УДК 528.21/22

ВЫЧИСЛЕНИЯ НОРМАЛЬНОГО УСКОРЕНИЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ ВНЕ ЭЛЛИПСОИДА

Александр Викторович Елагин
Сибирская государственная геодезическая академия,630108, г. Новосибирск, ул. Плахотного, 10, к. т. н., доцент кафедры высшей геодезии, тел.(383-2)-43-29-11, e-mail: VG@ssga.ru

Представлены формулы А.В. Елагина, предназначенные для вычисления нормального ускорения силы тяжести вне эллипсоида. Тестирование производилось путём сравнения с результатами вычислений по формулам Сомильяна, В.Ф. Еремеева – М.И. Юркиной и Ю.В. Сурнина. Разности ускорений, вычисленные по разным формулам не превышают 0.05 мкГал на высотах до 7500 м.

Ключевые слова: нормальное ускорение силы тяжести, эллипсоид.

COMPUTATION OF NORMAL GRAVITATIONAL ACCELERATION OUTSIDE THE ELLIPSOID

Alexander V. Yelagin
Ph.D., Assoc. Prof., Department of Advanced Geodesy, Siberian State Academy of Geodesy, 10 Plakhotnogo st., 630108 Novosibirsk, phone: 3832 432911, e-mail: VG@ssga.ru

The author presents the formulas for computing normal gravitational acceleration outside the ellipsoid. The results of computations by Somilyan's and V.F. Yeremeyev's formulas were compared with those by M.I. Yurkina's and Yu.V. Surnin's. The accelerations differences, computed by different formulas, did not exceed 0.05 mcGal at 7500 m height.

Key words: normal gravitational acceleration, ellipsoid.

Для вычисления нормальных высот, высот квазигеоида, уклонений отвесных линий, аномалий силы тяжести и т.д. требуются формулы для определения нормального ускорения силы тяжести вне эллипсоида. Такие формулы были получены В.Ф. Еремеевым и М.И. Юркиной [1], а также Ю.В. Сурниным [2]. В данной статье представлены формулы А.В. Елагина.

Эллипсоидальными параметрами будем называть следующие величины:

a – большая полуось земного эллипсоида; e – эксцентриситет; c – удаление фокусов эллипсоида от центра; $\tilde{b}$ – малая полуось софокусного эллипсоида, на котором расположена заданная точка P; $\tilde{u}$ – приведённая широта точки P на софокусном эллипсоиде.

Запишем формулы связи эллипсоидальных параметров с прямоугольными координатами:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2; \quad c = ae; \quad \tilde{b} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(r^2 - c^2\right) + \frac{1}{2}\left[\left(r^2 - c^2\right)^2 + 4c^2 z^2\right]^{\frac{1}{2}}};$$

$\tilde{a} = \sqrt{\tilde{b}^2 + c^2}$; $\cos\tilde{u} = \frac{1}{\tilde{a}}\sqrt{x^2 + y^2}$; $\sin\tilde{u} = \sqrt{1 - \cos^2\tilde{u}}$.

По эллипсоидальным параметрам вычисляется нормальное ускорение силы тяжести по формулам:

$$q = \frac{1}{2}\left[\left(1 + 3\frac{\tilde{b}^2}{c^2}\right)arctg\frac{c}{\tilde{b}} - 3\frac{\tilde{b}}{c}\right]; \quad q_0 = \frac{1}{2}\left[\left(1 + 3\frac{b^2}{c^2}\right)arctg\frac{c}{b} - 3\frac{b}{c}\right];$$

$$G = -\frac{fM}{\tilde{a}} - \frac{\omega^2 a^2\tilde{a}}{q_0 c}\left(1 - \frac{\tilde{b}}{c}\operatorname{arctg}\frac{c}{\tilde{b}} - \frac{c^2}{3\tilde{a}^2}\right)\left(\frac{3}{2}\sin^2\tilde{u} - \frac{1}{2}\right) + \omega^2\tilde{a}\tilde{b}\cos^2\tilde{u};$$

$$E = \omega^2\left(a^2\frac{q}{q_0} - \tilde{a}^2\right)\sin\tilde{u}\cos\tilde{u};$$

$$\gamma_x = \frac{G\tilde{b}\cos\tilde{u} - E\tilde{a}\sin\tilde{u}}{\tilde{a}^2\sin^2\tilde{u} + \tilde{b}^2\cos^2\tilde{u}}; \quad \gamma_z = \frac{G\tilde{a}\sin\tilde{u} + E\tilde{b}\cos\tilde{u}}{\tilde{a}^2\sin^2\tilde{u} + \tilde{b}^2\cos^2\tilde{u}};$$

$$\gamma = \sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_z^2},$$

где $\omega -$ угловая скорость вращения Земли.

Для тестирования был просчитан один и тот же практический пример по формулам А.В. Елагина, Сомильяна [1], В.Ф. Еремеева – М.И. Юркиной [1] и Ю.В. Сурнина [2]. Исходные данные примера следующие:

1. Параметры эллипсоида: a = 6378140 м, e2 = 0, 006694384872.
2. Гравитационный параметр: $fM = 398600{,}5 \cdot 10^9$ м3с-2.
3. Угловая скорость вращения Земли: $\omega = 7{,}292115 \cdot 10^{-5}$ рад·с-1.
4. Координаты точек: геодезическая широта B = $45^\circ 00' 00.000''$, геодезическая долгота L = 0, геодезические высоты H = 0 м, 2500 м, 5000 м, 7500 м, 10 км, 25 км, 50 км, 100 км, 500 км, 1000 км.

Ускорение силы тяжести на поверхности эллипсоида (H = 0 м), вычисленное по формуле Сомильяна равно 9, 806 189 977 538 м $с^{-2}$. Результаты вычислений по другим формулам представлены в таблице.

Из таблицы видно, что при вычислении нормального ускорения силы тяжести для точек на земной поверхности с высотой до 7500 м пригодны все три типа формул. Разности не превышают 0,05 мкГал. Для точек расположенных выше рекомендуется применять для вычисления нормального ускорения формулы А.В. Елагина и В.Ф. Еремеева – М.И. Юркиной.

Значения нормального ускорения силы тяжести в м $с^{-2}$

Геодезическая высота Н	Формулы А.В. Елагина	Форм. В.Ф. Еремеева и М.И. Юркиной	Формулы Ю.В. Сурнина
0 м	9, 806 189 977 537	9, 806 189 977 777	9, 806 189 977 536
2500 м	9, 798 480 524 708	9, 798 480 524 409	9, 798 480 524 651
5000 м	9, 790 780 126 150	9, 790 780 125 881	9, 790 780 125 924
7500 м	9, 783 088 767 686	9, 783 088 767 704	9, 783 088 767 178
10 км	9, 775 406 435 159	9, 775 406 435 094	9, 775 406 434 257
25 км	9, 729 501 195 598	9, 729 501 195 472	9, 729 501 189 991
50 км	9, 653 705 199 830	9, 653 705 199 947	9, 653 705 177 572
100 км	9, 504 736 582 268	9, 504 736 581 826	9, 504 736 494 577
500 км	8, 427 497 258 260	8, 427 497 258 421	8, 427 495 292 325
1000 км	7, 319 373 446 137	7, 319 373 446 318	7, 319 366 397 167

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Еремеев, В.Ф. Теория высот в гравитационном поле Земли [Текст] / В.Ф. Еремеев, М.И. Юркина. – М.: Недра, 1971. – 144 с.

2. Ротова, Н.В. Исследование эффективности формул для вычисления нормального ускорения силы тяжести в трехмерном пространстве [Текст] / Н.В. Ротова // ГЕО-Сибирь-2007. Т. 1. Геодезия, геоинформатика, картография, маркшейдерия. Ч. 2 : сб. матер. III междунар. науч. конгр. «ГЕО-Сибирь-2007», 25 – 27 апр. 2007 г., Новосибирск. – Новосибирск: СГГА, 2007. – С. 46 – 52.

© А.В. Елагин, 2012