

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛУГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ

Поступила в редакцию 11.05.2018 г.

В работе применяются методы нестандартного анализа [1] и используются основные понятия алгебры отношений [2] и общепринятая топологическая терминология [3]. Для простоты рассуждений все основные множества X рассматриваемых алгебраических систем и пространств сходимости считаются подмножествами множества атомов $\mathbf{S}$, над которым строится стандартный теоретико-множественный универсум $\mathbf{U} = \mathbf{V}(\mathbf{S})$ и нестандартное расширение ${}^*\mathbf{U}$, по описанному в [1] принципу. Тогда для множества X определено нестандартное расширение *X , и любой фильтр F над X характеризуется своей монадой $\mu F = \cap \{ {}^*A : A \in F \}$. Монады ультрафильтров над множеством X разбивают расширение *X на классы эквивалентности ε_X . Подмножество $M \subset {}^*X$ называется насыщенным, если $\varepsilon_X(M) \subset M$. При нестандартном подходе к топологии [4] сходимость на множестве X определяется как соответствие $\rho \subset X \times {}^*X$, для которого при любом $a \in X$ множество $\rho(a)$ содержит элемент a и является насыщенным подмножеством расширения *X . Такие соответствия называются (нестандартными) сходимостями и на них распространяется общепринятая топологическая терминология.

В работе [4] показано, что при нестандартном подходе основные топологические понятия и многие важные свойства отображений топологических пространств выражаются простыми теоретико-множественными условиями для нестандартных сходимостей. Это, с одной стороны, обосновывает естественное обобщение топологических свойств отображений на произвольные пространства сходимости и, с другой стороны, позволяет эффективно применять нестандартные методы в топологических исследованиях. Так, в силу результатов [4] отображение f пространства сходимости (X, ρ_X) в пространство сходимости (Y, ρ_Y) непрерывно, если ${}^*f \circ \rho_X \subset \rho_Y \circ f$, открыто, если $\rho_Y \circ f \subset {}^*f \circ \rho_X$, непрерывно открыто, если ${}^*f \circ \rho_X = \rho_Y \circ f$, замкнуто-компактно, если ${}^*f \circ \rho_X \overset{-1}{\subset} \rho_Y \overset{-1}{\subset} \rho_X \overset{-1}{\circ} f$, совершенно.

Нестандартная классификация отображений непосредственно приводит к каноническому описанию ряда важных сходимостей в пространствах отображений, которые "внутренним образом" канонически выра-

жаются простыми теоретико-множественными формулами через нестандартные сходимости исходных пространств. В силу результатов [4] для любого пространства сходимости $X = (X, \rho)$ на множестве $F_c = F_c(X)$ всех непрерывных преобразований пространства X по формуле

$$(f, h) \in \gamma_c \iff h \circ \rho \subset \rho \circ f \quad (f \in F_c, h \in {}^*F_c)$$

определяется непрерывная сходимость [3] $\gamma_c \subset F_c \times {}^*F_c$, которая удовлетворяет условиям: 1) γ_c является самой слабой сходимостью на множестве F_c , относительно которой непрерывно отображение вычисления $\Lambda : F_c \times X \rightarrow X$ (где $\Lambda(f, x) = f(x)$ для элементов $f \in F_c, x \in X$), 2) γ_c является компактно-открытой топологией, если (X, ρ) – локально-компактное топологическое пространство, 3) сходимость γ_c хаусдорфова (соответственно регулярна), если сходимость ρ хаусдорфова (соответственно регулярна), 4) композиция преобразований непрерывна относительно сходимости γ_c .

Аналогично канонически описываются остальные нестандартные сходимости преобразований пространства сходимости $X = (X, \rho)$:

1) на множестве $F_o = F_o(X)$ всех открытых преобразований пространства X по формуле $(f, h) \in \gamma_o \iff \rho \circ f \subset h \circ \rho$ ($f \in F_o, h \in {}^*F_o$) определяется открытая сходимость $\gamma_o \subset F_o \times {}^*F_o$;

2) на множестве $F_{c-o} = F_{c-o}(X)$ всех непрерывно открытых преобразований пространства X по формуле $(f, h) \in \gamma_{c-o} \iff h \circ \rho = \rho \circ f$ ($f \in F_{c-o}, h \in {}^*F_{c-o}$) определяется непрерывнооткрытая сходимость $\gamma_{c-o} \subset F_{c-o} \times {}^*F_{c-o}$,

3) на множестве $F_{z-c} = F_{z-c}(X)$ всех замкнуто-компактных преобразований пространства X по формуле $(f, h) \in \gamma_{z-c} \iff \overset{-1}{h} \circ \rho \subset \rho \circ \overset{-1}{f}$ ($f \in F_{z-c}, h \in {}^*F_{z-c}$) определяется замкнуто-компактная сходимость $\gamma_{z-c} \subset F_{z-c} \times {}^*F_{z-c}$,

4) на множестве $F_p = F_p(X)$ всех совершенных преобразований пространства X по формуле $(f, h) \in \gamma_p \iff \overset{-1}{h} \circ \rho = \rho \circ \overset{-1}{f}$ ($f \in F_p, h \in {}^*F_p$) определяется совершенная сходимость $\gamma_p \subset F_p \times {}^*F_p$.

Легко видеть, что композиция преобразований непрерывна относительно всех перечисленных сходимостей.

В настоящей работе приводятся результаты, показывающие возможности применения нестандартных сходимостей преобразований в топологической алгебре. Здесь показано, как при таком подходе можно представлять топологические полугруппы преобразованиями с каноническими сходимостями. Под топологической полугруппой (сокращенно т. полугруппой) в работе понимается полугруппа $G = (G, \cdot)$ с заданной на

ее основном множестве G сходностью α , относительно которой непрерывна операция полугруппы. Топологическим изоморфизмом т. полугруппы $G = (G, \alpha)$ на т. полугруппу $G_1 = (G_1, \alpha_1)$ называется изоморфизм полугруппы G на полугруппу G_1 , который является гомеоморфизмом пространства сходимости (G, α) на пространство сходимости (G_1, α_1) . В частности, в силу результатов [4] т. полугруппой является множество всех непрерывных преобразований F_c произвольного пространства сходимости (X, ρ) с операцией композиции $\circ$ и непрерывной сходимостью γ_c . Т. полугруппами являются подполугруппы $\Phi = (\Phi, \circ, \gamma_c)$ т. полугруппы F_c . При этом сходимость на Φ является ограничением на этом множестве непрерывной сходимости γ_c и обозначается тем же символом γ_c .

Топологический изоморфизм λ т. полугруппы $G = (G, \cdot, \alpha)$ на т. полугруппу непрерывных преобразований с непрерывной сходимостью $\Phi = (\Phi, \circ, \gamma_c)$ называется представлением т. полугруппы G непрерывными преобразованиями. По определению это означает, что для любых $a, b \in G$, $x \in {}^*G$, выполняется $\lambda(a \cdot b) = \lambda(b) \circ \lambda(a)$, $(a, x) \in \alpha \iff (\lambda(a), {}^*\lambda(x)) \in \gamma_c$.

Аналогично канонически описываются т. полугруппы непрерывно-открытых, совершенных и др. преобразований, и определяются представления т. полугрупп непрерывно-открытыми, совершенными и др. преобразованиями.

Важность введенных понятий подтверждается, в частности, тем, что т. полугруппами непрерывных преобразований с непрерывными сходимостями исчерпываются все возможные т. полугруппы.

Теорема 1. Любая т. полугруппа $G = (G, \cdot, \alpha)$ имеет представление непрерывными преобразованиями, т.е. существует топологический изоморфизм т. полугруппы G на некоторую полугруппу непрерывных преобразований с непрерывной сходимостью.

Следствие 1. Любая локально компактная т. полугруппа топологически изоморфна т. полугруппе непрерывных преобразований локально-компактного топологического пространства с компактно-открытой топологией.

Следствие 2. Любая (локально-компактная) т. группа топологически изоморфна т. группе гомеоморфизмов пространства сходимости (локально-компактного топологического пространства) с непрерывной сходимостью (с компактно-открытой топологией).

Под топологическим кольцом (сокращенно т. кольцом) понимается кольцо $K = (K, +, \cdot)$ с заданной на его основном множестве K сходимостью α , относительно которой непрерывны обе операции кольца.

Следствие 3. Любое (локально-компактное) т. кольцо $K = (K, +, \cdot, \alpha)$ топологически изоморфно т. кольцу непрерывных эндоморфизмов т. группы $K = (K, +, \alpha)$ с непрерывной сходимостью (с компактно-открытой топологией).

Теорема 2. Любой коммутативный т. моноид $G = (G, \cdot, \alpha)$ со свойством $\alpha(a) \subset \alpha(e) \cdot \alpha(a)$ ($a \in G$) имеет представление непрерывно-открытыми преобразованиями, т. е. т. моноид G топологически изоморфен т. моноиду непрерывно-открытых преобразований с непрерывно-открытой сходимостью.

Следствие 4. Любая коммутативная т. группа представима гомеоморфизмами с непрерывно-открытой сходимостью.

Теорема 3. Хаусдорфова т. полугруппа $G = (G, \cdot, \alpha)$ со свойством $(*G \setminus \alpha(G)) \cdot \alpha(G) \subset *G \setminus \alpha(G)$ имеет представление совершенными преобразованиями, т. е. т. полугруппа G топологически изоморфна т. полугруппе совершенных преобразований с совершенной сходимостью.

Следствие 5. Любая хаусдорфова т. группа представима совершенными перестановками с совершенной сходимостью.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Альбверто С., Фенстад Й., Хезг-Крон Р., Линдстрем Т. Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике. М., 1990.
2. Вагнер В. В. Теория отношений и алгебра частичных отображений // Теория полугрупп и ее приложения : сб. ст. Саратов, 1965. Вып.1. С. 3—178.
3. Келли Дж. Общая топология. М., 1981.
4. Молчанов В. А. Нестандартные сходимости в пространствах отображений // Сибирский мат. журн. 1992. Т.33, № 6. С. 141—153.

УДК 512.534.5,519.17

В. А. Молчанов, Р. А. Фарахутдинов

О КОНКРЕТНОЙ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ПОЛУГРУПП ЭНДОМОРФИЗМОВ БЕСКОНТУРНЫХ ГРАФОВ

Поступила в редакцию 29.05.2018 г.

Введение. Проблема конкретной характеристики [1] для полугрупп эндоморфизмов графов формулируется следующим образом: при каких условиях полугруппа преобразований S множества X является полугруппой эндоморфизмов некоторого графа G с множеством вершин X , т. е. на множестве X можно так задать бинарное отношение ρ , что для