Оптимальная стратегия выбора инвестиционных портфелей в многошаговой задаче с пошаговыми квантильными ограничениями и возможностью банкротства

Голубин А.Ю.
НИУ Высшая школа экономики МИЭМ;
Центр информационных технологий в проектировании РАН
agolubin@hse.ru

Аннотация

В работе исследована много-шаговая задача инвестирования с разрешением так называемых коротких продаж, пошаговыми квантильными ограничениями и возможностью банкротства. Найдена оптимальная в отношении среднего значения финального капитала стратегия инвестирования. Как показано, она имеет относительно простой вид: каждый оптимальный портфель на соответствующем шаге зависит только от номера шага и не зависит от значения текущего капитала инвестора. В результате, исходная задача сводится к решению конечного числа одно-шаговых залач выбора оптимального портфеля. Для такой одно-шаговой задачи в работе представлены необходимые и достаточные условия непустоты и ограниченности множества допустимых портфелей, а также выполнения условия регулярности Слейтера. Кроме нормальной модели распределения суммарного дохода, использовано распределение Лапласа, относящееся к т.н. эллиптическим распределениям.

1 Введение

Квантильное ограничение (Value at risk (VaR)) в литературе по формированию инвестиционных портфелей является одним из самых используемых ограничений на меру риска после известной работы Марковица [10], где в качестве меры риска была предложена дисперсия капитала инвестора. Это ограничение определяет вероятность, с которой капитал инвестора должен превысить заданное значение при следующей котировке активов. Хотя этот подход и подвергается критике (см., например, Szego [12]), в [3,14] отмечается, что VaR в настоящее время является стандартом в финансовой индустрии. Как и в работах (Pinar [11], Duffie и Pan [2]), мы используем нормальное распределение для аппроксимации суммарного возврата (the total return) и, на этой основе, сводим одношаговую оптимизационную задачу при VaR ограничении к задаче конусного программирования. В отличие от известных автору результатов, в представленной работе найдены не только достаточные, но и необходимые условия для: непустоты множества допустимых решений, выполнения условия Слейтера и существования решения. Доказанные утверждения базируются на свойствах конуса, двойственного к конусу, задаваемому VaR ограничением.

Много-шаговая задача инвестирования с VaR ограничениями, но без возможности банкротства изучалась в [11]. Но, как отмечено в [9,13], банкротство, т.е. уход капитала инвестора ниже заданного значения, когда дальнейшие сделки по инвестированию запрещены, играет существенную роль в финансовых расчетах. Основной результат в представленной работе состоит в доказательстве того, что рассматриваемая много-шаговая задача инвестирования с пошаговыми VaR ограничениями и возможностью банкротства имеет решение, где каждая компонента (т.е. оптимальный портфель на шаге t), зависит только от номера шага t и не зависит от значения текущего капитала инвестора x (>0). Исходная много-шаговая задача сводится к решению конечного числа одно-шаговых задач, в которых целевые функции определяются рекуррентной формулой, что позволяет относительно легко (в отношении вычислительных затрат) определить инвестиционную стратегию. В отличие от [9,13], где риск банкротства на каждом шаге оценивался с помощью неравенства Чебышева, мы исследуем задачу «в полном объеме», т.е. решая уравнения динамического программирования, в которых предусмотрена возможность банкротства на каждом шаге. Близкая по постановке задача изучалась в Keykhaei [7], однако автор рассматривал рынок, состоящий только из двух активов, и банкротство означало попадание некоторой конечной марковской цепи в поглощающее состояние, в то время как в нашей модели банкротство означает падение капитала инвестора ниже нулевого значения.

2 Вспомогательные результаты

Рассмотрим одно-шаговую модель выбора оптимального инвестиционного портфеля (см., например, [11]), где случайный вектор доходностей обозначается как $R = (R_0, \dots, R_n)$, R_i представляет изменение стоимости i-го актива в процентах. Пусть $R_0 = m_0$ почти наверное (п.н), т.е. это – безрисковый актив. Обозначим через $\bar{a} \in R^{n+1}$ инвестиционный портфель, где a_i - доля в процентах от начального капитала $x_0 > 0$, инвестированная в i-ый актив. Обычное бюджетное ограничение выглядит как $\sum_{i=0}^n a_i = 1$, что означает самофинансирование инвестора и, вместе с тем, разрешение «коротких продаж», те. взятие взаймы некоторых активов по текущей стоимости с целью вложения этих денег в другие активы. Целевой функцией является математическое ожидание суммарного возврата,

$$\mathrm{E}\, X_{\bar{a}} = \mathrm{E}\, x_0 \sum_{i=0}^{n} a_i R_i = x_0 \sum_{i=0}^{n} a_i m_i,$$

где $m_i = \mathrm{E}\, R_i$. Дополнительное ограничение (VaR ограничение) на финальный капитал инвестора имеет вид

$$P\{X_{\bar{a}} \geq \alpha^0\} \geq \beta \text{ или } P\{\sum_{i=0}^{n} a_i R_i \geq \alpha\} \geq \beta,$$

где $\alpha = \alpha^0 / x_0 > 0$ -- заданная нижняя граница для изменения капитала инвестора в процентах, $\beta \in (0.5,1)$ -- заданный уровень доверия. После подстановки $a_0 = 1 - \sum_{i=1}^n a_i$, получаем оптимизационную задачу

$$\max_{a \in R^n} < a, \Delta m > \quad \text{при ограничении}$$

$$P\left\{m_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i (R_i - m_0) \geq \alpha\right\} \geq \beta, \qquad (1)$$

где $\Delta m = (m_1 - m_0, \dots, m_n - m_0)$ и $< x, y >$ есть скалярное произведение, $\sum_{i=1}^n x_i y_i$. Используя нормальную модель [4] для моделирования распределения суммарного возврата, приходим к задаче

$$\max_{a \in R^n} < a, \Delta m >,$$

$$\text{при ограничении } a \in D \stackrel{\text{def}}{=} \left\{a \in R^n : \sqrt{aCa'} \leq \frac{1}{x_\beta}[< a, \Delta m > + m_0 - \alpha]\right\}. \qquad (2)$$

Здесь a' обозначает транспонированный вектор a, x_β -- квантиль стандартного нормального распределения порядка β, C -- $n \times n$ матрица ковариаций вектора доходностей $(R_1, \dots, R_n)$.

Всюду ниже мы будем использовать следующие естественные предположения:

$$0 < m_0 < \min_{i=1,\dots,n} m_i,$$

матрица ковариации C положительно определена.

Формулировка задачи оптимизации (2) известна (см., например, [2,11]). Тем не менее, Утверждение 1 ниже приводит – в отличие от [11] – не только достаточные, но и необходимые условия для того, чтобы: множество D допустимых портфелей было не пусто, условие регулярности Слейтера было выполнено.

Определим конус второго порядка (см., например, [1]) как $K = \{(a, t) \in R^{n+1} : \sqrt{aCa'} \leq t\}$. Известно, что такой конус регулярен, т.е. он является выпуклым, замкнутым, $\mathrm{Int}\, K \neq \emptyset$ и, если $x \in K, -x \in K$, то $x = 0$. Задача (2) тогда может быть переформулирована как задача конусного программирования [1]

$$\max < a, \Delta m >$$

$$\text{при ограничении } \left(a, \frac{[< a, \Delta m > + m_0 - \alpha]}{x_\beta}\right) \in K. \qquad (3)$$

Для анализа (3) нам понадобится описание конуса, двойственного к K. По определению, двойственный конус $K^* = \{x \in R^{n+1} : < x, y > \geq 0 \text{ для всех } y \in K\}$.

Лемма 1.

Двойственный конус

$$K^* = \left\{(u, v) \in R^{n+1} : \sqrt{uC^{-1}u'} \leq v\right\}. \qquad (4)$$

Доказательство. Как показано в [1], двойственный конус также может быть определен как $K^* = \{(u, v) \in R^{n+1} : ||u||_* \leq v\}$, где норма $||u||_* = \sup_x \{ux' : ||x||_C \leq 1,$

$||x||_C = \sqrt{xCx'}\}$. Для описания двойственной нормы, рассмотрим следующую оптимизационную задачу

$$\max_x\ ux' \text{ при ограничении } ||x||_C^2 \le 1.$$

После применения метода множителей Лагранжа, имеем

$$(ux' - \lambda xCx^T)'_x = 0, \quad \text{т.е.} \quad u - 2\lambda Cx' = 0.$$

Тогда $x^* = (2\lambda)^{-1}C - 1u'$. Поскольку $||x^*||_C = 1$, получаем (принимая во внимание, что $(C^{-1})' = C^{-1}$) $2\lambda = \sqrt{uC^{-1}u'}$. Тогда $u(x^*)' = \sqrt{uC^{-1}u'}$.

Утверждение ниже – модификация результата в [11] (см. также[5], где представлено доказательство с использованием двойственного конуса K^*).

Утверждение 1

1. Множество допустимых портфелей $D \ne \emptyset$ тогда и только тогда, когда

$$\sqrt{\Delta m C^{-1}\Delta m'} > x_\beta \text{ или, иначе, } m_0 \ge \alpha.$$

2. Внутренняя часть $\mathrm{Int}\ D \ne \emptyset$ (т.е. условие регулярности Слейтера выполнено) тогда и только тогда, когда

$$\sqrt{\Delta m C^{-1}\Delta m'} > x_\beta \text{ или, иначе, } m_0 > \alpha. \quad (5)$$

3. Множество $D \ne \emptyset$ и ограничено тогда и только тогда, когда

$$\sqrt{\Delta m C^{-1}\Delta m'} < x_\beta \text{ и } m_0 \ge \alpha. \quad (6)$$

Следующее утверждение устанавливает только достаточные условия для того, чтобы: множество D допустимых портфелей было не пусто и условие регулярности Слейтера было выполнено. Эти условия проще, чем условия в Утверждении 1, поскольку они не используют матрицу C^{-1}. Обозначим через j индекс, при котором $\sigma_i - \Delta m_i/x_\beta$ достигает минимума, $i = 1, \dots n$, где $\sigma_i = \sqrt{\mathrm{Var}\ R_i}$.

Утверждение 2

1. Пусть $\sigma_j - \dfrac{\Delta m_j}{x_\beta} < 0$, или $\sigma_j - \dfrac{\Delta m_j}{x_\beta} \ge 0$ и $m_0 \ge \alpha$, тогда $D \ne \emptyset$. (7)

2. Пусть $\sigma_j - \dfrac{\Delta m_j}{x_\beta} < 0$, или $\sigma_j - \dfrac{\Delta m_j}{x_\beta} \ge 0$ и $m_0 > \alpha$, тогда $\mathrm{Int}\ D \ne \emptyset$. (8)

Доказательство. Рассмотрим портфели вида $a^j = (0, \dots, 0. a_j, 0, \dots, 0)$, где j-я компонента $a_j \in (-\infty, \infty)$. Очевидно, тогда ограничение в (2) принимает вид $|a_j|\sigma_j - a_j\Delta m_j/x_\beta \le (m_0 - \alpha)/x_\beta$. Поскольку $|a_j|\sigma_j - a_j\Delta m_j/x_\beta \ge 0$ для $a_j \in (-\infty, \infty)$ если $\sigma_j - \Delta m_j/x_\beta \ge 0$, и

$$|a_j|\sigma_j - a_j\Delta m_j/x_\beta = a_j(\sigma_j - \Delta m_j/x_\beta) < 0$$

для $a_j > 0$ если $\sigma_j - \Delta m_j/x_\beta < 0$, мы получаем, что утверждение доказано.

Следующая теорема – просто следствие известного утверждения [3, с. 267] о необходимых и достаточных условиях оптимальности для рассматриваемой вогнутой задачи конусного программирования при выполненном условии Слейтера.

Утверждение 3

Пусть условие (5) или (8) выполнено. Допустимый портфель a^* оптимален в задаче (3) тогда и только тогда, когда существует вектор $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu) \in K^*$ (см. (4)) такой, что

$$\Delta m\left(1 + \frac{\mu}{x_\beta}\right) + \lambda = 0 \text{ и } a^*\lambda' + \mu[< a^*, \Delta m > + m_0 - \alpha]/x_\beta = 0.$$

3 Многошаговая задаче выбора инвестиционных портфелей с возможностью банкротства

Пусть инвестиционный горизонт разделен на T шагов, вектор доходностей на шаге t обозначается как $R^t = (R_0^t, \dots, R_n^t)$, где $R_0^t = m_0^t$ п.н. обозначает доходность безрискового актива. Предполагается, что векторы $(R_1^t, \dots, R_n^t)$ являются независимыми и имеют многомерное нормальное распределение со средними векторами m^t и положительно определенными ковариационными матрицами C_t, $t = 0, \dots, T-1$. Пусть X_t -- капитал инвестора в момент t. Предполагается, что наложены пошаговые VaR ограничения (см. раздел 2), $P\{X_{t+1} \ge \alpha^t X_t\} \ge \beta^t$. Здесь $\alpha^t > 0$ -- нижняя граница для процентного изменения капитала инвестора на интервале $[t, t+1]$, и $\beta^t \in (0.5, 1)$ -- заданный уровень доверия, $t = 0, \dots, T-1$. Инвестиционную стратегию будем обозначать как $A = (a^0, \dots, a^{T-1})$, короткие продажи не запрещены.

Банкротство инвестора происходит, когда его капитал становится меньше либо равен нулю в какой-либо момент t, $t = 1, \dots, T-1$. Будем считать, что в состоянии банкротства инвестор не может заключать сделки по приобретению/продаже активов и, таким образом, его капитал не меняется вплоть до финального момента T. Тогда уравнение динамики капитала

$$X_{t+1} = \begin{cases} X_t\left[\sum_{i=1}^n a_i^t\left(R_i^t - m_0^t\right) + m_0^t\right], \text{ при } X_t > 0, \\ X_t, \text{ при } X_t \le 0, \\ t = 0, \dots, T-1; \; X_0 = x_0, \text{ где } x_0 > 0. \end{cases} \quad (9)$$

Предполагается, что инвестор стремится максимизировать среднее значение финального капитала. Таким образом, рассматриваемая многошаговая задача оптимального управления имеет вид

$$\begin{cases} \max\limits_A \mathrm{E}\, X_T \text{ при ограничениях} \\ (9) \text{ и } \mathrm{P}\{X_{t+1} \ge \alpha^t X_t\} \ge \beta^t, \end{cases} \quad (10)$$

где максимум берется по множеству A всех допустимых стратегий инвестирования, предсказуемых относительно естественной фильтрации. Напомним, что если $X_t \le 0$, то на оставшемся интервале $[t, T-1]$, т.е. на множестве $\{t, \dots, T-1\}$, решений об инвестировании не принимается.

Определим функцию Беллмана $V_t(x) = \max\limits_A \mathrm{E}\ X_T$ для управляемого процесса на интервале $[t, T]$ с начальным состоянием $X_t = x$. Обозначим через $Y_a^t \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_1^n a_i(R_i^t - m_0^t) + m_0^t$, нормально распределенную случайную величину с параметрами

$$\mu^t(a) =< a, \Delta m^t > +m_0^t \text{ и } \sigma^t(a) = \sqrt{aC_t a'}.$$

Тогда

$$V_T(x) = x; \;\; V_{T-1}(x) = \max_{a\in D_{T-1}} x\mathrm{E}\ Y_a^{T-1} = \max_{a\in D_{T-1}} xG_{T-1}(a) = xG_{T-1}\left(a_*^{T-1}\right) \text{ если } x > 0,$$

$$\text{и } V_{T-1}(x) = x \text{ если } x \le 0;$$

$$V_{T-2}(x) = \max_{a\in D_{T-2}} x\left\{\mathrm{E}\ \left[G_{T-1}\left(a_*^{T-1}\right)Y_a^{T-2}\middle|Y_a^{T-2} > 0\right]\mathrm{P}\left(Y_a^{T-2} > 0\right) + \mathrm{E}\ \left[Y_a^{T-2}\middle|Y_a^{T-2} \le 0\right]\mathrm{P}\left(Y_a^{T-2} \le 0\right)\right\} = \max_{a\in D_{T-2}} xG_{T-2}(a) = xG_{T-2}\left(a_*^{T-2}\right) \text{ при } x > 0,$$

$$\text{и } V_{T-2}(x) = x \text{ при } x \le 0; \dots$$

$$V_0(x) = \max_{a\in D_0} x\{\mathrm{E}\ [G_1(a_*^1)Y_a^0|Y_a^0 > 0]\mathrm{P}(Y_a^0 > 0) + \mathrm{E}\ [Y_a^0|Y_a^0 \le 0]\mathrm{P}(Y_a^0 \le 0)\} = \max_{a\in D_0} xG_0(a) = xG_0(a_*^0),$$

где $x > 0$.

Здесь D_t, множество допустимых портфелей на шаге t, есть (см. (2))

$$D_t = \left\{a \in R^n\colon \sqrt{aC_t(a)'} \le \frac{[< a, \Delta m^t > +m_0^t - \alpha^t]}{x_\beta^t}\right\}, \quad (11)$$

x_β^t -- квантиль стандартного нормального распределения порядка β^t и $\Delta m^t = (m_1^t - m_0^t, \dots, m_n^t - m_0^t)$, $t = 0, \dots, T-1$. Отметим, что D_t не зависит от текущего состояния x процесса X_t.

Введенные выше функции $G_t(a)$ могут быть определены рекуррентной формулой

$$G_t(a) = \max_{a\in D_t} \mathrm{E}[Y_a^t|Y_a^t > 0]\mathrm{P}(Y_a^t > 0)G_{t+1}(a_*^{t+1}) + \mathrm{E}[Y_a^t|Y_a^t \le 0]\mathrm{P}(Y_a^t \le 0), \; t = 0, \dots, T-1,$$

$$G_T(a) \equiv 1. \quad (12)$$

Здесь a_*^{t+1} – портфель, максимизирующий $G_{t+1}(a)$ на множестве D_{t+1}.

Замечание 1

Прокомментируем вывод выражения для $V_{T-2}(x)$ в случае $x > 0$. Функция Беллмана $V_{T-2}(x)$ строится как максимум (по a) от E $V_{T-1}(xY_a^{T-2})$, где

$$V_{T-1}(xY_a^{T-2}) = \begin{cases} xY_a^{T-2}G_{T-1}\left(a_*^{T-1}\right) \text{ если } xY_a^{T-2} > 0 \\ xY_a^{T-2} \text{ если } xY_a^{T-2} \le 0. \end{cases}$$

Поскольку $x > 0$, по формуле полного математического ожидания получаем

$$\mathrm{E}\ V_{T-1}(xY_a^{T-2}) = x\{\mathrm{E}\ [G_{T-1}(a_*^{T-1})Y_a^{T-2}|Y_a^{T-2} > 0]\mathrm{P}(Y_a^{T-2} > 0) + \mathrm{E}\ [Y_a^{T-2}|Y_a^{T-2} \le 0]\mathrm{P}(Y_a^{T-2} \le 0)\}.$$

Следующая теорема дает более точное представление для функций $G_t(a)$ и приводит необходимые условия оптимальности в задаче (10).

Теорема 1

Пусть

$$\sqrt{\Delta m^t C_t(\Delta m^t)'} < x_\beta^t \text{ и } m_0^t > \alpha^t, \quad t = 0, \dots, T-1. \quad (13)$$

Задача оптимального управления (10) имеет решение $A_* = (a_*^0, \dots, a_*^{T-1})$, где каждый портфель a_*^t зависит только от момента t принятия решения и не зависит от величины текущего состояния $x > 0$ процесса X_t. Если портфель a_*^t оптимален (на шаге t), то существует вектор $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu) \in K_t^* = \{(\lambda, \mu) \in R^{n+1} : \sqrt{\lambda C_t^{-1}\lambda'} \le \mu\}$ (см. (4)) такой, что

$$\nabla G_t(a_*^t) + \Delta m^t \frac{\mu}{x_\beta^t} + \lambda = 0 \tag{14}$$

$$a_*^t \lambda' + \frac{\mu[<a_*^t, \Delta m^t> + m_0^t - \alpha^t]}{x_\beta^t} = 0 \tag{15}$$

где $\nabla G_t(a)$ обознаает градиент $G_t(a)$,

$$G_t(a) = \max_{a \in D_t} \left\{ \overline{\Phi}\left[-\frac{\mu^t(a)}{\sigma^t(a)}\right] \mu^t(a) + \sigma^t(a) \phi\left[-\frac{\mu^t(a)}{\sigma^t(a)}\right] \right\} \times G_{t+1}(a_*^{t+1}) + \Phi\left[-\frac{\mu^t(a)}{\sigma^t(a)}\right] \mu^t(a) - \sigma^t(a) \phi\left[-\frac{\mu^t(a)}{\sigma^t(a)}\right], \tag{16}$$

$$G_T(a) \equiv 1.$$

Здесь через $\Phi(\cdot)$ and $\phi(\cdot)$ обозначены, соответственно, функция распределения и плотность стандартной нормальной случайной величины.

Доказательство. Рекуррентная формула (12) для $G_t(a)$ легко преобразуется в (16) с учетом выражений для математического ожидания нормальной случайной величины Y_a^t, усеченной на интервалы $(0, \infty)$ и $(-\infty, 0]$ (см., например, [6]). Условие (13) означает, что соотношения (5)-(6) выполнены для каждого t, следовательно, Int $D_t \neq \emptyset$ и D_t ограничены. Последнее условие вместе с непрерывностью $G_t(a)$ подразумевает, что каждая задача

$$\max_{a \in D_t} G_t(a) \tag{17}$$

имеет решение. Поэтому исходная задача оптимального управления (10) имеет решение $A_* = (a_*^0, \dots, a_*^{T-1})$, где, в силу вида найденных выше функций Беллмана $V_t(x)$, портфели a_*^t зависят только от моментов t принятия решений на инвестирование (при условии, что текущие состояния процесса $X_t > 0$). Применяя теорему в [6, p. 267] к задаче (17), где целевая функция $G_t(a)$ не является, вообще говоря, вогнутой, получим (14)-(15) как необходимые условия оптимальности в (17).

4 Использование эллиптического распределения вместо нормальной модели для доходностей

Landsman и Valdez [8] предложили так называемые эллиптические распределения для моделирования суммарного ущерба (в нашем случае, суммарного возврата $\sum_{i=1}^n a_i(R_i - m_0) + m_0$ (см. (1)) с сохранением среднего значения и дисперсии. Напомним, что в рассматриваемой модели они равны $m_0 + < a, \Delta m >$ и aCa'. Подход в [8] основан на том, что любая линейная функция от эллиптичеки распределенных величин имеет распределение такого же типа. Мы рассмотрим только одно эллиптическое распределение, а именно, распределение Лапласа. Его плотность

$$f(x) = \frac{1}{2\lambda} e^{-|x-\mu|/\lambda},$$

среднее значение и дисперсия равны, соответственно, μ и $2\lambda^2$. Поведение «хвостов» лапласовского и нормального распределений различно [8]. В частности, распределение Лапласа позволяет моделировать более «тяжелый хвост» реального распределения суммарного возврата.

Как следует из результатов в [8], ограничения $P\{X_{t+1} \geq \alpha^t X_t\} \geq \beta^t$ в задаче (10),

т.е., $x_\beta^t \sqrt{aC_t a'} \leq < a, \Delta m^t > + m_0^t - \alpha^t$, преобразуются в следующие

$$\frac{1}{\sqrt{2}} y_\beta^t \sqrt{aC_t a'} \leq < a, \Delta m^t > + m_0^t - \alpha^t,$$

где y_β^t – квантиль порядка β^t распределения Лапласа с параметрами $\mu = 0$ и $\lambda = 1$.

Аналог задачи (10) исследуется точно также, как было сделано выше для нормальной модели (см. Утверждения 1-3, Теорему 1) за исключением того, что вместо квантиля x_β^t используется $y_\beta^t/\sqrt{2}$.

5 Заключение

В работе показано, что много-шаговая задача инвестирования с разрешением коротких продаж, по-шаговыми VaR ограничениями и возможностью банкротства имеет решение, в котором каждая компонента (т.е. оптимальный потфель на соответствующем шаге), зависит только от номера шага и не зависит от значения текущего капитала инвестора. В результате, исходная задача сводится к решению конечного числа одно-шаговых залач. Для такой одно-шаговой задачи выбора инвестиционного портфеля получены необходимые и достаточные условия непустоты и ограниченности множества допустимых портфелей, а также выполнения условия регулярности Слейтера. Кроме нормальной аппроксимации распределения суммарного дохода, рассмотрен случай распределения Лапласа. В качестве дальнейшего развития предложенного подхода предполагается интересным использование иной меры риска, например, conditional value at risk [12]. Другие эллиптические распределения, такие, как распределения Бесселя и Стьюдента [8] могут быть рассмотрены как кандидаты на лучшую аппроксимацию распределений реальных доходностей на рынке.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 18-07-00085а.

Список литературы

[1] S. Boyd, L. Vandenberghe 2009. *Convex Optimization,* Cambridge University Press, Cambridge,

[2] D. Duffie, J. Pan 1997. *An Overview of Value at Risk*, Journal of Derivatives. 4, 7-49.

[3] A. Gaivoronski and G. Pflug 2004. *Value at Risk in Portfolio Optimization: Properties and Computational Approach,* Journal of Risk. 7 no.2, 1-31.

[4] A.Y. Golubin 2015. *A Note on Optimality Conditions for Multi-objective Problems with a Euclidean Cone of Preferences,* Journal of Optimization Theory and Applications,. 166 no. 3, 791-803.

[5] Голубин А.Ю., Газов А.И. 2018. *Условия оптимальности в задаче выбора инвестиционного портфеля при вероятностном ограничении на капитал инвестора* // Информационные технологии в проектировании и производстве, № 4, 53-57.

[6] W.H. Greene 2003.

Econometric Analysis, Prentice Hall, N.Y.

[7] R. Keykhaei 2018. *Portfolio selection in a regime switching market with a bankruptcy state and an uncertain exit-time: multi-period mean–variance formulation,* Oper. Res. Int. J., 1-24, https://doi.org/10.1007/s12351-018-0372-7.

[8] Z. Landsman, E.A. Valdez 2003. *Tail Conditional Expectations for Elliptical Distributions*, North American Actuarial Journal,. 7 no. 4, 55-71.

[9] C. Li, Z. Li 2012. Multi-*period portfolio optimization for asset--liability management with bankrupt control*, Applied Mathematics and Computation. 218, 11196--11208.

[10] H. Markowitz 1952. *Portfolio Selection*, Journal of Finance, 7, 77-91.

[11] M. C. Pinar 2013. *Static and dynamic VaR constrained portfolios with application to delegated portfolio management,* Optimization,. 62 no.11, 1419-1432.

[12] G. Szego 2005. *Measure of Risk*, European Journal of Operational Research,. 163, 5-19.

[13] S. Wei, Z. Ye 2007. *Multi-period optimization portfolio with bankruptcy control in stochastic market,* Applied Mathematics and Computation, 186, 414--425.

[14] C. Xu, J. Wang, N. Shiba 2007. *Multistage Portfolio Optimization with VaR as Risk Measure*, International Journal of Innovative Computing, Information and Control, 3 no. 3, 709-724.