

## МЕХАНИКА

УДК 539.3

**ДЕФОРМАЦИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ,  
АРМИРОВАННОЙ НЕЛИНЕЙНО УПРУГИМИ НИТЯМИ***И. В. Викторов*

С.-Петербургский государственный университет,  
аспирант, viktorov\_i@inbox.ru

**Введение**

С использованием гипотезы Кирхгофа—Лява [1] были получены уравнения состояния для оболочки, армированной волокнами в рамках двумерной модели [2]. При этом предполагалось, что волокна являются линейно упругими, сопротивляющимися как сжимающим, так и растягивающим усилиям. Поведение волокон в случае сжатия считается существенно нелинейным [3], а именно, предполагается, что жесткость волокон становится пренебрежимо малой при достаточно больших усилиях сжатия. В настоящей работе обсуждается эффективность армирования в зависимости от угла намотки нитей на примере деформации цилиндрической оболочки.

**Деформации и напряжения в композитной оболочке**

Рассмотрим осесимметричную деформацию цилиндрической оболочки при равномерном внешнем давлении. Предполагается, что оболочка состоит из упругой изотропной матрицы, подкрепленной двумя системами волокон, наклоненных под углами  $\theta$  и  $-\theta$  к образующей и равномерно распределённых по толщине оболочки.

Напряжения в оболочке  $\sigma_{ii}$  представляют собой сумму напряжений в матрице  $\sigma_{ii}^{(0)}$  и осредненных напряжений  $\sigma_{ii}^{(k)}$ , связанных с растяжением-сжатием волокон:

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^{(0)} + \sigma_{11}^{(k)}, \quad \sigma_{22} = \sigma_{22}^{(0)} + \sigma_{22}^{(k)}. \quad (1)$$

Запишем соотношения между напряжениями  $\sigma_{ii}$  и деформациями  $\varepsilon_{ii}$  для матрицы:

$$\sigma_{11}^{(0)} = \frac{E_0(1-\delta)}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}), \quad \sigma_{22}^{(0)} = \frac{E_0(1-\delta)}{1-\nu^2}(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}). \quad (2)$$

Здесь  $E_0$  — модуль Юнга и  $\nu$  — коэффициент Пуассона для матрицы. Коэффициент  $\delta < 1$  определяет относительный объем оболочки, занятый волокнами. Случай  $\delta = 0$  соответствует неподкрепленной оболочке.

В соответствии с гипотезами Кирхгофа [1] деформации  $\varepsilon_{ii}$  являются линейными функциями координаты  $z$ :

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_1 + \kappa_1 z, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 + \kappa_2 z. \quad (3)$$

Здесь  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  — деформации растяжения—сжатия, а  $\kappa_1$ , и  $\kappa_2$  — деформации изгиба срединной поверхности оболочки.

Находим деформации  $\varepsilon^{(k)}$  в волокнах:

$$\varepsilon^{(k)} = c_1 \varepsilon_{11} + c_2 \varepsilon_{22}, \quad c_1 = \cos^2 \theta, \quad c_2 = \sin^2 \theta, \quad (4)$$

где деформации  $\varepsilon_{ii}$  те же, что и в равенствах (2) и (3).

Напряжения в волокнах запишем в виде

$$\sigma^{(k)} = \begin{cases} E_k \delta \varepsilon^{(k)}, & \varepsilon^{(k)} \geq 0, \\ 0, & \varepsilon^{(k)} < 0, \end{cases}$$

где  $E_k$  — модуль Юнга волокон [3]. Здесь и далее пренебрегаем эффектом Пуассона, заключающемся в том, что поперечное сечение волокон изменяется при растяжении. Напряжения в соотношениях (1) имеют вид  $\sigma_{11}^{(k)} = c_1 \sigma^{(k)}$ ,  $\sigma_{22}^{(k)} = c_2 \sigma^{(k)}$ .

В силу равенств (3) и (4) деформации  $\varepsilon^{(k)}(z)$  являются линейными функциями от  $z$ :  $\varepsilon^{(k)} = \varepsilon_m + \kappa z$ , где

$$\varepsilon_m = c_1 \varepsilon_1 + c_2 \varepsilon_2, \quad \kappa = c_1 \kappa_1 + c_2 \kappa_2. \quad (5)$$

Здесь  $\varepsilon_m$  — деформация растяжения—сжатия в направлении  $\theta$ .

Пусть  $\varepsilon_b = |\kappa| h/2$  — максимальное значение второго слагаемого в выражении для  $\varepsilon^{(k)}$ , соответствующего деформациям изгиба.

Возможны следующие три случая [3].

**Случай 1.** Если  $\varepsilon_m \geq \varepsilon_b$ , то волокна системы растянуты при всех значениях  $z$ , и уравнения состояния имеют вид (см. [2])

$$T_i = \sum_{j=1}^2 K_{ij} \varepsilon_j, \quad M_i = \sum_{j=1}^2 D_{ij} \kappa_j, \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

Коэффициенты  $K_{ij}$  и  $D_{ij}$  определены [2] и задаются формулами

$$\begin{aligned} K_{11} &= K_0(1 + k c_1^2), & K_{12} &= K_0(\nu + k c_1 c_2), & K_{22} &= K_0(1 + k c_2^2), \\ D_{11} &= D_0(1 + k c_1^2), & D_{12} &= D_0(\nu + k c_1 c_2), & D_{22} &= D_0(1 + k c_2^2), \\ K_0 &= \frac{E_0(1 - \delta)h}{1 - \nu^2}, & D_0 &= \frac{E_0(1 - \delta)h^3}{12(1 - \nu^2)}, & k &= (1 - \nu^2) \frac{E_k \delta}{E_0(1 - \delta)}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $k$  — коэффициент характеризующий относительную жесткость нитей.

**Случай 2.** Если  $\varepsilon_m \leq -\varepsilon_b$ , то волокна не сопротивляются сжатию, и в этом случае выражение для усилий и моментов имеют вид (6), (7) при  $k = 0$ .

**Случай 3.** В промежуточном случае  $|\varepsilon_m| < \varepsilon_b$  волокна сопротивляются сжатию только в части объема оболочки. В этом случае  $T_i = T_i^{(0)} + T_i^{(k)}$ ,  $M_i = M_i^{(0)} + M_i^{(k)}$ ,

где  $T_i^{(0)}$ ,  $M_i^{(0)}$  те же, что и в случае 2, а усилия  $T_j^{(k)}$  и моменты  $M_j^{(k)}$  зависят и от деформаций растяжения—сжатия  $\varepsilon_j$  и от деформаций изгиба  $\kappa_j$ :

$$\begin{aligned} T_j^{(k)} &= c_j E_k h \delta \frac{\varepsilon_m + \varepsilon_b}{2|\kappa|} (\varepsilon_m + \varepsilon_b), \\ M_j^{(k)} &= c_j E_k h^3 \delta \frac{\varepsilon_m + \varepsilon_b}{6\kappa|\kappa|} (2\varepsilon_b^2 - \varepsilon_m^2 + \varepsilon_m \varepsilon_b). \end{aligned} \quad (8)$$

Эти равенства справедливы как для  $\kappa > 0$ , так и для  $\kappa < 0$ . Соотношение (8) не используется при  $\kappa = 0$  поскольку тогда имеют место только случаи 1 или 2.

### Осесимметричная деформация цилиндрической оболочки

Три уравнения равновесия запишем в виде [1]

$$\frac{dT_1}{ds} = 0, \quad \frac{dQ_1}{ds} + T_1 \kappa_1 + T_2 (\kappa_2 + 1) + q = 0, \quad \frac{dM_1}{ds} + Q_1 = 0, \quad (9)$$

где  $s$  — координата вдоль образующей,  $Q_1$  — перерезывающая сила,  $q$  — интенсивность внешних распределенных нагрузок в проекции на нормаль к оболочке.

В этой системе и далее перешли к безразмерному виду, для чего величины  $\{s, R, h, l, u, w\}$  отнесли к радиусу оболочки  $R$ , а величины  $\{T_i, M_i, q\}$  отнесли к  $E_0(1 - \delta)h/(1 - \nu^2)$ . Также для удобства дальнейшего анализа введём безразмерный параметр  $\mu^4 = h^2/12R^2$ , имеющий смысл относительной толщины оболочки.

Деформации растяжения—сжатия срединной поверхности  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  и деформации ее изгиба  $\kappa_1, \kappa_2$  связаны с перемещениями  $u(s), w(s)$  по формулам

$$\varepsilon_1 = \frac{du}{ds}, \quad \varepsilon_2 = -w, \quad \kappa_1 = \frac{d^2w}{ds^2}, \quad \kappa_2 = 0. \quad (10)$$

Уравнения (9), (10) образуют замкнутую систему шестого порядка. Отбросим во втором уравнении системы (9) нелинейные слагаемые  $T_1 \kappa_1, T_2 \kappa_2$ . Тогда система становится линейной. На краях оболочки  $s = 0$  и  $s = l$  зададим граничные условия шарнирного опирания  $T_1 = w = M_1 = 0$ .

Найдем перемещения  $u(s), w(s)$ , предполагая, что волокна линейно упругие, сопротивляющиеся как сжимающим, так и растягивающим усилиям. Тогда усилия  $T_1, T_2$  и моменты  $M_1, M_2$  находим по формулам (6), (7).

Из первого уравнения (9) с учетом граничных условий получаем

$$T_1 = 0, \quad \frac{du}{ds} = \frac{K_{12}}{K_{11}} w, \quad (11)$$

а второе уравнение (9) после подстановки  $Q_1$  из третьего и  $du/ds$  из (11) имеет вид

$$\mu^4 \frac{d^4w}{ds^4} + \alpha w - \frac{q}{K_{11}} = 0, \quad \alpha = \frac{(K_{11}K_{22} - K_{12}^2)}{K_{11}^2}. \quad (12)$$

Решая уравнение (12), находим

$$\begin{aligned} w(s) &= \frac{q}{K_{11}\alpha} + e^{-s_1} (t_1 \cos s_1 + t_2 \sin s_1) + e^{-s_2} (t_3 \cos s_2 + t_4 \sin s_2), \\ s_1 &= \frac{\alpha^{1/4} s}{\mu\sqrt{2}}, \quad s_2 = \frac{\alpha^{1/4} (l - s)}{\mu\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

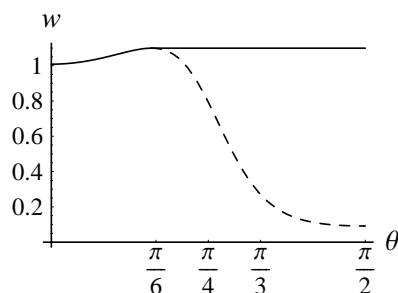
Для удобства дальнейшего анализа поведения волокон в оболочке запишем выражения (5) для  $\varepsilon_m$  и  $\varepsilon_b$  в виде

$$\varepsilon_m = \frac{\nu \cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{1 + k \cos^4 \theta} w, \quad \varepsilon_b = \sqrt{3} \mu^2 \left| \frac{d^2 w}{ds^2} \right| \cos^2 \theta. \quad (13)$$

Из (13) видно, что знак  $\varepsilon_m$  зависит от коэффициента при  $w$ . Находим

$$\theta^* = \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \nu}}.$$

Если угол намотки нитей  $\theta < \theta^*$ , то волокна частично перестают работать только в зоне краевого эффекта, а вдали от края они растянуты по всей толщине оболочки. Если  $\theta > \theta^*$ , то нити частично работают только в зоне краевого эффекта, причем при достаточно больших углах намотки перестают работать и на краю оболочки. Например, при  $\theta = \pi/2$  будет  $\varepsilon_m < 0$  и  $\varepsilon_b = 0$ , значит на всей длине оболочки  $\varepsilon_m < \varepsilon_b$  и нити не работают. В случае  $\theta = \theta^*$  нити имеют только изгибные деформации вдоль всей длины оболочки.



На графике показана зависимость прогиба  $w$  от угла намотки нитей  $\theta$  для середины оболочки  $s_0 = l/2$ ; штриховой линией обозначен участок, полученный из предположения, что волокна работают на сжатие. При этом считалось, что  $h/R = 1/50$ ,  $q = 1$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $k = 10$ . Для таких значений параметров нити перестают частично работать в областях краевого эффекта при  $\theta > 0.3658\pi$ .

## Литература

1. Новожильов В. В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 432 с.
2. Haseganu E. M., Smirnov A. L., Tovstik P. E. Baeling of Thin Anisotropic Shell // The Transactions of the CSME 24(1B). P. 169–178. 2000.
3. Smirnov A. L., Tovstik P. E. Thin-walled structures made of materials with variable elastic moduli // Advances in Mechanics of Solids. In memory of prof. E. M. Haseganu. World Scientific Co Ltd, 2006. P. 69–83.

Статья поступила в редакцию 29 октября 2009 г.

## КОЭФФИЦИЕНТЫ ПЕРЕНОСА АТОМАРНОГО АЗОТА И КИСЛОРОДА С УЧЕТОМ ЭЛЕКТРОННОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ

*В. А. Истомин<sup>1</sup>, Е. В. Кустова<sup>2</sup>*

1. С.-Петербургский государственный университет,  
аспирант, vladimir\_istomin@hotmail.com

2. С.-Петербургский государственный университет,  
профессор, kustova@math.spbu.ru

### 1. Введение

Исследованию процессов переноса в газах посвящено большое число работ [1, 2, 3]. В классической монографии Чепмена и Каулинга [1] предполагается, что газ состоит из бесструктурных частиц. В работах [2, 3] учитываются внутренние степени свободы молекул, рассмотрены различные условия отклонения от равновесия. Однако до настоящего времени расчет коэффициентов переноса в одноатомных газах обычно проводится в предположении, что частицы не имеют внутренней структуры. Исключение составляют лишь недавние работы Д. Бруно с соавторами [4, 5], в которых изучена плазма водорода с учетом возбуждения электронных состояний атомов.

В настоящей работе изучаются процессы переноса в более сложных атомарных газах — кислороде и азоте. Строится математическая модель для расчета коэффициентов теплопроводности, сдвиговой и объемной вязкости, а также коэффициента самодиффузии с учетом электронных степеней свободы. Для упрощения описания и оценки влияния чистого эффекта электронного возбуждения на процессы переноса ионизация не учитывается (предполагается учесть присутствие заряженных частиц в последующих работах). Исследование коэффициентов теплопроводности, вязкости и объемной вязкости проводится в области от 5000 до 25000 К, используется первое приближение метода Чепмена—Энскога кинетической теории процессов переноса. Оценивается вклад поступательных и электронных степеней свободы в коэффициент теплопроводности, анализируется эффект объемной вязкости и поведение числа Прандтля.

Проведенные в данной работе вычисления нужны при расчете сопротивления и тепловых потоков в высокотемпературных течениях газа. Примером такой задачи может являться расчет сопротивления и тепловых потоков для космических летательных аппаратов при вхождении в атмосферу планеты, например, Земли или Марса.

### 2. Система уравнений в однотемпературном приближении и вычисление коэффициентов переноса

Рассматривается однотемпературная модель, основанная на следующем соотношении характерных времен процессов:

$$\tau_{tr} < \tau_{el} \ll \theta, \quad (1)$$

где  $\tau_{tr}$  — характерное время поступательной релаксации,  $\tau_{el}$  — характерное время электронной релаксации,  $\theta$  — характерное время изменения макропараметров. Условие (1)

соответствует слабому отклонению от полного термодинамического равновесия. Описание неравновесного течения строится на основании функции распределения  $f_i(\vec{r}, \vec{u}, t)$  ( $\vec{r}$  — координата,  $\vec{u}$  — микроскопическая скорость частицы,  $t$  — время,  $i$  — уровень внутренней энергии частицы). Используется модификация метода Чепмена—Энскога [3].

Рассмотрим макроскопические уравнения для параметров  $\rho(r, t)$ ,  $\vec{V}(r, t)$  и  $T(r, t)$ , определяющих функцию распределения в однотемпературном приближении. Для такой модели уравнение неразрывности, а также уравнения сохранения импульса и энергии имеют вид

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0, \quad (2)$$

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} + \nabla \mathbf{P} = 0, \quad (3)$$

$$\rho \frac{dU}{dt} + \nabla \cdot \vec{q} + \mathbf{P} : \nabla \vec{V} = 0, \quad (4)$$

где  $\rho$  — плотность,  $\vec{V}$  — скорость,  $\mathbf{P}$  — тензор напряжений,  $\vec{q}$  — вектор потока тепла,  $U$  — полная удельная энергия [2, 3]. В отличие от уравнений, полученных в [2, 3] для атомов, уравнения (2)–(4) содержат полную удельную энергию, включающую вклад электронных степеней свободы:

$$U = E_{tr} + E_{el}, \quad \rho E_{el} = \sum_i n_i \varepsilon_i, \quad (5)$$

где  $E_{tr}$ ,  $E_{el}$  — удельные поступательная и электронная энергии,  $n_i$  — заселенность  $i$ -го электронного уровня,  $\varepsilon_i$  — его электронная энергия. При вычислении уровней электронной энергии использовалась предложенная в [6] оценка:  $\varepsilon_i \leq E_I - \Delta E_I$ , где  $E_I$  — энергия ионизации,  $\Delta E_I = 1000 \text{ см}^{-1}$  — понижение потенциала ионизации за счет взаимодействия заряженных частиц. Энергии  $\bar{\varepsilon}_i = \varepsilon_i / (hc)$  (где  $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$  — постоянная Планка,  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$  — скорость света) и статистические веса  $g_i$  брались из электронных таблиц, предоставленных нам авторами работы [6].

В нулевом приближении метода Энскога—Чепмена функция распределения принимает вид Максвелл—Больцмановского распределения по скоростям и электронной энергии:

$$f_i^{(0)} = \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \frac{n}{Z_{el}(T)} g_i \exp \left( -\frac{mc^2}{2kT} - \frac{\varepsilon_i}{kT} \right). \quad (6)$$

Здесь  $m$  — масса атома,  $T$  — температура,  $n$  — числовая плотность атомов,  $k$  — постоянная Больцмана ( $k = 1,38066 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} \cdot \text{К}^{-1}$ ),  $g_i$  — статистический вес  $i$ -го уровня,  $Z_{el}(T)$  — статистическая сумма ( $Z_{el} = \sum_{i=1}^L g_i \exp(-\varepsilon_i/(kT))$ ),  $\vec{c}$  — собственная скорость. Распределение (6) отличается от обычных распределений атомов тем, что содержит электронную энергию  $\varepsilon_i$ .

В нулевом приближении модифицированного метода Энскога—Чепмена тепловой поток и тензор напряжений имеют вид

$$\vec{q} = 0, \quad \mathbf{P} = p\mathbf{I}, \quad (7)$$

где  $p$  — давление,  $\mathbf{I}$  — единичный тензор.

В первом приближении функция распределения определяется в виде

$$f_i = f_i^{(0)}(1 + \varphi_i), \quad (8)$$

$$\varphi_i = -\frac{1}{n}\vec{A}_i \cdot \nabla \ln T - \frac{1}{n}\mathbf{B}_i : \nabla \vec{V} - \frac{1}{n}F_i \nabla \cdot \vec{V}, \quad (9)$$

где  $\varphi_i$  — поправка первого порядка.

Функции  $\vec{A}_i$ ,  $\mathbf{B}_i$ , и  $F_i$  ищутся из линейных интегральных уравнений

$$I_i(A) = \frac{1}{n}f_i^{(0)} \left( \frac{mc^2}{2kT} - \frac{5}{2} + \left[ \frac{\varepsilon_i}{kT} \right]' \right) \vec{c}, \quad (10)$$

$$I_i(B) = \frac{m}{nkT}f_i^{(0)}(\vec{c}\vec{c} - \frac{1}{3}c^2\mathbf{I}), \quad (11)$$

$$I_i(F) = \frac{1}{n}f_i^{(0)} \left( \frac{2c_{el}}{3c_V} \left( \frac{mc^2}{2kT} - \frac{3}{2} \right) - \frac{R}{c_V} \left[ \frac{\varepsilon_i}{kT} \right]' \right), \quad (12)$$

где

$$\left[ \frac{\varepsilon_i}{kT} \right]' = \frac{\varepsilon_i - \langle \varepsilon \rangle}{kT}, \quad \langle \varepsilon \rangle = \frac{\sum_{i=1}^L \varepsilon_i g_i \exp(\frac{-\varepsilon_i}{kT})}{\sum_{i=1}^L g_i \exp(\frac{-\varepsilon_i}{kT})}, \quad (13)$$

$$c_V = c_{int} + c_{tr} = c_{el} + c_{tr} = c_{el} + \frac{3}{2} \frac{k}{m}, \quad c_{el} = \frac{\partial E_{el}}{\partial T}. \quad (14)$$

Здесь  $c_V$  — удельная теплоемкость при постоянном объеме,  $c_{el}$  — теплоемкость электронных степеней свободы при постоянном объеме, которая обычно полагается равной нулю для атомов,  $R$  — универсальная газовая постоянная. Оператор  $I_i(\varphi)$  — линейризованный интегральный оператор, определяемый сечениями столкновений в быстром процессе.

Дополнительные соотношения для обеспечения единственности решения интегральных уравнений (10)–(12) для  $\vec{A}_i$ ,  $\mathbf{B}_i$ , и  $F_i$  следуют из нормировки функции распределения [3].

Поток тепла в первом приближении имеет вид

$$\vec{q} = -\lambda' \nabla T, \quad (15)$$

где коэффициент теплопроводности  $\lambda'$  описывает перенос поступательной и электронной энергии и определяется формулой

$$\lambda' = \lambda_{tr} + \lambda_{int} = \lambda_{tr} + \lambda_{el}, \quad (16)$$

$$\lambda' = \frac{k}{3}[\vec{A}, \vec{A}]. \quad (17)$$

Тензор напряжений будет иметь вид

$$\mathbf{P} = p\mathbf{I} - 2\eta\mathbf{S} - \varsigma\nabla \cdot \vec{V}\mathbf{I}, \quad (18)$$

где  $\eta$  и  $\varsigma$  — коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости соответственно,  $\mathbf{S}$  — тензор скоростей деформации.

Коэффициенты переноса выражаются через функции  $\mathbf{B}_i$  и  $F_i$  по следующим формулам:

$$\eta = \frac{kT}{10}[\mathbf{B}, \mathbf{B}], \quad (19)$$

$$\varsigma = kT[F, F]. \quad (20)$$

В формулах (17), (19), (20) через  $[A, B]$  (где  $A, B$  — некоторые произвольные функции молекулярных скоростей) обозначены билинейные формы, содержащие линеаризованный оператор столкновений. В кинетической теории газов такие билинейные формы называются интегральными скобками [1, 2]; в настоящей работе они определяются сечениями всех процессов.

Для решения линейных интегральных уравнений функции  $\vec{A}_i$ ,  $\mathbf{B}_i$  и  $F_i$  раскладываются в ряды по системам ортогональных полиномов Сонина и Вальдмана—Трубенбахера по собственным скоростям и дискретным уровням энергии соответственно [2, 3]. Функции  $\vec{A}_i$ ,  $\mathbf{B}_i$  и  $F_i$  раскладываются по двойным системам полиномов, выбор которых определяет функция распределения нулевого приближения. Подставляя данные разложения в интегральные уравнения для функций  $\vec{A}_i$ ,  $\mathbf{B}_i$  и  $F_i$ , получаем системы линейных алгебраических уравнений для коэффициентов разложения  $a_{rp}$ ,  $b_r$  и  $f_{rp}$ . В свою очередь, коэффициенты переноса выражаются через коэффициенты разложения:

$$\lambda' = \frac{5}{4}ka_{10} + \frac{m}{2}c_{el}a_{01}, \quad (21)$$

$$\eta = \frac{kT}{2}b_0, \quad (22)$$

$$\varsigma = -kTf_{10}. \quad (23)$$

Решив системы линейных алгебраических уравнений относительно  $a_{rp}$ ,  $b_r$  и  $f_{rp}$ , можно найти коэффициенты теплопроводности, вязкости и объемной вязкости.

Вывод систем алгебраических уравнений относительно  $a_{rp}$ ,  $b_r$  и  $f_{rp}$ , а также преобразование интегральных скобок, подробно описаны в [2, 3]. Так, предполагая, что дефект резонанса электронной энергии при неупругом столкновении

$$\Delta\varepsilon = \frac{\varepsilon_k + \varepsilon_l - \varepsilon_i - \varepsilon_j}{kT} \quad (24)$$

равен нулю ( $\Delta\varepsilon = 0$ ), можно выразить интегральные скобки через  $\Omega^{(l,r)}$ -интегралы по формулам из [2]. В свою очередь,  $\Omega$ -интегралы определяются через транспортное сечение, угол рассеяния и прицельный параметр в предположении, что сечения рассеяния не зависят от внутренней энергии атомов [3]. При высоких температурах для вычисления интегралов столкновения используется потенциал отталкивания Борна—Майера в форме

$$\varphi(r) = \varphi_0 \exp(-\beta r), \quad (25)$$

где  $\varphi_0$  и  $\beta$  — параметры потенциала. Значения параметров приведены в работе [7]. Для вычисления интегралов  $\Omega^{(1,1)}$  и  $\Omega^{(2,2)}$  на основе потенциала Борна—Майера берутся формулы из работы [8]. В результате интегральные скобки для вычисления коэффициента теплопроводности и сдвиговой вязкости выражаются через  $\Omega$ -интегралы. Коэффициенты теплопроводности и сдвиговой вязкости принимают вид, аналогичный полученному в [2, 3]:

$$\lambda_{tr} = \frac{75k^2T}{32m\Omega^{(2,2)}}, \quad (26)$$



$$\lambda_{el} = \frac{3kT}{8\Omega^{(1,1)}} c_{el}, \quad (27)$$

$$\eta = \frac{5kT}{8\Omega^{(2,2)}}. \quad (28)$$

Отличие состоит в том, что в [2, 3] не учитывалось электронное возбуждение, и коэффициент  $\lambda_{el}$  оказывался равным нулю. Кроме того, зная  $\Omega^{(1,1)}$ , можно определить коэффициент самодиффузии, определяемый формулой из [2]:

$$D = \frac{3kT}{8nm} \frac{1}{\Omega^{(1,1)}}. \quad (29)$$

Для коэффициента объемной вязкости в настоящей работе получена формула

$$\varsigma = \left( \frac{c_{el}}{c_{tr} + c_{el}} \right)^2 kT \frac{1}{\beta}, \quad (30)$$

где

$$\beta = 2 \left( \frac{kT}{\pi m} \right)^{\frac{1}{2}} Z_{el}^{-2} \sum_{ijkl} g_i g_j \exp(-(e_i + e_j)) \int \int \exp(-\gamma^2) \gamma^3 (\Delta\varepsilon)^2 \sigma_{ij}^{kl}(g, \chi, \varepsilon) d^2\Omega d\gamma, \quad (31)$$

$\gamma$  — безразмерная относительная скорость,  $e_i = \varepsilon_i/(kT)$ . Очевидно, что в случае  $\Delta\varepsilon = 0$  коэффициент объемной вязкости неопределен. Кроме того, в случае  $\Delta\varepsilon = 0$  не учитываются члены с  $\Delta\varepsilon$ , содержащиеся в коэффициентах линейных алгебраических уравнений для нахождения коэффициента теплопроводности. Если предположить, что  $\Delta\varepsilon \neq 0$ , коэффициенты теплопроводности будут определяться по более точным формулам через  $\Omega$ -интегралы и интеграл  $\beta$  от  $\Delta\varepsilon$  (31):

$$\lambda_{tr} = \frac{75k^2T}{8m\Lambda_{1100}} \frac{1 - \frac{3}{5} \frac{\Lambda_{0110}}{\Lambda_{0011}} \frac{c_{el}}{3k/m}}{1 - (\Lambda_{0110})^2 / \Lambda_{1100}\Lambda_{0011}}, \quad (32)$$

$$\lambda_{el} = \frac{9kT}{4m\Lambda_{0011}} \frac{c_{el}^2}{3k/m} \frac{1 - \frac{5}{3} \frac{\Lambda_{0110}}{\Lambda_{1100}} \frac{3k/m}{c_{el}}}{1 - (\Lambda_{0110})^2 / \Lambda_{1100}\Lambda_{0011}}, \quad (33)$$

где

$$\Lambda_{1100} = m \left( 4\Omega^{(2,2)} + \frac{25}{12}\beta \right), \quad (34)$$

$$\Lambda_{0110} = \Lambda_{1001} = -\frac{5}{4}m\beta, \quad (35)$$

$$\Lambda_{0011} = m \left( 4\Omega^{(1,1)} \frac{mc_{el}}{k} + \frac{3}{4}\beta \right). \quad (36)$$

Таким образом, вычислив соответствующие  $\Omega$ -интегралы и интеграл  $\beta$  от  $\Delta\varepsilon$ , можно найти коэффициенты переноса в уточненной постановке.

### 3. Результаты

В работе проводились расчеты коэффициентов переноса атомов N и O в диапазоне температур 5000–25000 К. Зависимость полного коэффициента теплопроводности азота от температуры, а также вклад  $\lambda_{tr}$  и  $\lambda_{el}$  в коэффициент теплопроводности  $\lambda'$  можно

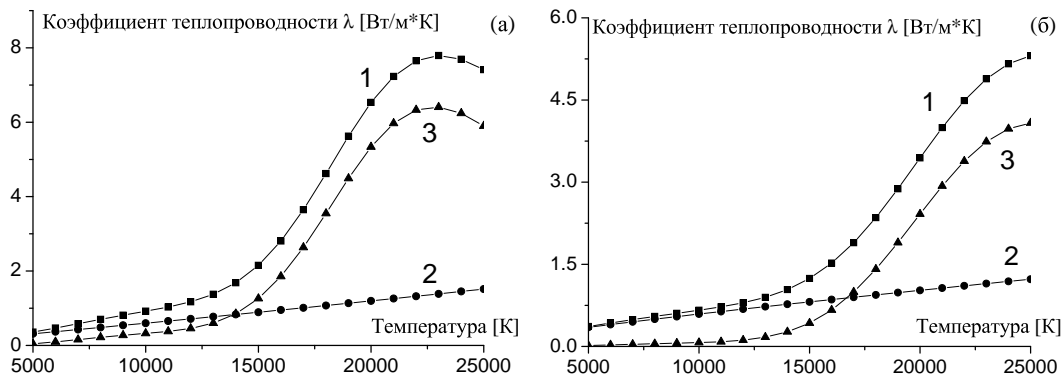


Рис. 1. Вклад поступательных и электронных степеней свободы в коэффициент теплопроводности атомов азота (а) и кислорода (б): 1 —  $\lambda'$ , 2 —  $\lambda_{tr}$ , 3 —  $\lambda_{el}$ .

проследить на рис. 1, а. Как видно из графика, коэффициент теплопроводности  $\lambda'$  возрастает и достигает своего максимума при температуре 23000 К. При этом, начиная с 7000 К, вклад  $\lambda_{el}$  становится весомым, при 14000 К он уже становится равным  $\lambda_{tr}$ , а при 21000 градусах Кельвина и вовсе превышает  $\lambda_{tr}$  почти в пять раз.

Коэффициенты теплопроводности кислорода как функции температуры приведены на рис. 1, б. Коэффициент  $\lambda'$  также возрастает с ростом температуры и достигает максимума при 25000 К. Вклад  $\lambda_{el}$  становится заметным с 11000 К, при 17000 К он становится равным по величине  $\lambda_{tr}$ , а при 24000 К — превышает  $\lambda_{tr}$  почти в три раза.

Приведем результаты для коэффициента сдвиговой вязкости  $\eta$ , а также для коэффициента самодиффузии  $D$  для одноатомных азота и кислорода. График зависимости коэффициента сдвиговой вязкости  $\eta$  от температуры приведен на рис. 2. Сдвиговая вязкость  $\eta$  монотонно возрастает с ростом температуры, по величине коэффициенты для N и O различаются незначительно.

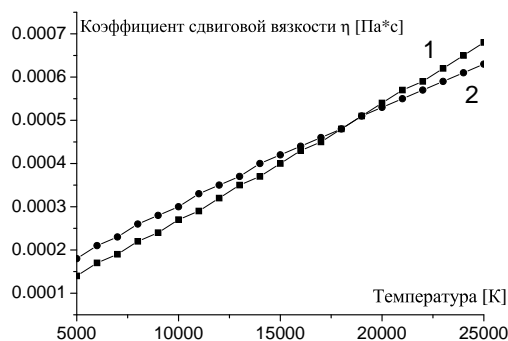


Рис. 2. Зависимость коэффициента сдвиговой вязкости от температуры: 1 — одноатомный азот; 2 — одноатомный кислород.

Зависимость коэффициента самодиффузии  $D$  от температуры приведена на рис. 3. Коэффициент самодиффузии  $D$  также возрастает с ростом температуры; для азота при высоких температурах он заметно превышает соответствующий коэффициент для кислорода.

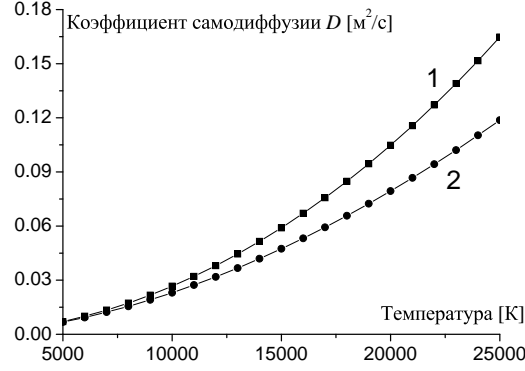


Рис. 3. Зависимость коэффициента самодиффузии от температуры: 1 — одноатомный азот; 2 — одноатомный кислород.

Проведем теперь расчет коэффициента теплопроводности  $\lambda'$  и объемной вязкости  $\varsigma$  в предположении, что дефект резонанса электронной энергии не равен нулю ( $\Delta\epsilon \neq 0$ ). Для этого необходимо вычислить интеграл  $\beta$ , зависящий от сечений переходов электронной энергии. Поскольку точные данные о сечениях ЕТ и ЕЕ обменов отсутствуют, можно приближенно выразить интеграл  $\beta$  через время релаксации электронной энергии  $\tau_{el}$  [3]:

$$\beta = \frac{3}{2n} \frac{c_{el}}{c_V} \frac{1}{\tau_{el}}. \quad (37)$$

В свою очередь, время электронной релаксации можно связать с коэффициентом скорости дезактивации первого электронного уровня  $k_{10}$ :

$$\tau_{el} \approx (nk_{10})^{-1}. \quad (38)$$

Данные о константах скоростей дезактивации метастабильных уровней брались из [9]. Для одноатомного азота  $k_{21N} = 1,8 \times 10^{-18} \text{ м}^3/\text{с}$ , для одноатомного кислорода —  $k_{10O} = 5 \times 10^{-17} \exp(-300/T) \text{ м}^3/\text{с}$ . Очевидно, что эти данные являются приближенными (так, например,  $k_{21N} = \text{const}$ ). В связи с этим результаты, полученные с использованием этих данных, носят характер приближенных оценок.

При учете дефекта резонанса  $\Delta\epsilon$  коэффициенты теплопроводности определяются формулами (32)–(36). Вычислив соответствующие  $\Omega$ -интегралы и интеграл  $\beta$  от  $\Delta\epsilon$ , мы нашли коэффициенты теплопроводности и объемной вязкости в случае  $\Delta\epsilon \neq 0$ .

В таблице приведена погрешность вычисления коэффициента  $\lambda'$ , рассчитанного без учета дефекта резонанса. Как видно из таблицы, погрешность при пренебрежении  $\Delta\epsilon$  для одноатомного азота не превосходит 0,1% и учет дефекта резонанса не влияет на коэффициент теплопроводности. Также видно, что для одноатомного кислорода погрешность при  $\Delta\epsilon = 0$  не превосходит 3% и слабо влияет на величину коэффициента теплопроводности. При этом следует напомнить, что константа скорости дезактивации метастабильных уровней для одноатомного кислорода  $k_{10O}$  более приближена к реальному значению, так как является функцией температуры, и, следовательно, величина погрешности при расчете  $\lambda'$  для одноатомного кислорода является более правдоподобной.

Таблица. Ошибка вычисления  $\lambda'$  без учета  $\Delta\epsilon$  для одноатомного азота и кислорода

Температура, К	Погрешность вычисления $\lambda'$ без учета $\Delta\epsilon$ , %	
	N	O
5000	0,06	0,76
7000	0,09	1,19
9000	0,10	1,34
11000	0,10	1,50
13000	0,10	2,03
15000	0,09	2,64
16000	0,09	2,70
17000	0,07	2,58
19000	0,06	2,13
21000	0,05	1,75
23000	0,05	1,56
25000	0,06	1,52

Приведем результаты для коэффициента объемной вязкости  $\zeta$  для атомарного азота и кислорода. Зависимость коэффициента объемной вязкости от температуры приведена на рис. 4. Видим, что объемная вязкость  $\zeta$  монотонно возрастает с ростом температуры; коэффициент  $\zeta$  для азота значительно выше, чем для кислорода.

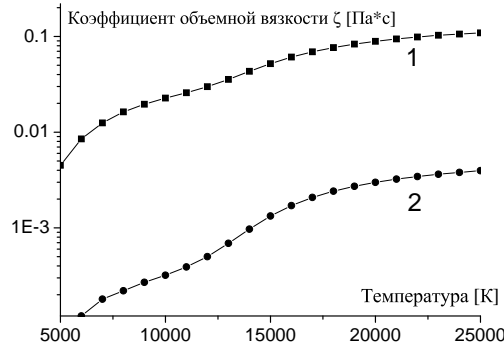


Рис. 4. Зависимость коэффициента объемной вязкости от температуры: 1 — одноатомный азот; 2 — одноатомный кислород.

Сравнение результатов по сдвиговой и объемной вязкости для одноатомного азота и кислорода показано на рис. 5. Видим, что учет коэффициента объемной вязкости  $\zeta$  при низком давлении может давать существенный вклад в тензор напряжений (18), поэтому предположение о малости члена  $\zeta \nabla \cdot \vec{V}$  не всегда верно. Отличие коэффициента объемной вязкости азота на два порядка от величины коэффициента объемной вязкости кислорода объясняется тем, что данные по константе скорости реакции для азота приведены для случая перехода со второго на первый энергетический уровень, а не с первого на нулевой. Исходя из этого, результаты по коэффициенту объемной вязкости для азота можно считать приблизительными.

На основе полученных данных проведем расчет числа Прандтля. Число Прандтля определяется следующим образом:

$$Pr = \frac{c_p \eta}{\lambda}, \quad c_p = c_V + \frac{k}{m}. \quad (39)$$

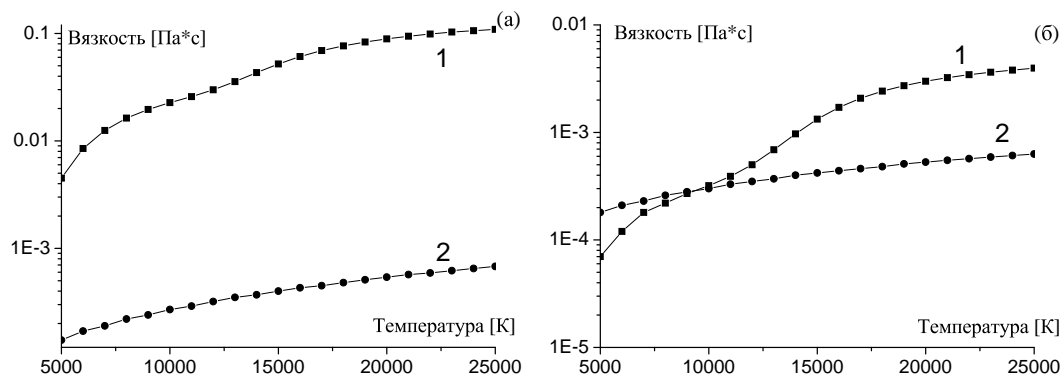


Рис. 5. Сравнение коэффициентов сдвиговой и объемной вязкости для одноатомного азота (а) и кислорода (б): 1 — коэффициент объемной вязкости; 2 — коэффициент сдвиговой вязкости.

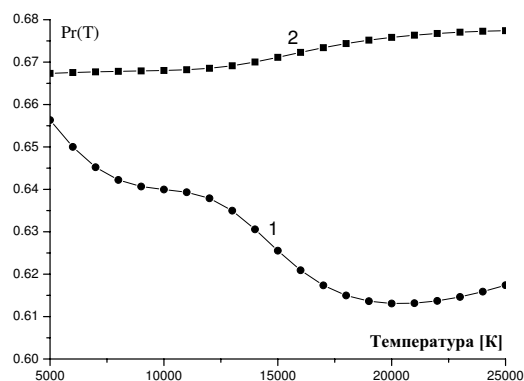


Рис. 6. Зависимость числа Прандтля от температуры. 1:  $Pr_N$ , 2:  $Pr_O$ .

График зависимости числа Прандтля от температуры приведен на рис. 6. Как известно, число Прандтля характеризует соотношение процессов переноса импульса и тепла в газе. Для одноатомных газов обычно его принимают равным постоянной величине:  $Pr = 0,66$ . Как видно из графика, с учетом возбуждения электронных уровней число Прандтля является функцией температуры и ведет себя по-разному для азота и кислорода. Так, для азота  $Pr$  заметно отличается от 0,66 и ведет себя немонотонно с ростом температуры.

#### 4. Заключение

В работе построена математическая модель для расчета коэффициентов переноса в атомарном азоте и кислороде с учетом электронного возбуждения.

Оценен вклад поступательных и электронных степеней свободы в коэффициент теплопроводности. С ростом температуры электронная теплопроводность, начиная с некоторого значения  $T$ , может превосходить поступательную теплопроводность в несколько раз.

Проведено сравнение результатов по сдвиговой и объемной вязкости. Показано, что с ростом температуры объемная вязкость на порядок превосходит сдвиговую вязкость.

Проведен расчет коэффициента теплопроводности и объемной вязкости в предположении, что  $\Delta\varepsilon \neq 0$ . Показано, что вклад  $\Delta\varepsilon$  в коэффициент теплопроводности мал, и предположение, что членами, содержащими  $\Delta\varepsilon$ , можно пренебречь, верно. Учет коэффициента объемной вязкости  $\varsigma$  при низком давлении может давать существенный вклад в тензор напряжений.

Результаты работы могут применяться при расчете сопротивления и тепловых потоков в высокотемпературных течениях газа, например, у поверхности космического летательного аппарата, входящего в атмосферу Земли.

## Литература

1. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: ИЛ, 1960. 510 с.
2. Ферцигер Дж., Капер Г. Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976. 554 с.
3. Нагнибеда Е. А., Кустова Е. В. Кинетическая теория процессов переноса и релаксации в потоках неравновесных реагирующих газов. СПб.: Изд. С.-Петерб. ун-та, 2003. 272 с.
4. Bruno D., Capitelli M., Catalfamo C., Laricchiuta A. Effect of electronic states on transport in magnetized hydrogen plasmas // Phys. Plasmas. 2007. Vol. 14. P. 072308.
5. Bruno D., Capitelli M., Catalfamo C., Laricchiuta A. Cutoff criteria of electronic partition functions and transport properties of atomic hydrogen thermal plasmas // Phys. Plasmas. 2008. Vol. 15. P. 112306.
6. Capitelli M., Colonna G., Giordano D., Maraffa L., Casavola A., Minelli P., Pagano D., Pietanza L. D., Taccogna F. Tables of internal partition functions and thermodynamic properties of high-temperature mars-atmosphere species from 50 K to 50000 K. ESA STR-246, 2005.
7. Cubley S. J., Mason E. A. Atom-molecule and molecule-molecule potentials for transport collision integrals for high-temperature air species // Phys. Fluids, 1975. Vol. 18. N 9. P. 1109–1111.
8. Bzowski J., Kestin J., Mason E. A. *e.a.* Equilibrium and transport properties of gas mixtures at low density: Eleven polyatomic gases and five noble gases // J. Phys. Chem. Ref. Data. 1990. Vol. 19. N 5. P. 1179–1232.
9. Capitelli M., Ferreira C. M., Gordiets B. F., Osipov A. I. Plasma kinetics in atmospheric gases. Berlin: Springer-Verlag, 2000. 302 p.

Статья поступила в редакцию 29 октября 2009 г.