n = 1$	$n = 3$	$n = 5$
$f_{n,1}$	0.8012	0.3286	0.1989
$\tilde{\rho}_n$	0.00086	0.00048	0.00034
λ_n , нм	11.7	3.9	2.34
$P_{F,n}$, Вт (с формулами (4)–(5))	2.4×10^8	2.0×10^6	1.4×10^5
$P_{F,n \text{ OLD}}$, Вт Предыдущая модель	2.4×10^8	1.1×10^5	80

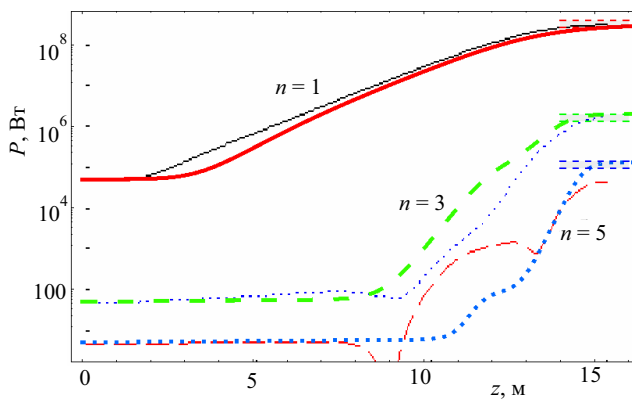


Рис. 3. Эволюция мощности излучения в эксперименте Spring 8 с $\gamma = 1570$, $\sigma_e = 4.5 \times 10^{-4}$, $\beta = 5$ м, $\varepsilon_{x,y}^n = 3$ мм-мрад, $\lambda_u = 1.8$ см, $k = 2.1$. Гармоники в феноменологической модели (с (4), (5)): $n = 1$ — красная сплошная, $n = 3$ — зеленая штриховая, $n = 5$ — синяя пунктирная линии. Гармоники в PERSEO: $n = 1$ — черная сплошная, $n = 3$ — синяя точечная тонкая, $n = 5$ — красная штриховая тонкая линии. Измеренные значения для гармоник — отмеченные штрихами области справа

с численной симуляцией на рис. 3. На нем показана мощность излучения ЛСЭ без учета начального шума (3), который маскирует начальный этап эволюции гармоник. Из-за относительно большого разброса энергий электронов независимая генерация гармоник идет слабо; рост мощности гармоник индуцирован основным тоном. Мы получили отношение мощностей 3-й и 1-й гармоник $P_{F,3}/P_{F,1} \approx 0.8\%$, что очень хорошо согласуется с измеренным значением 0.5%. Более того, для 5-й и 3-й гармоник отношение мощностей насыщения составляет $P_{F,5}/P_{F,3} \approx 7\%$, что точно соответствует измеренному в эксперименте значению.

Результаты моделирования и эксперимента представлены на рис. 3.

Преимущество представленной выше модели над ее предыдущей версией (например, [13]) становится очевидным, если сравнить их предсказания с экспериментами (рис. 1 и рис. 3 (см. выше) ср. соответственно с рис. 3 и рис. 5 в [13]). Нами также были смоделированы другие ЛСЭ; результаты во всех случаях соответствовали экспериментам.

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛСЭ С 3-Й ГАРМОНИКОЙ ПОЛЯ СПИРАЛЬНОГО ОНДУЛЯТОРА

Предложенное выше описание мощности излучения однопроходного ЛСЭ использует элементарные функции и простые аналитические формулы, которые легко посчитать на персональном компьютере. Результаты, как показано в разд. 3, хорошо согласуются с экспериментальными данными и численными симуляциями. Трехмерные численные модели, конечно, могут точнее описать процессы в ЛСЭ и поэтому используются при проектировании установок. Не претендуя на роль инструмента для проектирования ЛСЭ, приближенное аналитическое описание, в отличие от специализированных численных программ типа GENESIS, MEDUSA и др., позволяет оценить параметры ЛСЭ с произвольной конфигурацией магнитного поля в ондуляторе. Это может быть использовано на начальном этапе, когда вырабатывается предложение для проекта ЛСЭ и важна оценка влияния параметров поля ондулятора и пучка для выявления тех или иных особенностей излучения. Рассмотрим, например, ондулятор KAERI со следующим магнитным полем [38]:

$$\mathbf{H} = H_0(\sin(k_\lambda z) - d \sin(hk_\lambda z), \cos(k_\lambda z) + d \cos(hk_\lambda z), 0), h \in \mathbb{Z}. \quad (13)$$

В эксперименте со спонтанным ОИ [38] в ондуляторе с $k = 2.21622$, $\lambda_u = 2.3$ см присутствовала 3-я гармоника поля, $h = 3$, с амплитудой $d = 0.0825$; она может быть и сильнее с $d \sim 0.3$. Рассмотрим, как будет работать ЛСЭ с таким ондулятором и пучком электронов установки SPRING 8 с $\gamma = 1570$, $I = 300$ А, $\sigma_e = 4.5 \times 10^{-4}$, $\beta = 5$ м, $\varepsilon_{x,y}^n = 3$ мм-мрад. Коэффициенты Бесселя для ондулятора с полем (13) получены в [20]; мы не приводим эти выражения для краткости. Предложенная нами выше аналитическая модель немедленно дает эволюцию мощности излучения гармоник ЛСЭ на рис. 4.

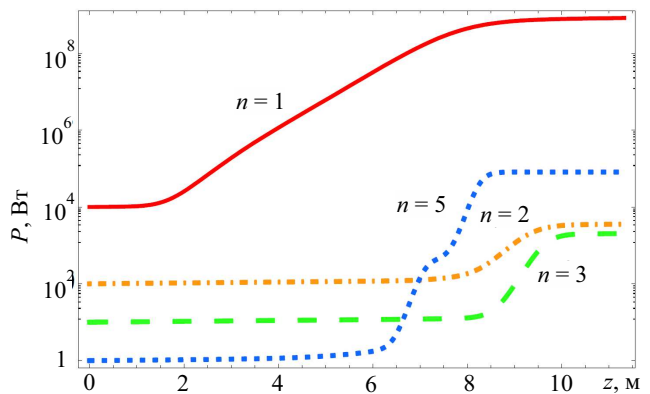


Рис. 4. Эволюция мощности излучения ЛСЭ с эллиптическим ондулятором KAERI и пучком электронов установки SPRING 8 с $\gamma = 1570$, $I = 300$ А, $\sigma_e = 4.5 \times 10^{-4}$, $\beta = 5$ м, $\varepsilon_{x,y}^n = 3$ мм-мрад; $\lambda_u = 2.3$ см, $k = 3.2$ с гармоникой поля $d = 0.3$ см. Гармоники ЛСЭ в феноменологической модели (с (4), (5)): $n = 1$ — красная сплошная, $n = 2$ — оранжевая штрихпунктирная, $n = 3$ — зеленая штриховая, $n = 5$ — синяя пунктирная линии

На рис. 4 обращает на себя внимание индуцированная основным тоном 5-я гармоника излучения (синяя пунктирная линия), которая существенно мощнее, чем 3-я и 2-я гармоники, и выходит на насыщение раньше их. Оценка параметров ЛСЭ с ондулятором с полем (13) такова: длина усиления $L_g \sim 0.6$ м, длина ондуляторов, на которой достигается насыщение, $L_s \sim 8.3$ м, частота основного тона ЛСЭ $\lambda_1 = 53$ нм. Таким образом, мы получили физически значимый результат: с 3-й гармоникой поля эллиптических ондуляторов, кроме основного тона, излучается 5-я гармоника ЛСЭ с $\lambda_5 = 10.5$ нм, которая значительно сильнее, чем 3-я гармоника ЛСЭ с $\lambda_3 = 17.5$ нм. Более того, 2-я и 3-я гармоники ЛСЭ пренебрежимо малы на длине ~ 8 м вблизи насыщения и растут позднее (рис. 4). В обычном спиральном ондуляторе, напротив, излучается только основной тон и возможна 2-я гармоника за счет конечного эмиттанта пучка.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дано феноменологическое описание нелинейной генерации гармоник вблизи насыщения в однопроходных ЛСЭ. При этом учтены все факторы, вызывающие ослабление электронно-волнового взаимодействия на высших гармониках и их излучения. По сравнению с предыдущим подходом [11–15] новый формализм включает два члена в (5), которые описывают упреждающий рост мощности гармоник до первой стадии насыщения и их постепенный рост в режиме насыщения с выходом на конечную мощность. Это корректирует динамику и полную мощность насыщения гармоник на 1–2 порядка по сравнению с ранее применявшимися формулами (табл. 1–3).

Проведена апробация модели с различными экспериментами ЛСЭ в широком диапазоне значений параметров установок и длин волн излучения от 500 нм до 0.3 нм. Установлено, что новая модель нелинейной генерации гармоник в ЛСЭ и их поэтапного выхода на уровень насыщения отлично описывает все смоделированные эксперименты. Длина насыщения, эволюция гармоник и их конечная мощность хорошо укладываются в экспериментальный диапазон значений, что далеко не всегда получается даже с использованием сложных трехмерных численных симуляций.

Разработанное аналитическое описание эволюции мощности ЛСЭ применимо к произвольной сколь угодно сложной конфигурации магнитного поля ондулятора.

Проведен расчет излучения ЛСЭ с 3-й гармоникой поля эллиптического ондулятора. Показано, что 3-я гармоника эллиптического поля вызывает мощную 5-ю гармонику излучения, которая значительно сильнее, чем 3-я и 2-я гармоники ЛСЭ; последние пренебрежимо малы даже около длины насыщения.

Таким образом, феноменологическая модель ЛСЭ в представленном виде может использоваться для точной и быстрой оценки излучения гармоник на предварительном этапе разработки проекта ЛСЭ до привлечения специалистов для численного программирования и расчета узлов и конструкции установки.

Авторы выражают благодарность проф. А. В. Борисову, проф. А. Н. Васильеву, вед. науч. сотруднику А. Лобанову за обсуждение и А. М. Калитенко за предоставленные данные моделирования PERSEO.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гинзбург В. Л. // Изв. АН СССР (Физика). 1947. **11**. С. 1651.
2. Motz H., Thon W., Whitehurst R. N. J. // Appl. Phys. 1953. **24**. P. 826.
3. McNeil B. W. J., Thompson N. R. // Nature Photonics. 2010. **4**. P. 814.
4. Pellegrini C., Marinelli A., Reiche S. // Rev. Mod. Phys.. 2016. **88**. P. 015006.
5. Schmäser P., Dohlus M., Rossbach J., Behrens C. // Free-Electron Lasers in the Ultraviolet and X-Ray Regime. In: Springer Tracts in Modern Physics, **258**, Cham (ZG), Springer International Publishing. 2014.
6. Huang Z., Kim K. J. // Phys. Rev. ST-AB. 2007. **10**. 034801.
7. Margaritondo G., Ribic P. R. // J. Synchrotron Rad. 2011. **18**. P. 101.
8. Margaritondo G. // Rivista del Nuovo Cimento. 2017. **40**, N 9. P. 411.
9. Багров В. Г., Бисноватый-Коган Г. С., Бордовичин В. А. и др. Теория излучения релятивистских частиц. М: Физматлит, 2002.
10. Margaritondo G. Characteristics and Properties of Synchrotron Radiation. In: Synchrotron Radiation / Mobilio S., Boscherini F., Meneghini C. (eds). Springer, Berlin, Heidelberg. 2015.
11. Zhukovsky K., Kalitenko A. // J. Synchrotron Rad. 2019. **26**. P. 159.
12. Жуковский К. В., Калитенко А. М. // Изв. Вузов. Физика. 2019. **62**, N 2. P. 153.
13. Жуковский К. В., Калитенко А. М. // Изв. Вузов. Радиофизика. 2019. **62**, N 1. P. 58.
14. Zhukovsky K., Kalitenko A. // J. Synchrotron Rad. 2019. **26**. P. 605.
15. Zhukovsky K. // J. Optics. 2018. **20**, N 9. 095003.
16. Dattoli G., Ottaviani P. L. // Opt. Comm. 2002. **204**, N 1. P. 283.
17. Dattoli G., Mikhailin V. V., Ottaviani P. L., Zhukovsky K. // J. Appl. Phys. 2006. **100**. 084507.
18. Saldin E. L., Schneidmiller E. A., Yurkov M. V. The Physics of Free Electron Lasers, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000.
19. Bonifacio R., Pellegrini C., Narducci L. // Opt. Comm. 1984. **50**. P. 373.
20. Zhukovsky K. // Results in Physics. 2019. **13**. 102248.
21. Zhukovsky K. // J. Phys. D. 2017. **50**. 505601.
22. Bonifacio R., De Salvo L., Pierini P. // Nucl. Instrum. A. 1990. **293**. P. 627.
23. Huang Z., Kim K.-J. // Phys. Rev. E. 2000. **62**. P. 7295.
24. Saldin E. L., Schneidmiller E. A., Yurkov M. V. // Opt. Comm. 2002. **202**. P. 169.
25. Shafan T., Yu L.-H. // Phys. Rev. E. 2005. **71**. 046501.
26. Li H.-T., Jia Q.-K. // Chinese Physics C. 2013. **37**, N 2. 028102.
27. Dattoli G., Ottaviani P. L., Pagnutti S. // J. Appl. Phys. 2005. **97**. 113102.
28. Zhukovsky K., Potapov I. // Laser Part. Beams. 2017. **35**. P. 326.
29. Dattoli G., Giannessi L., Ottaviani P. L., Ronsivalle C. // J. Appl. Phys. 2004. **95**. P. 3206.
30. Жуковский К. В. // Вестн. Моск. ун-та. 2018. № 5. С. 18. (Zhukovsky K. V. // Moscow Univ. Phys. Bull. 2018. **73**, N 5. P. 462.)

31. Жуковский К. В. // ЖТФ. 2019. **89**, № 3. С. 426.
32. Zhukovsky K. // Opt. Comm. 2018. **418**. P. 57.
33. Zhukovsky K. // J. Appl. Phys., 2017. **122**. 233103.
34. Milton S. V., Gluskin E., Arnold N. D. et al. // Science. 2001. **292**. P. 2037.
35. Emma P., Akre R., Arthur J. et al. // Nature. Photonics. 2010. **4**. P. 641.
36. Ratner D., Brachmann A., Decker F.J. et al. // Phys. Rev. ST-AB. 2011. **14**. P. 060701.
37. Owada S., Togawa K., Inagaki T. et al. // J. Synchrotron Rad. 2018. **25**. P. 282.
38. Lee K., Mun J., Park S.-H. et al // Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. A 2015. **776**. P. 27.

Analytical Description of Nonlinear Harmonic Generation Close to the Saturation Region in Free Electron Lasers

K. V. Zhukovsky

Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University.

Moscow 119991, Russia.

E-mail: zhukovsk@physics.msu.ru.

The phenomenological modeling of nonlinear harmonic generation in single-pass free electron laser (FEL) experiments was performed. The gradual saturation of the harmonic power and its evolution around the saturated regime was modeled. The model includes all major losses for each harmonic with account for the fact that the undulator radiation (UR) and the electron-wave interaction at higher harmonic wavelengths are more sensitive to the beam energy spread, divergence, and other factors. The results of the phenomenological modeling are compared with the experimental data of the corresponding FELs and with the numerical simulation. The proposed description of nonlinear harmonic generation appears to be in good agreement with the FEL experiments SALCA, LEUTL, LCLS, and others under various conditions. The results also match their numerical simulations; in contrast to the latter, our phenomenological model allows rapid, still, and accurate modeling of the FEL harmonic power and bunching evolution with a PC or even an engineering calculator. The model permits studying FEL radiation from undulators with arbitrary magnetic field configuration. Using the analytical FEL model, we demonstrate that, in contrast to the helical undulator, in whose spectrum the fundamental and the second harmonics prevail, the FEL radiation from the elliptical undulator with the third field harmonic has a distinct fifth UR harmonic as well as the fundamental one, whereas other harmonics can be ignored even close to the saturation length.

Keywords: undulator, free electron laser, harmonic generation.

PACS: 41.60 m, 41.60.Ap, 41.60.Cr.

Received 17 May 2019.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2019. **74**, No. 5. Pp. 480–487.

Сведения об авторе

Жуковский Константин Владимирович — доктор физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-31-77,
e-mail: zhukovsk@physics.msu.ru.